И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2006 МАТЕМАТИКА № 9 (532)

УДК 512.554

Н.А. КОРЕШКОВ

О НИЛЬПОТЕНТНОСТИ И РАЗЛОЖЕНИИ АЛГЕБР АССОЦИАТИВНОГО ТИПА

В работе изучаются некоторые свойства алгебр ассоциативного типа. Эти алгебры являются частным случаем алгебр лиевского типа, которые были введены в [1], [2]. Приведем это определение. Пусть G — коммутативная группа, B — G-градуированная алгебра над полем k, т.е. $B = \bigoplus_{\alpha \in T} B_\alpha$, $T \subset G$, $|T| < \infty$, причем $B_\alpha B_\beta \subset B_{\alpha+\beta}$, когда $\alpha + \beta \in T$ и $B_\alpha B_\beta = 0$ в противном случае. Говорят, что B — алгебра лиевского типа, если для любых $\alpha, \beta, \gamma \in T$ существуют такие элементы $\lambda, \mu \in k$, $\lambda \neq 0$, что при любых $a \in B_\alpha$, $b \in B_\beta$, $c \in B_\gamma$ имеет место соотношение $(ab)c = \lambda a(bc) + \mu b(ac)$.

Если $\mu = \mu(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ при любых $\alpha, \beta, \gamma \in T$, то алгебру B в этом случае естественно назвать алгеброй ассоциативного типа. Будем использовать этот термин в более общей редакции. А именно, пусть G — полугруппа, B — G-градуированная алгебра над полем k, т.е. $B = \bigoplus_{\alpha \in T} B_\alpha$, $T \subset G$, $|T| < \infty$, причем $B_\alpha B_\beta \subset B_{\alpha\beta}$, когда $\alpha\beta \in T$ и $B_\alpha B_\beta = 0$ в противном случае. Будем говорить, что B — *алгебра ассоциативного типа*, если для любых $\alpha, \beta, \gamma \in T$ существует такой элемент $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$, что при любых $a \in B_\alpha$, $b \in B_\beta$, $c \in B_\gamma$ имеет место соотношение $(ab)c = \lambda a(bc)$.

Отметим, что существуют примеры алгебр над $\mathbb{Z}$, являющиеся алгебрами ассоциативного типа, причем редукция в характеристику p соответствующей коммутаторной алгебры дает модулярную алгебру Ли. Рассмотрим один из таких примеров.

В качестве полугруппы возьмем множество $G = \{(\alpha, i), \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_j \in F_p, i = 1, \dots, n\}$, где F_p — простое поле, с операцией умножения $(\alpha, i)(\beta, j) = (\alpha + \beta - \delta_i, j)$, $\delta_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$. Обозначим через B свободный $\mathbb{Z}$-модуль с базисом $e(\alpha, i)$, $(\alpha, i) \in G$, Превратим его в алгебру над $\mathbb{Z}$, полагая

$$e(\alpha, i)e(\beta, j) = \overline{\beta}_i e(\alpha + \beta - \delta_i, j),$$

где $\overline{\beta}_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq \overline{\beta}_i \leq p, \overline{\beta}_i 1_{F_p} = \beta_i$. Тогда $B_\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Z} B$ — G-градуированная алгебра $B_\mathbb{Q} = \bigoplus_{(\alpha,i) \in G} B^\mathbb{Q}_{\alpha,i}$, $B^\mathbb{Q}_{\alpha,i} = \mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Z} B_{\alpha,i}$, $B_{\alpha,i} = \mathbb{Z}e(\alpha, i)$ над полем $\mathbb{Q}$ ассоциативного типа, т.к.

$$\big(e(\alpha, i)e(\beta, j)\big)e(\gamma, k) = \lambda e(\alpha, i)\big(e(\beta, j)e(\gamma, k)\big),$$

где $\lambda = \overline{\beta}_i / \overline{\beta_i + \gamma_i - \delta_{i,j}}$.

Рассмотрим коммутаторную алгебру B_L, являющуюся свободным $\mathbb{Z}$-модулем B с умножением $[b_1, b_2] = b_1 b_2 - b_2 b_1$, $b_1, b_2 \in B$. В частности, для базисных элементов имеем

$$[e(\alpha, i), e(\beta, j)] = \overline{\beta}_i e(\alpha + \beta - \delta_i, j) - \overline{\alpha}_j e(\alpha + \beta - \delta_j, i).$$

Легко видеть, что $F_p \otimes_\mathbb{Z} B_L \cong W_n$, где W_n — общая алгебра картановского типа, состоящая из дифференциальных операторов $\sum_{i=1}^n f_i \partial_i$, где f_i принадлежит кольцу срезанных многочленов $O_n = k[x_1, \dots, x_n]/\langle x_i^p - 1,\ i = 1, \dots, n\rangle$, а ∂_i являются продолжениями частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ кольца многочленов на фактор-кольцо O_n. Указанный изоморфизм определяется соответствием между базисными элементами $1_{F_p} \otimes e(\alpha, i) \in F_p \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} B_L$ и $\overline{x}^\alpha \partial_i \in W_n$, где $\overline{x}^\alpha = \overline{x}_1^{\alpha_1} \dots \overline{x}_n^{\alpha_n}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $0 \le \alpha_i \le p-1$, $\overline{x}_i$ — образующие фактор-кольца O_n.

