Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2012, №3, с. 51–61 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421200123\0031*

О.В. ЦОКОЛОВА

НЕГОЛОНОМНЫЕ ТОРСЫ 1-ГО РОДА

Аннотация. В трехмерном евклидовом пространстве рассматриваются двумерные неголономные распределения, имеющие нулевую полную кривизну 1-го рода, называемые неголономными торсами 1-го рода. Исследована геометрия двух видов: 1) одна из главных кривизн 1-го рода не равна нулю (общий случай), 2) обе главные кривизны 1-го рода равны нулю (неголономная плоскость). В случае 2) получен результат в целом. В исследованиях используется метод внешних форм Картана [1] с привлечением канонического подвижного репера.

Ключевые слова: неголономная геометрия, распределение, уравнение Пфаффа, векторное поле.

УДК: 514.752

Введение

Двумерное распределение на E_3 (или в области $G \subset \mathbf{E}_3$) — это гладкое отображение Δ, сопоставляющее $\forall M \in E_3$ двумерную плоскость π, проходящую через M ([2], с. 683). По распределению Δ однозначно определяется уравнение Пфаффа. Распределение называется голономным, если определяемое им уравнение Пфаффа вполне интегрируемо. В этом случае пространство E_3 (или его область G) расслаивается на однопараметрическое семейство поверхностей. Если же данное уравнение Пфаффа не является вполне интегрируемым, то распределение называется неголономным ([3], с. 13), а его интегральные кривые называются кривыми распределения. Все кривые распределения, проходящие через точку M, касаются в этой точке плоскости π. Пару (M, π) называют плоским элементом, π — плоскостью распределения в точке M. Множество всех плоских элементов (M, π) ("график" распределения) образует трехмерное многообразие, что позволяет в исследованиях использовать метод внешних форм Картана. Прямая, проходящая через M ортогонально π, называется нормалью распределения в точке M. Все нормали распределения образуют комплекс прямых.

Важная область применения неголономной геометрии — динамика механических систем с неголономными связями. А так как теория распределений тесно связана с геометрией векторного поля единичных векторов нормалей, то она может быть использована также во всех приложениях, где такие поля возникают. Поэтому решение конкретных задач по неголономной геометрии актуально.

Предварительные сведения

К каждому элементу (M, π) присоединим ортонормированный репер $(M, \overline{e_i})$ $(i = 1, 2, 3)$. Пусть $\overline{r}$ — радиус-вектор точки M, а $\overline{e_3}$ — единичный вектор нормали распределения в

Поступила 23.01.2011

точке M. Деривационные формулы репера запишем в виде

$$\begin{aligned} d\overline{r} &= \omega^i \overline{e_i}, \\ d\overline{e_i} &= \omega_i^j \overline{e_j}, \end{aligned} \tag{0.1}$$

где $\omega_i^j = -\omega_j^i$ и, кроме того, формы Пфаффа ω^i, ω_i^j подчиняются уравнениям структуры евклидова пространства

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^j \wedge \omega_j^i, \\ d\omega_i^j &= \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \end{aligned} \tag{0.2}$$

$(i,j,k = 1,2,3)$. Формы Пфаффа ω^i, ω_3^i — главные формы ([1], с. 288). Так как множество плоских элементов (M,π) является трехмерным многообразием, то ω^i образуют базис, а ω_3^i будут их линейными комбинациями

$$\omega_3^i = A_j^i \omega^j. \tag{0.3}$$

Матрица $\left(A_j^i\right) = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ совпадает с матрицей линейного оператора A, определяемого формулой $A\left(d\overline{r}\right) = d\overline{e_3}$ и называемого основным линейным оператором ($d\overline{r}$ — касательный вектор в точке M любой регулярной кривой, проходящей через M).

При данном выборе репера по распределению $\Delta : M > \pi$ однозначно определяется уравнение Пфаффа

$$\omega^3 = 0. \tag{0.4}$$

(По терминологии Г.Ф. Лаптева [4] уравнение (0.4) называется ассоциированным с данным распределением, а (A_j^i) — фундаментальным объектом.)

