ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 8 (447)

УДК 517.518

П.А. ТЕРЕХИН

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ КОМПОНЕНТОВ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПО ЭЛЕМЕНТАМ СИСТЕМЫ СЖАТИЙ И СДВИГОВ

1. Введение

В статье решается задача представления суммируемых функций абсолютно сходящимися почти всюду (п. в.) рядами по системе

$$\varphi(2^k t - j), \quad k = 0, 1, \dots, \quad j = 0, \dots, 2^k - 1,$$

сжатий и сдвигов функции φ с ненулевым интегралом на отрезке. Соответствующий результат (следствие 4, § 3) устанавливается как следствие более общих результатов (теорема 2 и следствие 2, § 3) о представлении в L_p теми же рядами, сходящимися нормально "по пачкам". Последний результат получен как следствие неравенств для компонентов суммируемых функций по элементам системы (теорема 1 и следствие 1, § 2).

2. Неравенства для компонентов

Пусть функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям

$$\operatorname{supp}\varphi \subset [0,1]; \quad \varphi \in L_p(0,1), \quad 1 \le p \le \infty; \quad \int_0^1 \varphi(t)dt \ne 0.$$

Считая параметр $p \in [1, \infty]$ фиксированным, полагаем

$$\varphi_{k,j}(t) = 2^{k/p}\varphi(2^k t - j), \quad k = 0, 1, \dots, \quad j = 0, \dots, 2^k - 1. \tag{1}$$

Семейство функций (1) называется системой сжатий и сдвигов функции φ. Для функции $f \in L_q(0,1)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, обозначим коэффициенты Фурье по элементам системы сжатий и сдвигов функции φ

$$\langle f, \varphi_{k,j}\rangle = \int_0^1 f(t)\varphi_{k,j}(t)dt, \quad k = 0, 1, \dots, \quad j = 0, \dots, 2^k - 1.$$

Теорема 1. *Для любой функции $f \in L_q(0,1)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, имеем*

$$A\|f\|_q \le \varliminf_{k\to\infty} \Big(\sum_{j=0}^{2^k-1} |\langle f, \varphi_{k,j}\rangle|^q \Big)^{1/q}, \tag{2}$$

где

$$A = \Big| \int_0^1 \varphi(t)dt \Big|.$$

Доказательство. Ввиду однородности неравенства (2) без ограничения общности можно считать, что $A = 1$. Пусть $n = 0, 1, \ldots$ Обозначим

$$I_{n,m} = \int_{m2^{-n}}^{(m+1)2^{-n}} f(t)dt \tag{3}$$

и рассмотрим функцию на $[0, 1)$

$$f_n(t) = 2^n I_{n,m}, \quad t \in [m2^{-n},\ (m+1)2^{-n}),$$

где $m = 0, \ldots, 2^n - 1$. Видно, что

$$\|f_n\|_q = 2^{n/p}\left(\sum_{m=0}^{2^n-1} |I_{n,m}|^q\right)^{1/q}. \tag{4}$$

Следующие соотношения хорошо известны:

1) $\|f_n\|_q \le \|f\|_q$, $1 \le q \le \infty$;
2) $\|f - f_n\|_q \to 0$ при $n \to \infty$, $1 \le q < \infty$;
3) $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$ п. в. на $[0, 1]$.

Отсюда вытекает, что для всех $q \in [1, \infty]$ имеем

$$\|f\|_q = \sup \|f_n\|_q. \tag{5}$$

Пусть $\omega(t)$ — периодическая функция с периодом 1 такая, что $\omega(t) = \varphi(t)$ для $t \in [0, 1)$. Согласно лемме Фейера (см., напр., [1], с. 64), соотношение

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^1 g(t)\omega(\lambda t)dt = \int_0^1 g(t)dt \int_0^1 \omega(t)dt$$

справедливо для любой функции $g \in L_q(0, 1)$. Выберем функцию

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [m2^{-n},\ (m+1)2^{-n}); \\ 0, & t \in [0,\ m2^{-n}) \cup [(m+1)2^{-n},\ 1). \end{cases}$$

Тогда, обозначая

$$I_{n,m}(\lambda) = \int_{m2^{-n}}^{(m+1)2^{-n}} f(t)\omega(\lambda t)dt$$

и учитывая обозначение (3) и определение функции $\omega(t)$, получим

$$\lim_{\lambda\to+\infty} I_{n,m}(\lambda) = I_{n,m} \int_0^1 \varphi(t)dt.$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{m=0}^{2^n-1} |I_{n,m}|^q\right)^{1/q} = \lim_{\lambda\to+\infty} \left(\sum_{m=0}^{2^n-1} |I_{n,m}(\lambda)|^q\right)^{1/q}, \tag{6}$$