Пусть A — алгебра ассоциативного типа. Обозначим через $[a_1, \dots, a_m]$ произведение элементов $a_1, \dots, a_m$ в заданном порядке при некоторой расстановке скобок. Используя рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых для ассоциативных алгебр доказывается, что любое произведение не зависит от способа расстановки в нем скобок, легко показать, что любые два произведения $[x_1, \dots, x_m]_1$ и $[x_1, \dots, x_m]_2$ однородных элементов $x_i \in A$, $i = 1, \dots, m$, отличаются ненулевым множителем из k. (Элемент называем *однородным*, если он принадлежит одному из пространств G-градуировки.)

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с условием нильпотентности алгебр ассоциативного типа. Будем говорить, что подалгебра B алгебры ассоциативного типа *относительно нильпотентна*, если $B^{[n]} = 0$ для некоторого натурального n, где $B^{[n]} = [\underbrace{B, \dots, B}_{n}] = \left\{ \sum_{i_1, \dots, i_n} \lambda_{i_1, \dots, i_n} [b_{i_1}, \dots, b_{i_n}],\ \lambda_{i_1, \dots, i_n} \in k \right\}$ и все произведения $[b_{i_1}, \dots, b_{i_n}]$ имеют одну и ту же расстановку скобок.

Подалгебру B назовем однородной, если $B = \bigoplus_{\alpha \in T} B_\alpha$, где $B_\alpha = B \cap A_\alpha$. Для однородной подалгебры приведенное определение нильпотентности не зависит от расстановки скобок. Действительно, любое произведение $[b_1, \dots, b_t]$, $b_k \in B$, $k = 1, \dots, t$, является линейной комбинацией элементов $[b_{k_1,1}, \dots, b_{k_t,t}]$, где $b_{k_j,j}$ — однородная компонента элемента b_j. Если при какой-либо расстановке скобок все произведения равны нулю, то в силу отмеченного выше все произведения однородных элементов алгебры B из t множителей при любой расстановке скобок также равны нулю. Поэтому если $B^{[n]} = 0$ при одной расстановке скобок, то $B^{[n]_1} = 0$ при любой другой расстановке. В этом случае термин "*относительная нильпотентность*" заменим на термин "*нильпотентность*".

Предложение 1. *Сумма конечного числа однородных левых нильпотентных идеалов алгебры ассоциативного типа есть однородный левый нильпотентный идеал.*

Доказательство. Пусть N_i, $i = 1, \dots, k$, — левые однородные нильпотентные идеалы. Очевидно, $N = \sum_{i=1}^{k} N_i$ — однородный левый идеал. Его нильпотентность достаточно проверить для случая $k = 2$. Общий случай получается тогда простой индукцией.

Итак, пусть $N_1^{[s]} = 0$, $N_2^{[r]} = 0$. Докажем, что $(N_1 + N_2)^{[s+r]} = 0$. Пусть $[n_{i_1}, \dots, n_{i_{s+r}}]$ — произведение однородных элементов n_{i_k}, каждый из которых принадлежит либо N_1, либо N_2. В любом таком произведении количество элементов t_1 из N_1 не меньше, чем s, либо количество элементов t_2 из N_2 не меньше, чем r. Пусть для определенности $t_1 \ge s$. Тогда рассматриваемое произведение лишь множителем из k отличается от произведения

$$[(L_{a_1} \dots L_{a_{k_1-1}} n_{k_1}), (L_{b_1} \dots L_{b_{k_2-1}} n_{k_2}), \dots, (L_{c_1} \dots L_{c_{k_m-1}} n_{k_m})],$$

где $n_{k_1}, \dots, n_{k_m} \in N_1$, $m \ge s$, $a_i, b_j, \dots, c_q \in N_2$, L_x — оператор левого умножения. Тогда произведение в каждой скобке принадлежит N_1, а итоговое произведение принадлежит $N_1^{[m]}$. Так как $m \ge s$, то $N_1^{[m]} = 0$ и, следовательно, $[n_{i_1}, \dots, n_{i_{s+r}}] = 0$. $\square$

Для алгебр ассоциативного типа имеет место аналог теоремы Веддерберна о том, что нильпотентность конечномерной ассоциативной алгебры определяется нильпотентностью ее элементов.

Будем говорить, что элемент $a \in A$ *нильпотентен*, если $a^{[n]} = 0$, где $a^{[n]} = [a, \dots, a]$ при некоторой расстановке скобок. Если a — однородный элемент, то из приведенного выше замечания о том, что $a^{[n]}$ и $a^{[n]_1}$ отличаются лишь ненулевым множителем из k следует, что нильпотентность a не зависит от способа расстановки скобок в $[a, \dots, a]$.

Теорема 1. *Пусть A — конечномерная алгебра ассоциативного типа. Если каждый однородный элемент из A нильпотентен, то A нильпотентна.*

Доказательство. Используем индукцию по размерности алгебры A. Если $\dim A = 1$, т. е. $A = ka$, то $a^2 = \mu a$, $\mu \in k$. Так как элемент a очевидно однороден, то из условия $a^{[n]} = 0$ вытекает $\mu = 0$. Следовательно, $A^2 = 0$, т. е. A нильпотентна.