Найдем условие, при котором уравнение (0.4) вполне интегрируемо. Используя (0.2) и (0.3) находим $d\omega^3 \wedge \omega^3 = (-A_2^1 + A_1^2)\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$, т. е. (0.4) — вполне интегрируемое уравнение лишь тогда, когда $A_2^1 = A_1^2$.

Скаляр $\rho = A_2^1 - A_1^2$ *называется скаляром неголономности.*

Таким образом, распределение Δ *голономно тогда и только тогда, когда скаляр неголономности* $\rho\Delta = A_2^1 - A_1^2 = 0$.

Заметим, что оператор A всякий вектор плоскости π отображает в вектор этой плоскости. Поэтому можно говорить о линейном операторе A^*, представляющем собой сужение A на плоскость π. Матрица оператора A^* в базисе $(\overline{e}_1, \overline{e}_2)$ имеет вид

$$A^*{}_{(e)} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}.$$

Если распределение Δ голономно, то оператор A^* симметричен и совпадает в точке M с оператором Вейнгартена той интегральной поверхности, которая проходит через данную точку. Если же Δ не голономно (а именно этот случай мы и рассматриваем), то A^* не симметричен и потому его можно представить в виде суммы двух операторов B^* и B, где B^* — симметричный оператор с матрицей

$$B^*{}_{(e)} = \begin{pmatrix} A_1^1 & \frac{A_2^1 + A_1^2}{2} \\ \frac{A_2^1 + A_1^2}{2} & A_2^2 \end{pmatrix},$$

а B — кососимметрический оператор с матрицей

$$B_{(e)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\rho}{2} \\ -\frac{\rho}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение 1. Собственные значения оператора A^*, взятые с противоположными знаками, называются главными кривизнами 2-го рода, а его собственные векторы — главными направлениями 2-го рода распределения Δ в точке M.

Определение 2. Собственные значения оператора B^*, взятые с противоположными знаками, называются главными кривизнами 1-го рода, а его собственные векторы — главными направлениями 1-го рода распределения Δ в точке M.

Заметим, что главные кривизны 1-го рода — это экстремальные значения нормальных кривизн кривых распределения, проходящих через данную точку ([5], с. 19).

Главные кривизны 1-го и 2-го рода обозначим, соответственно, $k_1^{(1)}$, $k_2^{(1)}$ и $k_1^{(2)}$, $k_2^{(2)}$. Величины $K_1 = k_1^{(1)}k_2^{(1)}$ и $K_2 = k_1^{(2)}k_2^{(2)}$ — полные кривизны 1-го и 2-го рода; $H = \frac{k_1^{(1)}+k_2^{(1)}}{2} = \frac{k_1^{(2)}+k_2^{(2)}}{2}$ — средняя кривизна. Полные кривизны связаны соотношением

$$K_2 = K_1 + \frac{\rho^2}{4},$$

т. е. полные кривизны совпадают лишь для голономных распределений ([6], с. 74; [5], с. 37).

1. Неголономные торсы

Полная кривизна первого рода (K_1) и полная кривизна 2-го рода (K_2) являются важнейшими инвариантами распределениями. Они совпадают, как только что отметили, лишь тогда, когда Δ голономно. При этом $K_2 = K_1$ — гауссова кривизна в точке M той интегральной поверхности уравнения Пфаффа $\omega^3 = 0$, которая через эту точку проходит. Поверхности нулевой гауссовой кривизны – это развертывающиеся поверхности (или торсы), т. е., если Δ — голономно и для него $K_2 = K_1 = 0$, то имеем слоение ([2], с. 683), слоями которого будут торсы.

В неголономном случае ($\rho \neq 0$) никакого слоения нет.

При $K_1 = 0$ ($K_2 \neq 0$) и $K_2 = 0$ ($K_1 \neq 0$) получаем неголономные распределения с различной геометрией.

Определение 3. Неголономным торсом 1-го рода (НТ-1) называется гладкое двумерное распределение Δ на E_3, для которого полная кривизна 1-го рода равна нулю ($K_1 = 0$). (Величина неголономности $\rho \neq 0$.)