т. к.

$$A = \left|\int_0^1 \varphi(t)dt\right| = 1.$$

Пусть $k > n$ и $\lambda = 2^k$. Вычислим

$$I_{n,m}(2^k) = \int_{m2^{-n}}^{(m+1)2^{-n}} f(t)\omega(2^k t)dt = \sum_{j=m2^{k-n}}^{(m+1)2^{k-n}-1} \int_{j2^{-k}}^{(j+1)2^{-k}} f(t)\omega(2^k t)dt, \tag{7}$$

причем полуинтервал $[m2^{-n},\ (m+1)2^{-n})$ разбит на 2^{k-n} полуинтервалов $[j2^{-k},\ (j+1)2^{-k})$. Как нетрудно видеть,

$$j = m2^{k-n}, \ldots, (m+1)2^{k-n} - 1,$$

что и определяет пределы суммирования в (7). Заметим далее, что для $t \in [j2^{-k},\ (j+1)2^{-k})$ имеем $2^k t - j \in [0,1)$. Тогда по определению функции $\omega(t)$ для таких t получаем

$$\omega(2^k t) = \omega(2^k t - j) = \varphi(2^k t - j) = 2^{-k/p}\varphi_{k,j}(t).$$

В последнем равенстве учли определение (1) системы $\{\varphi_{k,j}\}$. Возвращаясь к (7), будем иметь

$$I_{n,m}(2^k) = 2^{-k/p} \sum_{j=m2^{k-n}}^{(m+1)2^{k-n}-1} \langle f, \varphi_{k,j} \rangle, \tag{8}$$

т. к.

$$\langle f, \varphi_{k,j} \rangle = \int_0^1 f(t)\varphi_{k,j}(t)dt = \int_{j2^{-k}}^{(j+1)2^{-k}} f(t)\varphi_{k,j}(t)dt \tag{9}$$

в силу включения $\operatorname{supp}\varphi_{k,j} \subset [j2^{-k},\ (j+1)2^{-k}]$, непосредственно вытекающего из включения $\operatorname{supp}\varphi \subset [0,1]$ и определения (1). Из равенства (8), пользуясь неравенством Гёльдера, находим

$$|I_{n,m}(2^k)| \le 2^{-k/p}\Bigg(\sum_{j=m2^{k-n}}^{(m+1)2^{k-n}-1} 1\Bigg)^{1/p}\Bigg(\sum_{j=m2^{k-n}}^{(m+1)2^{k-n}-1} |\langle f,\ \varphi_{k,j}\rangle|^q\Bigg)^{1/q} = 2^{-n/p}\Bigg(\sum_{j=m2^{k-n}}^{(m+1)2^{k-n}-1} |\langle f,\ \varphi_{k,j}\rangle|^q\Bigg)^{1/q}.$$

Отсюда

$$\Bigg(\sum_{m=0}^{2^n-1} |I_{n,m}(2^k)|^q\Bigg)^{1/q} \le 2^{-n/p}\Bigg(\sum_{m=0}^{2^n-1}\sum_{j=m2^{k-n}}^{(m+1)2^{k-n}-1} |\langle f,\ \varphi_{k,j}\rangle|^q\Bigg)^{1/q} = 2^{-n/p}\Bigg(\sum_{j=0}^{2^k-1} |\langle f,\ \varphi_{k,j}\rangle|^q\Bigg)^{1/q}.$$

Полученное неравенство справедливо для всех $k > n$. Подставляя его в правую часть соотношения (6), имеем

$$\Bigg(\sum_{m=0}^{2^n-1} |I_{n,m}|^q\Bigg)^{1/q} \le 2^{-n/p}\varliminf_{k\to\infty}\Bigg(\sum_{j=0}^{2^k-1} |\langle f,\ \varphi_{k,j}\rangle|^q\Bigg)^{1/q}.$$

Это неравенство вместе с равенствами (4) и (5) дает искомое неравенство (2). $\square$

Предложение 1. *Для любой функции* $f \in L_q(0,1)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, *и любого* $k = 0, 1, \ldots$

$$\Bigg(\sum_{j=0}^{2^k-1} |\langle f,\ \varphi_{k,j}\rangle|^q\Bigg)^{1/q} \le B\|f\|_q,$$