Рассмотрим общий случай. Если $A^2 \subsetneqq A$, т. е. $\dim A^2 < \dim A$, то по предположению индукции существует такое натуральное n, что $(A^2)^{[n]} = 0$. Но тогда $A^{[2n]} = 0$.

Если $A^2 = A$, то выберем базис $a_1, \ldots, a_m$ из однородных элементов алгебры A. Так как $A^2 = \left\{ \sum\limits_{i,j=1}^{m} \lambda_{ij} a_i a_j,\ \lambda_{ij} \in k \right\}$, то $A^2 = \sum\limits_{j=1}^{m} A a_j$. Предположим, что существует такой номер j, что $Aa_j = A$. Тогда для некоторого $\gamma \in G$ найдется такой элемент $x \in A_\gamma$, что $xa_j = a_j$. Отсюда

$$a_j = xa_j = x(xa_j) = \lambda x^2 a_j, \quad \lambda \in k.$$

Повторяя эту процедуру, получим, что для любого n имеет место равенство $a_j = \lambda_n x^{[n]} a_j$. Так как $x^{[n]} = 0$ для некоторого n, то $a_j = 0$. Это противоречит линейной независимости элементов $a_1, \ldots, a_m$.

Значит, $Aa_j \subsetneqq A$ для любого номера j. Каждое подпространство Aa_j является левым однородным идеалом в A. Используя предположение индукции, получим, что каждый левый однородный идеал Aa_j нильпотентен. Тогда из предложения 1 следует, что A — нильпотентная алгебра. $\square$

В теории конечномерных ассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики k имеется критерий нильпотентности алгебры в терминах функции следа, принимающей значения в k. Для конечномерных алгебр ассоциативного типа над полем нулевой характеристики имеет место аналогичный критерий в терминах функции следа со значениями в кольце многочленов $k[x]$.

Пусть $k[x]$ — кольцо многочленов над полем k от переменной x. Обозначим через $S : a \to S(a) \in k[x]$ линейное отображение алгебры A в $k[x]$, задаваемое правилом $S(a) = \mathrm{tr}(XL_a)$, где L_a — матрица оператора левого умножения для элемента a, в некотором базисе, согласованном с градуировкой алгебры A, а $X = \begin{bmatrix} X_1 & & & 0 \\ & X_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & X_r \end{bmatrix}$ — блочно-диагональная матрица, где $X_i = x^i E_i$, E_i — единичная матрица, размер которой равен $\dim A_{\alpha_i}$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} = T \subset G$.

Если L'_a — матрица элемента a в другом базисе, согласованном с градуировкой алгебры A, то матрица перехода M от одного базиса к другому имеет блочно-диагональный вид $M = \begin{bmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_r \end{bmatrix}$, причем размер каждой матрицы M_i равен $\dim A_{\alpha_i}$. Поэтому $XM = MX$ и, следовательно, $\mathrm{tr}(XL'_a) = \mathrm{tr}(XM^{-1}L_aM) = \mathrm{tr}(XL_a)$.

В случае когда элемент a однородный, его матрица L_a в базисе, согласованном с градуировкой, имеет вид $(L_{ij}(a))$, $i, j = 1, \ldots, r$, где $L_{ij}(a)$ — матрица оператора L_a в ограничении на A_{α_j} со значениями в A_{α_i}. Легко видеть, что для любого j количество ненулевых блоков $L_{ij}(a)$ не больше одного.

Теорема 2. *Конечномерная алгебра A ассоциативного типа над полем k нулевой характеристики нильпотентна тогда и только тогда, когда $S(A) = 0$.*

Доказательство. Пусть A нильпотентна. Тогда для любого однородного элемента a существует такое натуральное n, что $a^{[n]} = 0$, т. е. $L_a^n = 0$. Действительно, для любых двух однородных элементов $a, b \in A$ $\ L_{ab} = \Lambda L_a L_b$, где $\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_r \end{bmatrix}$ — блочно-диагональная матрица, причем $\Lambda_i = \lambda_i E_i$, $\lambda_i \in k$, $\lambda_i \neq 0$, E_i — единичная матрица, размер которой равен $\dim A_{\alpha_i}$. Отсюда по индукции легко получить, что $L_{a_1} L_{a_2} \ldots L_{a_m} = \widetilde{\Lambda} L_{(((a_1 a_2)\ldots)a_m)}$, где $\widetilde{\Lambda}$ — матрица, аналогичная матрице Λ. В частности, $L_a^m = \widetilde{\Lambda} L_{a^{[m]}}$.

Если $L_{ii}(a)$ — ненулевой i-й диагональный блок в матрице L_a, то из строения матрицы L_a (см. замечание перед теоремой) следует, что i-й диагональный блок матрицы L_a^n есть $L_{ii}^n(a)$. Из нильпотентности матрицы L_a немедленно получаем нильпотентность матрицы $L_{ii}(a)$. В частности, $\operatorname{tr} L_{ii}(a) = 0$. Поэтому $S(A) = \sum_{i=1}^{r} x^i \operatorname{tr} L_{ii}(a) = 0$. Так как это соотношение выполняется для любого однородного элемента $a \in A$, то $S(A) = 0$.