Определение 4. Неголономным торсом 2-го рода (НТ-2) называется гладкое двумерное распределение Δ на E_3, для которого полная кривизна 2-го рода равна нулю ($K_2 = 0$). (Величина неголономности $\rho \neq 0$.) Такие распределения рассматриваются в [5].

В данной работе рассматриваются НТ-1, для которых $K_1 = 0$, $K_2 \neq 0$.

Так как $K_1 = k_1^{(1)}k_2^{(1)}$, то возможны два случая:

1) одна из главных кривизн первого рода равна нулю, вторая — отлична от нуля (например, $k_1^{(1)} = 0$, $k_2^{(1)} \neq 0$);

2) обе главные кривизны первого рода равны нулю ($k_1^{(1)} = k_2^{(1)} = 0$). Во втором случае средняя кривизна H для НТ-1 равна нулю. Поэтому такие *НТ-1 можно называть минимальными (или неголономными плоскостями), так как в голономном случае мы имеем слоение, состоящее из плоскостей.*

Важно заметить, что для кривой неголономного распределения, проходящей через точку M, определяется нормальная кривизна k_n как проекция ее вектора кривизны на нормаль распределения. Для нее имеет место формула

$$k_n = k_1^{(1)} \cos^2 \alpha + k_2^{(1)} \sin^2 \alpha,$$

аналогичная формуле Эйлера для поверхности, только главные кривизны поверхности здесь заменены главными кривизнами 1-го рода ([5], с. 22). Это позволяет устанавливать тип точки распределения (эллиптический, гиперболический, параболический) по значению полной кривизны первого рода (K_1) ([5], с. 20). *Так как для НТ-*1 (*и только для них*) $K_1 = 0$, то все точки НТ-1 — это точки параболического типа.

Переходим к рассмотрению геометрии не минимальных НТ-1.

2. Канонический репер НТ-1 общего вида

Так как для НТ-1 общего вида главные кривизны 1-го рода различны ($k_1^{(1)} = 0$, $k_2^{(1)} \neq 0$), т. е. различны собственные значения симметричного линейного оператора B^*, то, следовательно, имеем два взаимно ортогональных направления 1-го рода. Чтобы получить канонический репер для НТ-1 достаточно направить вектор $\overline{e_1}$ по главному направлению 1-го рода, соответствующему кривизне $k_1^{(1)} \neq 0$. Тогда $A_2^1 + A_1^2 = 0$, $A_2^2 = 0$. Отсюда $\rho = 2A_2^1$, $k_1^{(1)} = -A_1^1$, $2H = k_1^{(1)}$. Кроме того, находим вектор кривизны $k\overline{n}$ линии тока $\omega^1 = \omega^2 = 0$ нормалей НТ-1 в точке M. Получаем $k\overline{n} = A_3^1\overline{e_1} + A_3^2\overline{e_2}$. Обозначим $A_3^1 = a$, $A_3^2 = b$. После этого формулы (0.3) приобретают вид

$$\begin{aligned} \omega_3^1 &= -2H\omega^1 + \frac{\rho}{2}\omega^2 + a\omega^3, \\ \omega_3^2 &= -\frac{\rho}{2}\omega^1 + b\omega^3, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где H — средняя кривизна НТ-1, ρ — скаляр неголономности, a и b — проекции вектора кривизны линии тока нормалей распределения на касательные к линиям кривизны 1-го рода.

Внешнее дифференцирование форм (2.1) приводит к системе

$$\begin{aligned} 4H\omega_1^2 &= \left(\mu_{12} + \frac{\gamma_{11}}{2}\right)\omega^1 + (b\rho + \mu_{22})\,\omega^2 + \left(2ab + \mu_{23} + \frac{\gamma_{13}}{2}\right)\omega^3, \\ 2dH &= \mu_{11}\omega^1 + (\mu_{12} + a\rho)\,\omega^2 + \left(\mu_{13} + 4H - \frac{\rho^2}{4} + a^2\right)\omega^3, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$d\rho = \left(\frac{\gamma_{11}}{2} - \mu_{12}\right)\omega^1 + (b\rho - \mu_{22})\,\omega^2 + \left(\frac{\gamma_{13}}{2} + 2\rho H - \mu_{23}\right)\omega^3,$$