где

$$B = \Bigg(\int_0^1 |\varphi(t)|^p dt\Bigg)^{1/p}.$$

Доказательство. Учитывая (9) и применяя неравенство Гёльдера, находим

$$|\langle f,\ \varphi_{k,j}\rangle| \le \Bigg(\int_{j2^{-k}}^{(j+1)2^{-k}} |f(t)|^q dt\Bigg)^{1/q}\Bigg(\int_{j2^{-k}}^{(j+1)2^{-k}} |\varphi_{k,j}(t)|^p dt\Bigg)^{1/p}.$$

По определению (1) системы $\{\varphi_{k,j}\}$ имеем

$$\Bigg(\int_{j2^{-k}}^{(j+1)2^{-k}} |\varphi_{k,j}(t)|^p dt\Bigg)^{1/p} = \Bigg(2^k\int_{j2^{-k}}^{(j+1)2^{-k}} |\varphi(2^k t - j)|^p dt\Bigg)^{1/p} = \Bigg(\int_0^1 |\varphi(t)|^p dt\Bigg)^{1/p} = B.$$

Таким образом,

$$\Bigg(\sum_{j=0}^{2^k-1} |\langle f,\ \varphi_{k,j}\rangle|^q\Bigg)^{1/q} \le B\Bigg(\sum_{j=0}^{2^k-1}\int_{j2^{-k}}^{(j+1)2^{-k}} |f(t)|^q dt\Bigg)^{1/q} = B\|f\|_q$$

для любого $k = 0, 1, \ldots$ $\square$

Непосредственно из теоремы 1 и предложения 1 вытекает

Следствие 1. Для любой функции $f \in L_q(0,1)$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, и любого бесконечного множества $K \subset \{0\} \cup \mathbb{N}$ имеет место

$$A\|f\|_q \le \sup_{k\in K} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} |\langle f,\ \varphi_{k,j}\rangle|^q \right)^{1/q} \le B\|f\|_q, \tag{10}$$

где

$$A = \left| \int_0^1 \varphi(t)dt \right|, \quad B = \left(\int_0^1 |\varphi(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

3. Представление суммируемых функций рядами по системе сжатий и сдвигов

Пусть по-прежнему функция $\varphi(t)$ имеет носитель $\operatorname{supp}\varphi \subset [0,1]$. Для $k=0,1,\dots$ обозначим

$$V_k(\varphi) = \left\{ f : f(t) = \sum_{j=0}^{2^k-1} c_j \varphi(2^k t - j) \right\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in L_p(0,1)$, $1 \le p < \infty$,

$$\int_0^1 \varphi(t)dt \ne 0. \tag{11}$$

Тогда для любой последовательности неотрицательных целых чисел

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_i < \cdots$$

система пространств $\{V_{k_i}(\varphi)\}$ *является системой представления в пространстве* $L_p(0,1)$ *нормально сходящимися рядами, т. е. для любой функции* $f \in L_p(0,1)$ *найдутся функции* $f_{k_i} \in V_{k_i}(\varphi)$ *такие, что*

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_{k_i}$$

(*сходимость в* L_p) *и*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_{k_i}\|_p < \infty.$$

Доказательство. Положим $n_i = 2^{k_i}$, $i \in \mathbb{N}$, и по аналогии с равенством (1) обозначим

$$\Psi_{ij}(t) = n_i^{1/p}\varphi(n_i t - j), \quad i \in \mathbb{N}, \quad j = 0,\dots,n_i-1. \tag{12}$$

Пусть M_p — пространство числовых семейств

$$x = \{x_{ij}\},\ \ i \in \mathbb{N},\ \ j = 0,\dots,n_i-1,$$

с нормой

$$\|x\|_{1,p} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} |x_{ij}|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Определим линейный оператор $T : M_p \to L_p(0,1)$ по формуле

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n_i-1} x_{ij}\Psi_{ij}.$$

Имеем

$$\|Tx\|_p \le \sum_{i=1}^{\infty} \Big\| \sum_{j=0}^{n_i-1} x_{ij}\Psi_{ij} \Big\|_p = \sum_{i=1}^{\infty} \bigg(\sum_{j=0}^{n_i-1} \int_{j/n_i}^{(j+1)/n_i} |x_{ij} n_i^{1/p} \varphi(n_i t - j)|^p dt \bigg)^{1/p} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \bigg(\sum_{j=0}^{n_i-1} |x_{ij}|^p \int_0^1 |\varphi(t)|^p dt \bigg)^{1/p} = B\|x\|_{1,p}. \quad (13)$$

В первом равенстве цепочки воспользовались включением $\operatorname{supp}\Psi_{ij} \subset [j/n_i,\ (j+1)/n_i]$, непосредственно вытекающим из включения $\operatorname{supp}\varphi \subset [0,1]$ и определения (12) системы $\{\Psi_{ij}\}$. Таким образом, оператор T ограничен.