Обратно, пусть $S(A) = 0$. Тогда $S(a^{[m]}) = 0$ для любого натурального m. Но $S(a^{[m]}) = \operatorname{tr}(XL_{a^{[m]}}) = \sum_{i=1}^{r} x^i \operatorname{tr} L_{ii}(a^{[m]})$. Следовательно, $\operatorname{tr} L_{ii}(a^{[m]}) = 0$, $i = 1, \dots, r$. Как было показано выше, для однородного элемента a выполняется соотношение $(L_a)^m = \Lambda L_{a^{[m]}}$, где $\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_r \end{bmatrix}$, $\Lambda_k = \lambda_k E_k$, $\lambda_k \neq 0$. Поэтому $\operatorname{tr}(L_a)^m = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \operatorname{tr} L_{ii}(a^{[m]}) = 0$. Если след любой степени линейного оператора, действующего в конечномерном векторном пространстве над полем нулевой характеристики, равен нулю, то этот оператор нильпотентен. Отсюда получаем, что любой однородный элемент алгебры A нильпотентен. Тогда по теореме 1 алгебра A нильпотентна. $\square$

Из конечномерности алгебры A и предложения 1 легко вытекает

Теорема 3. *В конечномерной алгебре A ассоциативного типа существует наибольший однородный нильпотентный идеал N, причем фактор-алгебра A/N не содержит однородных нильпотентных идеалов.*

Этот факт позволяет ввести следующее

Определение 1. Наибольший двусторонний однородный нильпотентный идеал алгебры A ассоциативного типа будем называть *однородным радикалом* этой алгебры и обозначать $R_q(A)$.

Замечание. Однородный радикал $R_q(A)$ конечномерной алгебры ассоциативного типа A совпадает с суммой всех однородных левых (правых) нильпотентных идеалов.

Действительно, в силу конечномерности алгебры A сумму N всех однородных левых идеалов можно представить как конечную сумму левых однородных нильпотентных идеалов. Тогда в силу предложения 1 N нильпотентна.

Если I, J, K — однородные пространства в A, то $(IJ)K = I(JK)$. В частности, любые два пространства $I^{[m]}$ и $I^{[m]_1}$ совпадают, и их можно обозначить I^m. Рассмотрим левый однородный идеал NA. В силу условия $(NA)^m = N(AN)^{m-1}A \subset N^m A$ получаем нильпотентность идеала NA. Значит, $NA \subset N$, т. е. N — двусторонний нильпотентный однородный идеал. По определению радикала имеем $N \subset R_q$. С другой стороны, по определению идеала N выполняется обратное включение $R_q \subset N$. Итак, $N = R_q$.

Для описания структуры конечномерной алгебры ассоциативного типа с нулевым однородным радикалом воспользуемся техникой идемпотентов. Как и в случае ассоциативных алгебр, элемент $e \neq 0$ алгебры ассоциативного типа A назовем идемпотентным, если $e^2 = e$.

Предложение 2. *Пусть A — конечномерная алгебра ассоциативного типа. Тогда любой левый* (*правый*) *однородный нильпотентный идеал I содержит идемпотент.*

Доказательство. Используем индукцию по $\dim_k I$. Если $\dim_k I = 1$, то $I = I_\alpha$, $\alpha \in T$, $I_\alpha = I \cap A_\alpha$. Пусть $I = kx$. Тогда $x \cdot x = \mu x$ и $\mu \neq 0$, т. к. I ненильпотентен. Поэтому однородный элемент $\overline{x} = \mu^{-1} x$ удовлетворяет условию $\overline{x}^2 = \overline{x}$.

Предположим, что $I^2 \subsetneqq I$. Так как I ненильпотентен, то идеал I^2 также ненильпотентен, и по предположению индукции существует идемпотент $e \in I^2 \subset I$.

Пусть $I^2 = I$. Выберем базис $x_1, \dots, x_m$ в $I = \bigoplus_\alpha I_\alpha$, $I_\alpha = I \cap A_\alpha$, согласованный с градуировкой идеала I. Тогда, как в доказательстве теоремы 1, имеем $I = \sum_{j=1}^{m} I x_j$. Все левые идеалы

Ix_j не могут быть нильпотентными, т. к. в этом случае в силу предложения 1 идеал I также будет нильпотентным. Пусть Ix_s — ненулевой ненильпотентный идеал для некоторого s. Если $Ix_s \subsetneqq I$, то по предположению индукции в Ix_s существует однородный идемпотент. Рассмотрим случай, когда $Ix_s = I$. Тогда элемент x_s обладает свойством: если $y \in I$ и $yx_s = 0$, то $y = 0$. Действительно, возьмем базис идеала I, в котором первый базисный элемент есть y. Тогда $I = \langle y, y_2, \ldots, y_m \rangle$, а $Ix_s = \langle y_2x_s, \ldots, y_mx_s \rangle \neq I$. Из равенства $Ix_s = I$ вытекает существование такого однородного элемента $z \in I$, что $zx_s = x_s$. Умножая это равенство на z, имеем $z(zx_s) = zx_s$. Но $z(zx_s) = \lambda z^2 x_s$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \in k$, т. е. $(\lambda z^2 - z)x_s = 0$. В силу предыдущего замечания $\lambda z^2 - z = 0$. Следовательно, элемент $\overline{z} = \lambda z$ — однородный идемпотент. $\square$

В дальнейшем ненулевой левый однородный идеал L, не содержащий никаких левых однородных идеалов алгебры A, кроме O и L, будем называть минимальным левым однородным идеалом алгебры A ассоциативного типа.

