ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 11 (522)

УДК 519.71

Н.З. ГАББАСОВ, Б.С. КОЧКАРЕВ

РЕАЛИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРОЦЕССОВ КОНЕЧНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ И ВЕРОЯТНОСТНЫМИ АВТОМАТАМИ

Пусть X — конечный непустой алфавит. Через X^* обозначим множество всех слов конечной длины над X, т.е. X^* — свободный моноид, генерируемый множеством X. Единицу моноида X^* будем обозначать через e, т.е. e — пустое слово. Если $p = x_1x_2\dots x_n$, где $x_i \in X$, $i = \overline{1,n}$, то $|p| = n$ и $p^\top = x_nx_{n-1}\dots x_2x_1$.

Определение 1. Всякое отображение $f : X^* \to R$, где R — поле, будем называть дискретным процессом (кратко процессом).

Определение 2. Сопряженным процессом к процессу f будем называть процесс $f^\top$, определяемый условием

$$f^\top(p) = f(p^\top) \quad \forall p \in X^*.$$

Определение 3. Если $f = f^\top$, то процесс f называется самосопряженным.

Замечание 1. Очевидно, $(f^\top)^\top = f$.

Определение 4. Конечным линейным автоматом (КЛА) с выходом над X будем называть тройку

$$A = \langle \mu, \{A(x),\ x \in X\}, \nu \rangle,$$

где μ — $1 \times n$-матрица над полем R, $A(x)$ $(x \in X)$ — квадратные $n \times n$-матрицы над полем R, ν — $n \times 1$-матрица над полем R.

Очевидно, со всяким КЛА A ассоциируется некоторый процесс f_A, определяемый равенством

$$f_A(p) = \mu A(p)\nu \quad \forall p \in X^*,$$

где $A(p) = A(x_1)A(x_2)\dots A(x_k)$, если $p = x_1x_2\dots x_k$, $A(e)$ — единичная $n \times n$-матрица.

В этом случае будем также говорить, что КЛА реализует процесс f_A.

Определение 5. Процесс f будем называть линейным процессом (ЛП), если существует КЛА A такой, что $f_A = f$.

Если $n = n_A$ — минимальное возможное число состояний КЛА A, реализующего ЛП f, то будем писать $n = \dim f$.

Определение 6. Процесс f будем называть псевдовероятностным процессом (ПП), если $\sum\limits_{x \in X} f(px) = f(p) \quad \forall p \in X^*$.

Определение 7. ПП f будем называть вероятностным процессом (ВП), если поле R вещественное и 1) $f(e) = 1$, 2) $f(p) \geq 0 \ \ \forall p \in X^*$.

Определение 8. Если для ВП f $\dim f = n < \infty$, то f будем называть вероятностным линейным процессом (ВЛП).

Определение 9. Конечным вероятностным автоматом (КВА) с выходом над X будем называть тройку

$$B = \langle \alpha, \{B(x),\ x \in X\}, \beta \rangle,$$

где α — стохастическая $1 \times n$-матрица, $B(x)$ $(x \in B)$ — квадратные неотрицательные (поэлементно) $n \times n$-матрицы такие, что $\sum\limits_{x \in X} B(x)$ есть стохастическая матрица, β — $n \times 1$-матрица, все компоненты которой равны единице.

Очевидно, со всяким КВА B ассоциируется ВП

$$f_B(p) = \alpha B(p) \beta \quad \forall p \in X^*.$$

В этом случае будем также говорить, что КВА B реализует ВП f_B.

Определение 10. Если существует КВА B, который реализует ВП f, то f называется конечным вероятностным процессом (КВП).

Очевидно, всякий КВП f является ВЛП, но обратное, как мы увидим, не всегда имеет место.

Минимальное возможное число состояний КВА B, реализующего КВП f, обозначим через $\dim^+ f$.