Видно, что сопряженным к пространству M_p будет пространство N_q, $p^{-1}+q^{-1}=1$, числовых семейств $y=\{y_{ij}\}$, $i\in\mathbb{N}$, $j=0,\dots,n_i-1$, с нормой

$$\|y\|_{\infty,q} = \sup_{i\in\mathbb{N}} \bigg(\sum_{j=0}^{n_i-1} |y_{ij}|^q \bigg)^{1/q} < \infty,$$

причем

$$\langle y,x\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n_i-1} x_{ij}y_{ij}$$

— общий вид функционала в пространстве M_p.

Рассмотрим сопряженный оператор $T^*: L_q(0,1)\to N_q$. Имеем

$$\langle T^*f,x\rangle = \langle f,Tx\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n_i-1} x_{ij}\langle f,\Psi_{ij}\rangle,$$

откуда

$$T^*f = \{\langle f,\Psi_{ij}\rangle\}, \quad i\in\mathbb{N}, \quad j=0,\dots,n_i-1.$$

Полагая в следствии 1 теоремы 1 множество $K=\{k_i\}$, учитывая, что $\Psi_{ij}=\varphi_{k_i,j}$ ввиду (1) и (12), получим согласно (10)

$$A\|f\|_q \le \sup_{i\in\mathbb{N}} \bigg(\sum_{j=0}^{n_i-1} |\langle f,\Psi_{ij}\rangle|^q \bigg)^{1/q} \le B\|f\|_q.$$

По-другому нижнюю оценку в последних неравенствах можно записать в виде

$$A\|f\|_q \le \|T^*f\|_{\infty,q},$$

причем в силу условия (11)

$$A = \bigg| \int_0^1 \varphi(t)dt \bigg| > 0.$$

Следовательно, сопряженный оператор T^* является инъекцией, а оператор T — сюръекцией ([2], с. 18–20). Последнее означает, что для любой функции $f\in L_p(0,1)$ найдется числовое семейство $x=\{x_{ij}\}\in M_p$ такое, что

$$f = Tx = \sum_{i=1}^{\infty} f_{k_i}, \quad f_{k_i} = \sum_{j=0}^{n_i-1} x_{ij}\Psi_{ij}.$$

Ввиду (12) f_{k_i} принадлежит $V_{k_i}(\varphi)$, при этом, учитывая (13), имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_{k_i}\|_p = \sum_{i=1}^{\infty} \Big\| \sum_{j=0}^{n_i-1} x_{ij}\Psi_{ij} \Big\|_p = B\|x\|_{1,p} < \infty. \quad \square$$

Предложение 2. *Пусть для $n \in \mathbb{N}$ по представлению $n{=}2^k{+}j$, $k{=}0,1,\ldots$, $j{=}0,\ldots,2^k{-}1$,*

$$\varphi_n(t) = \varphi(2^k t - j). \tag{14}$$

Если один из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} c_n\varphi_n \tag{15}$$

сходится по норме пространства $L_p(0,1)$, то другой также сходится, и их суммы совпадают.

Доказательство. Очевидно, последовательность частичных сумм

$$\sigma_m = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} c_n\varphi_n$$

второго ряда в (15) является подпоследовательностью частичных сумм

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n$$

первого ряда в (15). Поэтому, если сходится первый ряд, то к той же сумме сходится и второй. С другой стороны, справедливо представление

$$S_N(t) = \begin{cases} \sigma_{m+1}(t), & 0 \le t < (i+1)2^{-m}; \\ \sigma_m(t), & (i+1)2^{-m} < t \le 1, \end{cases} \tag{16}$$

где $N = 2^m + i$, $m = 0,1,\ldots$, $i = 0,\ldots,2^m - 1$. В самом деле, с учетом определения (14) функций $\{\varphi_n\}$ имеем

$$S_N(t) = \sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{2^k-1} c_{k,j}\varphi(2^k t - j) + \sum_{j=0}^{i} c_{m,j}\varphi(2^m t - j),$$