Предложение 3. *Каждый ненильпотентный минимальный однородный левый идеал L алгебры ассоциативного типа A порождается однородным идемпотентом и выделяется прямым слагаемым в любом левом идеале, содержащем L.*

Доказательство. Если идеал L ненильпотентен, то в силу предложения 2 он содержит однородный идемпотент e. Тогда Ae — нулевой левый однородный идеал, содержащийся в L. Значит, $L = Ae$.

Так как $A = \bigoplus\limits_{\alpha \in T} A_\alpha$, то $L = \bigoplus\limits_{\alpha \in T} A_\alpha e$. Пусть $L_\alpha = A_\alpha e$, тогда $L_\alpha = \{x \in A_\alpha,\ xe = \lambda_\alpha x,\ \lambda_\alpha \in k,\ \lambda_\alpha \neq 0\}$. Действительно, любой элемент $y \in L_\alpha$ имеет вид $a_\alpha e$, $a_\alpha \in A_\alpha$. Поэтому $ye = (a_\alpha e)e = \lambda_\alpha a_\alpha e^2 = \lambda_\alpha a_\alpha e = \lambda_\alpha y$, где $\lambda_\alpha \neq 0$ и является общим для всех $y \in L_\alpha$.

Обозначим $L' = \bigoplus\limits_{\alpha \in T} L'_\alpha$, где $L'_\alpha = \{x \in A_\alpha,\ x = \lambda_\alpha a_\alpha - a_\alpha e,\ a_\alpha \in A_\alpha\}$. Тогда $L'_\alpha = \{x \in A_\alpha,\ xe = 0\}$. Очевидно, L' — левый однородный идеал в A и $L \cap L' = 0$, т. к. $L_\alpha \cap L'_\alpha = 0$. Каждый элемент $x_\alpha \in A_\alpha$ имеет вид $x_\alpha = \lambda_\alpha^{-1} x_\alpha e + (x_\alpha - \lambda_\alpha^{-1} x_\alpha e)$. Следовательно, $A = \sum\limits_{\alpha \in T} (L_\alpha \oplus L'_\alpha) = L \oplus L'$.

Если теперь I — левый однородный идеал A, содержащий L, то $I = L \oplus (L' \cap I)$. $\square$

Теорема 4. *Пусть A — конечномерная алгебра ассоциативного типа. Если $R_q A = 0$, то A является конечной прямой суммой минимальных левых однородных идеалов.*

Доказательство. Пусть I — минимальный левый однородный идеал в A. Так как $R_q A = 0$, то I ненильпотентен. В силу предложения 3 имеет место разложение $A = I_1 \oplus I'_1$, где I'_1 — некоторый левый однородный идеал, а $I_1 = I$. Если $I'_1 \neq 0$, то он содержит минимальный однородный левый ненильпотентный идеал I_2 такой, что $I'_1 = I_2 \oplus I'_2$, где I_2 — некоторый левый однородный идеал. Получаем строго убывающую последовательность идеалов $A \supset I'_1 \supset I'_2 \supset \cdots$. В силу конечномерности A существует такой номер m, что $I'_m = 0$. В результате имеем $A = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_m$ — разложение алгебры A в прямую сумму минимальных левых однородных идеалов. $\square$

Для дальнейшего описания структуры алгебр ассоциативного типа с нулевым однородным радикалом используем язык модулей.

Определение 2. Пусть G — полугруппа, а M — G-множество. Если $B = \bigoplus\limits_{\alpha \in T} B_\alpha$, $T \subset G$, $|T| < \infty$ — алгебра над полем k, $V = \bigoplus\limits_{\gamma \in S} V_\gamma$, $S \subset M$, $|S| < \infty$ — линейное пространство над полем k, то линейное отображение $f : B \to \mathrm{End}_k(V)$ будем называть представлением ассоциативного типа алгебры B в пространстве V, если

1) для $\alpha \in T$, $\gamma \in S : f(B_\alpha)V_\gamma \subset V_{\alpha\gamma}$ при $\alpha\gamma \in S$, либо $f(B_\alpha)V_\gamma = 0$ при $\alpha\gamma \notin S$;
2) для $\alpha, \beta \in T$, $\gamma \in S : f(b_\alpha b_\beta)v_\gamma = \lambda_{\alpha,\beta,\gamma} f(b_\alpha) f(b_\beta) v_\gamma$, когда $b_\alpha \in B_\alpha$, $b_\beta \in B_\beta$, $v_\gamma \in V_\gamma$, а $\lambda_{\alpha,\beta,\gamma} \in k$ и $\lambda_{\alpha,\beta,\gamma} \neq 0$.

В этом случае пространство V будем называть *B-модулем ассоциативного типа*, а соотношения 1) и 2) записывать в виде

1′) $B_\alpha V_\gamma \subset V_{\alpha\gamma}$, если $\alpha\gamma \in S$, $B_\alpha V_\gamma = 0$, если $\alpha\gamma \notin S$;
2′) $(b_\alpha b_\beta)v_\gamma = \lambda_{\alpha,\beta,\gamma} b_\alpha(b_\beta v_\gamma)$ для любых $\alpha, \beta \in T$, $\gamma \in S$.