Теорема 1. *Существует ВП f такой, что $\dim f = 3$, но $\dim^+ f = \infty$, $|X| = 2$.*

Доказательство. Рассмотрим линейный автомат

$$A = \langle \mu, \{A(0),\ A(1)\}, \nu \rangle,$$

где

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}(0, \varepsilon, 1), \quad A(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A(1) = \frac{1}{2(1+\varepsilon^2(2-\cos\theta))}\begin{pmatrix} \varepsilon^2 \sin^2\theta & \varepsilon^2(2-\cos\theta)\sin\theta & \varepsilon\sin\theta \\ \varepsilon^2(2-\cos\theta)\sin\theta & \varepsilon^2(2-\cos\theta)^2 & \varepsilon(2-\cos\theta) \\ \varepsilon\sin\theta & \varepsilon(2-\cos\theta) & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственными вычислениями показывается, что f_A при $|\varepsilon| \le \frac{1}{3}$ является ВП, причем в силу известного [1] критерия индуцируемости стохастического процесса марковской цепью, при условии, что $\varepsilon \ne 0$ и θ — угол иррационального порядка относительно π (т. е. $\theta = r\pi$, где r иррациональное), f_A не может быть реализован никаким КВА B, т. е. в этом случае $\dim^+ f = \infty$. Нетрудно показать, что $\dim f_A = 3$. $\square$

Теорема 2. *Для любого $N \ge 3$ существует ВП f_N такой, что $\dim^+ f_N = N$, $\dim f_N = 3$, $|X| = 2$.*

Доказательство. Искомый ВП f_N есть процесс, реализуемый КЛА из теоремы 1 для θ подходящего рационального порядка относительно π. $\square$

Теорема 3. *Всякий ВП f, для которого $\dim f < 3$, реализуется КВА, т. е. является КВП.*

Доказательство. В силу известного [1] критерия индуцируемости стохастического процесса марковской цепью достаточно использовать тот факт, что острый выпуклый конус на двумерной плоскости имеет не более двух базисных образующих, а угол соответствующего сектора меньше π. $\square$

Теорема 4. *Процесс f является ЛП тогда и только тогда, когда $f^\top$ является ЛП, причем $\dim f = \dim f^\top$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть f реализуется КЛА
$$A = \langle \mu, \{A(x),\ x \in X\}, \nu \rangle,$$
т. е. $f(p) = \mu A(p)\nu \quad \forall p \in X^*$. Тогда $f^\top(p) = f(p^\top) = \mu A(p^\top)\nu = \mu A(x_k)\dots A(x_1)\nu$. Очевидно, имеем
$$f^\top(p) = f(p^\top) = \nu^\top A^\top(x_1) A^\top(x_2)\dots A^\top(x_k)\mu^\top,$$
где $A^\top(x)$ — транспонированная матрица $A(x)$. Таким образом, $f^\top$ реализуется посредством КЛА
$$A^\top = \langle \nu^\top, \{A^\top(x),\ x \in X\}, \mu^\top \rangle.$$

Достаточность в силу замечания 1 доказывается аналогично. Из самого доказательства видно, что в этом случае $\dim f = \dim f^\top$. $\square$

Теорема 5. *Если известно, что* $\dim f \le n$, *где* n *задано и существует эффективный способ вычисления* $f(p)$ *для любого* p, $|p| \le 2n - 1$, *то самосопряженность ЛП* f *алгоритмически разрешима.*

Доказательство. Действительно, в этом случае достаточно проверить справедливость соотношения
$$f(p) = f(p^\top)$$
для всех слов длины $\le 2n - 1$. $\square$

Определение 11. ПП f называется двусторонним, если $f^\top$ является ПП.

Определение 12. ВП f называется двусторонним, если $f^\top$ является ВП.