где $c_n = c_{k,j}$ для $n = 2^k + j$. Далее заметим, что

$$\sum_{j=0}^{i} c_{m,j}\varphi(2^m t - j) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{2^m-1} c_{m,j}\varphi(2^m t - j), & 0 \le t < (i+1)2^{-m}; \\ 0, & (i+1)2^{-m} < t \le 1, \end{cases}$$

т. к. $\operatorname{supp}\varphi(2^m t - j) \subset [j2^{-m},\ (j+1)2^{-m}]$. Сопоставляя последнее равенство, последнюю цепочку равенств и определение σ_m, получаем представление (16).

Предположим теперь, что второй ряд в (15) сходится к функции f, т. е. для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем $\|f - \sigma_m\|_p < \varepsilon$, $m \ge m(\varepsilon)$. Тогда на основании представления (16) для $N \ge 2^{m(\varepsilon)}$ будем иметь

$$\|f - S_N\|_p \le \|f - \sigma_m\|_p + \|f - \sigma_{m+1}\|_p < 2\varepsilon,$$

т. е. первый ряд в (15) также сходится. □

Следствие 2. Пусть функция $\varphi \in L_p(0,1)$ имеет отличный от нуля интеграл (11). Тогда последовательность функций $\{\varphi_n\}$ является системой представления в пространстве $L_p(0,1)$ рядами, сходящимися нормально “по пачкам”, т. е. для любой функции $f \in L_p(0,1)$ найдется числовая последовательность $\{c_n\}$ такая, что

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n \tag{17}$$

(сходимость в L_p) и

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big\|\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} c_n\varphi_n\Big\|_p < \infty. \tag{18}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} c_n\varphi_n \in V_k(\varphi).$$

Применим теорему 2 к системе пространств $\{V_k(\varphi)\}$, $k = 0, 1, \ldots$ Получим, что произвольная функция $f \in L_p(0,1)$ представима рядом

$$f = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} c_n\varphi_n,$$

причем таким, что выполнено условие (18). Согласно предложению 2 справедливо также представление (17). $\square$

Следствие 3. Пусть функция $\varphi \in L(0,1)$ имеет отличный от нуля интеграл (11). Тогда последовательность функций $\{\varphi_n\}$ является системой представления в пространстве $L(0,1)$ нормально сходящимися рядами, т. е. для любой функции $f \in L(0,1)$ найдется числовая последовательность $\{c_n\}$ такая, что справедливо представление (17) (со сходимостью в L) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|c_n\varphi_n\|_1 < \infty$.

Доказательство. В силу включения $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [j2^{-k},\ (j+1)2^{-k}]$, $n = 2^k + j$, имеем

$$\Big|\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} c_n\varphi_n(t)\Big| = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |c_n\varphi_n(t)|$$

для всех $t \notin \{j2^{-k} : j = 0, \ldots, 2^k - 1\}$. Следовательно,

$$\Big\|\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} c_n\varphi_n\Big\|_1 = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \|c_n\varphi_n\|_1.$$

Осталось применить следствие 2 при $p = 1$. $\square$

Из теоремы Беппо–Леви и следствия 3 вытекает

Следствие 4. Пусть функция $\varphi \in L(0,1)$ имеет отличный от нуля интеграл (11). Тогда последовательность функций $\{\varphi_n\}$ является системой представления в пространстве $L(0,1)$ рядами, абсолютно сходящимися п. в., т. е. для любой функции $f \in L(0,1)$ найдется числовая последовательность $\{c_n\}$ такая, что п. в. на отрезке $[0,1]$ $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(t)$, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n\varphi_n(t)| < \infty.$$

Замечание. Как нетрудно видеть из формулировки теоремы 2, следствия 2–4 останутся справедливыми, если из последовательности $\{\varphi_n\}$ исключить произвольное конечное число функций или даже некоторые бесконечные подсистемы.

Следствия 2–4 дополняют результаты статьи [3].

Литература

1. Эдвардс Р. *Ряды Фурье в современном изложении.* – Т. 1. – М.: Мир, 1985. – 260 с.
2. Пич А. *Операторные идеалы.* – М.: Мир, 1982. – 536 с.
3. Filippov V.I., Oswald P. *Representation in L_p by series of translates and dilates of one function* // J. Approxim. Theory. – 1995. – V. 82. – P. 15–29.

Саратовский государственный
университет

Поступила
09.01.1998