Если $M = G$, $V = B$, а $f(b) = L_b$ — оператор левого умножения для $b \in B$, то B будет алгеброй ассоциативного типа. Или, рассматривая алгебру ассоциативного типа B как модуль над самой собой, назовем его левым регулярным B-модулем и обозначим ${}_B B$.

Подпространство $U = \bigoplus\limits_{\alpha\in S} U_\alpha$, $U_\alpha = U \cap V_\alpha$ будем называть *B-подмодулем* модуля V, если U является B-модулем в смысле приведенного определения.

Определение 3. B-модуль V ассоциативного типа вполне приводим, если для любого B-подмодуля ассоциативного типа W существует B-подмодуль ассоциативного типа U такой, что $V = W \oplus U$.

Используя стандартные рассуждения, легко доказать, что это определение равносильно разложению B-модуля ассоциативного типа в прямую сумму неприводимых подмодулей ассоциативного типа.[1] Таким образом, минимальные левые однородные идеалы в алгебре ассоциативного типа A — это в точности неприводимые подмодули левого регулярного A-модуля ассоциативного типа ${}_A A$.

Переформулируем теорему 4 в терминах левого регулярного модуля.

Теорема 4′. *Пусть A — конечномерная алгебра ассоциативного типа. Если $R_q A = 0$, то левый регулярный A-модуль ${}_A A$ вполне приводим.*

Пусть G — полугруппа, M и M' — два G-множества, $\pi : M \to M'$ — G-отображение. Если $V = \bigoplus\limits_{\gamma\in S} V_\gamma$, $S \subset M$, $|S| < \infty$ и $V' = \bigoplus\limits_{\gamma'\in S'} V_{\gamma'}$, $S' \subset M'$, $|S'| < \infty$ — два A-модуля ассоциативного типа над алгеброй ассоциативного типа $A = \bigoplus\limits_{\alpha\in T} A_\alpha$, $T \subset G$, $|T| < \infty$, то линейное отображение $\varphi_\pi : V \to V'$ будем называть qA-гомоморфизмом A-модуля V в A-модуль V', если

1) $\pi(S) \subset S'$ и для любого $\gamma \in S : \varphi_\pi(V_\gamma) \subset V'_{\pi\gamma}$;
2) для любых $\alpha \in T$, $\beta \in S$ существует такой ненулевой элемент $\lambda_{\alpha,\beta} \in k$, что $\varphi_\pi(ax) = \lambda_{\alpha,\beta} a \varphi_\pi(x)$, когда $a \in A_\alpha$, $x \in V_\beta$.

Если φ_π — биекция, то φ_π — qA-изоморфизм A-модулей ассоциативного типа.

Если рассматривать левые однородные идеалы алгебры A ассоциативного типа как A-модули, то условие qA-изоморфности для минимальных левых однородных идеалов выглядит точно так же, как соответствующее условие в случае ассоциативных алгебр.

Предложение 4. *Минимальные левые однородные идеалы I и I' qA-изоморфны тогда и только тогда, когда существует однородный элемент $a' \in A$ такой, что $I' = Ia'$.*

Доказательство. Если $I' = Ia'$, a' — однородный элемент из A, то соответствие $x \to xa'$, $x \in I$ является qA-изоморфизмом. Наоборот, пусть φ — qA-изоморфизм I на I'. Если $I = Ae$, где $e \in I_\beta = I \cap A_\beta$ — порождающий однородный идемпотент идеала I, то обозначим $\varphi(e)$ через a'. Тогда $\varphi(xe) = \lambda x \varphi(e)$, где $\lambda = \lambda_{\alpha,\beta} \in k$, $\lambda \neq 0$, когда $x \in I_\alpha = I \cap A_\alpha$. Как было отмечено при доказательстве предложения 3, $I_\alpha = \{x \in A_\alpha,\ xe = \lambda_\alpha x,\ \lambda_\alpha \neq 0,\ \lambda_\alpha \in k\}$. Поэтому $\varphi(x) = \varphi(\lambda_\alpha^{-1} xe) = \lambda_\alpha^{-1} \lambda x \varphi(e) = \mu x a'$, $\mu \neq 0$, $\mu \in k$, $x \in I_\alpha$, т. е. $\varphi(I) = Ia' = I'$. □

Следствие. Два минимальных левых однородных идеала I и I' qA-изоморфны тогда и только тогда, когда $II' = I'$.

[1]Неприводимый модуль ассоциативного типа — это модуль, не содержащий нетривиальных подмодулей ассоциативного типа.

Достаточно заметить, что для любого однородного элемента $a' \in I'$ либо $Ia' = 0$, либо $Ia' = I'$.

Определение 4. Алгебру ассоциативного типа назовем *однородно простой*, если она не содержит нетривиальных однородных двусторонних идеалов.

Теорема 5. *Пусть A — конечномерная алгебра ассоциативного типа, причем $R_qA = 0$. Тогда $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} A_i$, где A_i — однородно простая алгебра и двусторонний однородный идеал алгебры A. Кроме того, A_i есть сумма минимальных левых однородных идеалов, qA-изоморфных между собой.*

Доказательство теоремы основано на приведенном выше следствии и поэтому полностью повторяет рассуждения для ассоциативных алгебр (напр., [3]).