Теорема 6. *Для того чтобы ПП* f *являлся двусторонним, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*
$$\sum_{x \in X} f(xp) = f(p) \quad \forall p \in X^*.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f^\top$ является ПП. Тогда
$$f(p) = f^\top(p^\top) = \sum_{x \in X} f^\top(p^\top x) = \sum_{x \in X} f(xp) \quad \forall p \in X^*.$$

Достаточность. Пусть теперь ПП f удовлетворяет условию $\sum\limits_{x \in X} f(xp) = f(p) \quad \forall p \in X^*$. Тогда имеем
$$\sum_{x \in X} f^\top(px) = \sum_{x \in X} f(xp^\top) = f(p^\top) = f^\top(p),$$
т. е. $f^\top$ является ПП. $\square$

Теорема 7. *Если двусторонний ПП* f *является ВП, то* f *является двусторонним ВП.*

Доказательство. Поскольку ПП f является ВП, то $f^\top(e) = f(e^\top) = f(e) = 1$, $f^\top(p) = f(p^\top) \ge 0 \ \ \forall p \in X^*$. Так как f является двусторонним ПП, то и $f^\top$ является ВП, т. е. f является двусторонним ВП. $\square$

Очевидно, всякий самосопряженный ПП (ВП) f является двусторонним ПП (ВП).

Теорема 8. *Существует самосопряженный ВП* f *такой, что* $\dim f = 3$, *но* $\dim^+ f = \infty$, $|X| = 2$.

Доказательство. Рассмотрим линейный автомат

$$A' = \langle \mu, A(0), A'(1), \nu \rangle$$

где μ, ν, $A(0)$ такие же, что и при определении линейного автомата из теоремы 1, а $A'(1)$ представляет собой матрицу вида

$$A'(1) = \frac{1}{2R} \begin{pmatrix} \varepsilon^2 \sin^2 \theta & \varepsilon^2 (2 - \cos\theta) \sin\theta & \varepsilon \sin\theta \\ -\varepsilon^2 (2 - \cos\theta) \sin\theta & \varepsilon^2 (2 - \cos\theta)^2 & \varepsilon(2 - \cos\theta) \\ -\varepsilon \sin\theta & \varepsilon(2 - \cos\theta) & 1 \end{pmatrix}$$

для $R = \varepsilon^2(2 - \cos\theta) + 1$.

Непосредственными вычислениями и используя теорему 5 показываем, что $f_{A'}$ при $|\varepsilon| \leq \frac{1}{3}$ является самосопряженным ВП. По той же причине, что и при доказательстве теоремы 1, $f_{A'}$ при условии, что $\varepsilon \neq 0$ и θ — угол иррационального порядка относительно π, не может быть реализован никаким КВА B, т. е. в этом случае $\dim^+ f_{A'} = \infty$. Для завершения доказательства остается заметить, что линейный автомат A' является неприводимым, т. е. $\dim f_{A'} = 3$. □

Следствие 1. Существует двусторонний ВП f такой, что $\dim f = 3$, но $\dim^+ f = \infty$, $|X| = 2$.

Теорема 9. *Для любого* $N \geq 3$ *существует самосопряженный ВП* f_N *такой, что* $\dim^+ f_N = N$, $\dim f_N = 3$, $|X| = 2$.

Доказательство. Искомый самосопряженный ВП f_N есть процесс, реализуемый КЛА из теоремы 8 для θ подходящего рационального порядка относительно π. □

Следствие 2. Для любого $N \geq 3$ существует двусторонний ВП f_N такой, что $\dim^+ f_N = N$, $\dim f_N = 3$, $|X| = 2$.

Замечание 2. В силу континуальности выбора значений параметра ε для соответствующих ЛА в теоремах 1, 2, 8, 9 эти теоремы будут справедливы, если изменить их формулировки с учетом такого выбора ε. Так, например, теорема 1 в этом случае примет следующий вид.

Теорема 1′. *Существует континуум ВП* f *таких, что* $\dim f = 3$, *но* $\dim^+ f = \infty$, $|X| = 2$.

Литература

1. Heller A. *On stochastic processes derived from Markov chains* // Ann. Math. Statist. – 1965. – V. 36. – P. 1286–1291.

Казанский государственный университет

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет

Поступила
26.09.2003