$$da = \left(\frac{\gamma_{11}b}{8H} + \frac{\mu_{12}b}{4H} - \mu_{13}\right)\omega^1 + \left(\frac{b^2\rho}{4H} + \frac{b\mu_{22}}{4H} - \mu_{23}\right)\omega^2 + \left(\frac{ab^2}{2H} + \frac{8\gamma_{13}}{8H} + \frac{b\mu_{23}}{4H} - \mu_{33}\right)\omega^3,$$

$$\begin{aligned} 4Hdb = \left(-\frac{a\gamma_{11}}{2} - 2H\gamma_{13} - a\mu_{12}\right)\omega^1 + \left(4Hb^2 - ab\rho - H\rho^2 - a\mu_{22}\right)\omega^2 + \\ + \left(-2a^2b + \frac{\gamma_{13}}{2} - 2H\gamma_{33} + \mu_{23}\right)\omega^3. \end{aligned}$$

Формулы (2.1) и (2.2) являются основными для НТ-1.

3. Асимптотические линии и линии кривизны 1-го рода для НТ-1

Определение 5. Асимптотической линией распределения называется линия, для которой нормальная кривизна k_n в каждой ее точке равна нулю ([6], с. 18; [5], с. 42).

Необходимым и достаточным условием того, чтобы линия распределения была асимптотической, является совпадение в каждой ее точке соприкасающейся плоскости с плоскостью распределения, либо чтобы эта линия была прямой.

Найдем уравнения асимптотических линий. Для них $\left(d^2\overline{r}, \overline{e_1},\ \overline{e_2}\right) = 0$. Используя формулы (0.1) и то, что асимптотическая линия является интегральной кривой уравнения Пфаффа $\omega^3 = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \left(\omega^1\right)^2 &= 0, \\ \omega^3 &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Отсюда следует, что через каждую точку M проходит одна асимптотическая линия. Это подтверждает тот факт, что для НТ-1 всякая точка будет точкой параболического типа. Используя формулы (0.1), (2.1), (2.2) вычислим кривизну (k_a) и кручение ($\varkappa_a$) асимптотической линии

$$\begin{aligned} k_a &= \frac{b\rho + \mu_{22}}{4H}, \\ \varkappa_a &= \frac{\rho}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, единственная асимптотическая линия НТ-1, проходящая через точку M, представляет собой пространственную кривую с кручением равным половине скаляра неголономности.

Определение 6. Линией кривизны 1-го рода называется линия распределения, для которой касательная в каждой точке направлена по главному направлению 1-го рода ([6], с. 48; [5], с. 19).

Так как векторы $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ канонического репера направлены по главным направлениям 1-го рода, то уравнения линий кривизны 1-го рода имеют вид

$$\begin{aligned} \omega^1\omega^2 &= 0, \\ \omega^3 &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Сравнивая (3.2) и (3.1) заключаем, что асимптотическая линия совпадает с одной из линий кривизны 1-го рода.

Предложение 1. *Нормали НТ-1 вдоль асимптотической линии образуют косую линейчатую поверхность, для которой данная асимптотическая линия является горловой линией.*

Доказательство. Нормали НТ-1 вдоль асимптотической образуют линейчатую поверхность. Покажем, что она представляет собой косую линейчатую поверхность. Для этого вычисляем $(d\overline{r}, \overline{e_3}, d\overline{e_3})$ при условии (3.1). Получаем

$$(d\overline{r}, \overline{e_3}, d\overline{e_3}) = \frac{\rho}{2}\left(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\right)\left(\omega^2\right)^2 \neq 0.$$

Последнее неравенство характеризует косую линейчатую поверхность. Кроме того, для асимптотической (3.1) имеем $(d\overline{r}, d\overline{e_3}) = 0$. Последнее означает, что асимптотическая является горловой линией для данной косой линейчатой поверхности. □

4. Линии кривизны 2-го рода для НТ-1

Определение 7. Линией кривизны 2-го рода называется линия распределения, для которой касательная в каждой ее точке направлена по главному направлению 2-го рода ([6], с. 49; [5], с. 36).