Пусть G — вполне упорядоченная полугруппа, т.е. для любых двух элементов $\alpha, \beta \in G$ либо $\alpha < \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha > \beta$. Причем если $\alpha < \beta$, то $\gamma\alpha < \gamma\beta$ и $\alpha\gamma < \beta\gamma$, $\gamma \in G$. Элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, составляющие конечное множество $T \subset G$, будем считать упорядоченными в соответствии с их номерами: $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r$. Обозначим $A_{(i)} = \bigoplus\limits_{\alpha_j \geq \alpha_i} A_{\alpha_j}$, $A^{(i)} = A_{(i)}/A_{(i+1)}$, $i = 1, \ldots, r$, $A_{(r+1)} = 0$. Тогда пространство $\operatorname{gr} A = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} A^{(i)}$ назовем *ассоциированной градуированной алгеброй для алгебры* A, причем умножение в $\operatorname{gr} A$ определено по формуле

$$(a_{\alpha_i} + A_{(i+1)})(a_{\alpha_j} + A_{(j+1)}) = a_{\alpha_i} a_{\alpha_j} + A_{(k)},$$

где $a_{\alpha_i} \in A_{\alpha_i}$, $a_{\alpha_j} \in A_{\alpha_j}$, а k — номер элемента β, следующего за произведением $\alpha_i\alpha_j$.

Если I — (левый, правый, двусторонний) идеал в A, то $\operatorname{gr} I$ — (левый, правый, двусторонний) идеал в $\operatorname{gr} A$, где $\operatorname{gr} I = \bigoplus\limits_{k=1}^{r} I^{(k)}$, $I^{(k)} = I_{(k)}/I_{(k+1)}$, $I_{(k)} = I \cap A_{(k)}$.

Так как $\operatorname{gr} A \cong A$, то получаем, что пространство $\operatorname{gr} I$, отождествляемое с пространством I_{gr}, натянутом на младшие члены идеала I, является однородным идеалом в A, причем $\dim_k I_{\mathrm{gr}} = \dim_k I$.

Определение 5. Алгебра A ассоциативного типа *полупроста*, если она не имеет нетривиальных нильпотентных двусторонних идеалов, и *проста*, если она не имеет нетривиальных двусторонних идеалов.

Если полугруппа G, входящая в определение алгебры A ассоциативного типа, вполне упорядочена, то полупростота алгебры A равносильна тому, что $R_qA = 0$. Действительно, в силу предыдущих построений наличие нетривиального нильпотентного двустороннего идеала в алгебре ассоциативного типа A приводит к существованию нетривиального однородного нильпотентного двустороннего идеала в A. Из этих же соображений (при условии полной упорядоченности полугруппы G) следует, что однородно простая алгебра ассоциативного типа является простой.

Эти замечания позволяют переформулировать теорему 5 следующим образом.

Теорема 5$'$. *Пусть A — конечномерная алгебра ассоциативного типа, причем полугруппа G вполне упорядочена. Если A полупроста, то $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} A_i$, где A_i — простая алгебра и двусторонний однородный идеал алгебры A.*

Следующий пример показывает, что существует определенная связь между простыми алгебрами ассоциативного типа и простыми ассоциативными алгебрами.

Рассмотрим алгебру Витта W_1. Это простая алгебра Ли, определенная над простым полем F_p с базисом $e_0, e_1, \ldots, e_{p-1}$ и таблицей умножения $[e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j}$, $i, j \in F_p$.

Обозначим через B свободный $\mathbb{Z}$-модуль с базисом b_i, $i \in F_p$. Превратим B в алгебру над $\mathbb{Z}$, полагая $b_i b_j = \overline{j} b_{i+j}$, $\overline{j} \in \mathbb{Z}$, $1 \leq \overline{j} \leq p$, $\overline{j} \cdot 1_{F_p} = j$. Легко видеть, что $F_p \otimes_{\mathbb{Z}} B_L \cong W_1$, где B_L — коммутаторная алгебра для B, т.е. $B_L = \{b \in B,\ [b, b'] = bb' - b'b,\ b, b' \in B\}$.

Алгебра $\widehat{B}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}\underset{\mathbb{Z}}{\otimes} B$ является простой алгеброй ассоциативного типа над $\mathbb{Q}$. Действительно, градуировка в алгебре $\widehat{B}$ определяется группой F_p^+ (группа поля F_p по сложению). Каждое пространство градуировки $\widehat{B}_i$, $i \in F_p$, одномерно и совпадает с $\mathbb{Q}\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Z}b_i$. Пусть $\widehat{b}_i = 1_{\mathbb{Q}}\underset{\mathbb{Z}}{\otimes} b_i$. Тогда $(\widehat{b}_i\widehat{b}_j)\widehat{b}_k = \lambda_{ijk}\widehat{b}_i(\widehat{b}_j\widehat{b}_k)$, если $\lambda_{ijk} = \overline{j}/\overline{j+k}$.

Проверим простоту алгебры $\widehat{B}$. Если I — ненулевой двусторонний идеал в $\widehat{B}$, то $I = \mathbb{Q}\underset{\mathbb{Z}}{\otimes} I_1$, где I_1 — двусторонний идеал в B, причем $I_1 \not\equiv 0 \pmod{pB}$. Тогда I_1 — идеал в коммутаторной алгебре B_L с указанным выше условием. Следовательно, $F_p \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} I_1$ — ненулевой идеал в W_1, что противоречит простоте алгебры Витта.

Обозначим через $L(\widehat{B})$ подпространство в $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\widehat{B})$, состоящее из операторов левых умножений на элементы $\widehat{B}$, а $A = \mathrm{Ass}(L(\widehat{B}))$ — ассоциативная подалгебра в $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\widehat{B})$, порожденная пространством $L(\widehat{B})$. Алгебра $\widehat{B}$ является неприводимым A-модулем. Действительно, пусть V — нетривиальный A-подмодуль в $\widehat{B}$. Если $v = \sum\limits_{i=0}^{p-1}\alpha_i\widehat{b}_i \equiv 0 \pmod V$, $v \neq 0$, то $L^k_{\hat{b}_0} v = \sum\limits_{i=0}^{p-1}\overline{i}^k\alpha_i\widehat{b}_i \equiv 0 \pmod V$, $k = 1,\dots,p-1$. Так как определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ p & 1 & 2 & \dots & p-1 \\ p^2 & 1^2 & 2^2 & \dots & (p-1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^{p-1} & 1^{p-1} & 2^{p-1} & \dots & (p-1)^{p-1} \end{vmatrix}$$

не равен нулю, то $\alpha_i\widehat{b}_i \in V$ для любого $i = 0,1,\dots,p-1$. Из нетривиальности v следует, что $\alpha_j \neq 0$ для некоторого j, т. е. $\widehat{b}_j \in V$. Наконец из формулы $\widehat{b}_i\widehat{b}_j = \overline{j}\,\widehat{b}_{i+j}$ получим, что все $\widehat{b}_i \in V$. По лемме Шура отсюда следует, что $\mathrm{End}_A(\widehat{B})$ — тело.

Проверим, что $\mathrm{End}_A(\widehat{B}) = \mathbb{Q}E$, E — тождественный оператор. Пусть $X \in \mathrm{End}_A(\widehat{B})$. Тогда из условия $[X, L_{\hat{b}_0}] = 0$ следует, что $X = \sum\limits_{i=0}^{p-1} x_{ii}E_{ii}$. (Здесь E_{ij} — матричные единицы, а нумерация строк и столбцов согласована с нумерацией базисных элементов $\widehat{b}_i$, $i = 0,1,\dots,p-1$.) Из соотношения $[X, L_{\hat{b}_1}] = 0$ получаем $x_{00} = x_{11} = \dots = x_{p-1,p-1}$, т. е. $X = qE$, $q \in \mathbb{Q}$.

По теореме Веддерберна [4] имеем $A = \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\widehat{B})$. Обозначим через $D = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{bmatrix},\ \lambda_i \in \mathbb{Q} \right\}$ подалгебру диагональных матриц в алгебре всех матриц M_p порядка p, которую будем отождествлять с $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\widehat{B})$. Соотношение, определяющее тот факт, что алгебра $\widehat{B}$ есть алгебра ассоциативного типа над $\mathbb{Q}$, можно записать в терминах операторов левого умножения. А именно, $L_{\hat{b}_i}L_{\hat{b}_j} = dL_{\hat{b}_i\hat{b}_j}$, $d \in D$, где операторы $L_{\hat{b}_s}$ отождествляем с матрицами этих операторов в базисе $\widehat{b}_0, \widehat{b}_1, \dots, \widehat{b}_{p-1}$. Из последнего равенства вытекает $A \subset DL(\widehat{B})$. А поскольку $A = \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\widehat{B})$, то $DL(\widehat{B}) = M_p$. Замечая, наконец, что пространства $\widehat{B}$ и $L(\widehat{B})$ изоморфны, подытожим проведенные рассуждения.

Предложение 5. *Пусть $B = \bigoplus\limits_{i\in F_p}\mathbb{Z}b_i$ — алгебра над $\mathbb{Z}$ с умножением вида $b_ib_j = \overline{j}b_{i+j}$, $i,j \in F_p$, $\overline{j} \in \mathbb{Z}$, $1 \le \overline{j} \le p$, $\overline{j}\cdot 1_{F_p} = j$. Тогда $\widehat{B} = \mathbb{Q}\underset{\mathbb{Z}}{\otimes} B$ — простая алгебра ассоциативного типа над $\mathbb{Q}$, причем $DL(\widehat{B}) = M_p$, где $L(\widehat{B})$ — пространство матриц операторов левого умножения алгебры $\widehat{B}$ в базисе $\widehat{b}_i$, $i \in F_p$, изоморфное пространству $\widehat{B}$, M_p — алгебра всех матриц размера p, D — подалгебра диагональных матриц в M_p.*

Литература

1. Bahturin Y., Zaicev M. *Identities of graded algebras* // J.Algebra. – 1998. – V. 205. – № 1. – P. 1–12.
2. Бахтурин Ю.А., Зайцев М.В., Сегал С.К. *G-тождества неассоциативных алгебр* // Матем. сб. – 1999. – Т. 190. – № 11. – С. 3–14.
3. Кэртис Ч., Райнер И. *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.* – М.: Наука, 1969. – 668 с.
4. Ленг С. *Алгебра.* – М.: Мир, 1968. – 564 с.

Казанский государственный университет

Поступила 30.09.2004