Предложение 2. *Линия распределения является линией кривизны 2-го рода тогда и только тогда, когда вдоль нее нормали распределения образуют торс.*

Доказательство. Находим главные направления 2-го рода. Они являются направлениями собственных векторов оператора A^*. Собственные значения для A^* — это корни уравнения

$$\begin{vmatrix} -2H-\lambda & \frac{\rho}{2} \\ -\frac{\rho}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем $\lambda_{1,2} = -H \pm \sqrt{H^2 - \frac{\rho^2}{4}}$. Следовательно, собственные векторы A^* — это векторы $(\xi^1,\ \xi^2, 0)$, для которых

$$\rho\xi^1 + \left(2H \pm \sqrt{4H^2-\rho^2}\right)\xi^2 = 0.$$

Таким образом, уравнения

$$\begin{aligned} \rho\omega^1 + \left(2H \pm \sqrt{4H^2-\rho^2}\right)\omega^2 &= 0, \\ \omega^3 &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \rho\big(\omega^1\big)^2 - 4H\omega^1\omega^2 + \rho\big(\omega^2\big)^2 &= 0, \\ \omega^3 &= 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

определяют линии кривизны второго рода. С другой стороны, для линий, вдоль которых нормали НТ-1 образуют торс, должно выполняться условие $(d\overline{r}, \overline{e_3}, d\overline{e_3}) = 0$. Подставив значение $d\overline{r}$ и $d\overline{e_3}$, получаем (4.1). Таким образом вдоль линий кривизны 2-го рода нормали распределения образуют торс. □

Заметим, что через каждую точку M НТ-1 может проходить две либо одна линии кривизны 2-го рода. Но может и вообще не быть вещественных линий кривизны 2-го рода. Это зависит от значения разности $4H^2 - \rho^2$. В частности, если через M проходит лишь одна линия кривизны 2-го рода ($2H = \pm\rho$), то эта линия делит пополам один из углов между линиями кривизны 1-го рода.

Заметим также, что НТ-1, для которых $H = 0$ (или, все равно, что $k_1^{(1)} = k_2^{(1)} = 0$) не имеют линий кривизны 2-го рода.

5. Эквидирекционные линии векторного поля нормалей НТ-1

Определение 8. Эквидирекционной линией (поверхностью) векторного поля нормалей распределения называется линия (поверхность), вдоль которой векторы поля параллельны ([7], с. 32).

Теорема 1. *Через каждую точку M области определения ($G \subset E_3$) векторного поля нормалей HT-1 проходит только одна эквидирекционная линия, не являющаяся линией HT-1.*

Доказательство. Вектор $\overline{e_3}$ направлен по нормали НТ-1. Находим линии вдоль которых векторы $\overline{e_3}$ параллельны. Так как $|\overline{e_3}| = 1$, то $d\overline{e_3} = 0$. Отсюда $\omega_3^1 = \omega_3^2 = 0$ или

$$\begin{aligned} 2H\omega^1 - \frac{\rho}{2}\omega^2 - a\omega^3 &= 0, \\ \frac{\rho}{2}\omega^1 + b\omega^3 &= 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Так как $\begin{vmatrix} 2H & -\frac{\rho}{2} \\ \frac{\rho}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\rho^2}{4} \neq 0$, то ранг системы (5.1) равен двум. Это означает, что через каждую точку M проходит единственная интегральная кривая системы (5.1), которая представляет собой эквидирекционную линию поля нормалей $\overline{e_3}$. При этом она не является линией НТ-1, так как все линии НТ-1 — это интегральные кривые уравнения $\omega^3 = 0$. $\square$

Переходим к рассмотрению НТ-1, для которых $k_1^{(1)} = k_2^{(1)} = 0$.

6. Неголономная плоскость

Определение 9. Неголономной плоскостью называется такой НТ-1, для которого обе главные кривизны 1-го рода равны нулю ($k_1^{(1)} = k_2^{(1)} = 0$).

Название неголономная плоскость происходит потому, что в голономном случае мы имеем слоение, слоями которого являются плоскости.

Кроме того, если для НТ-1 обе главные кривизны 1-го рода нули, то и средняя кривизна $\mathrm{H} = \frac{\mathrm{k}_1^{(1)} + \mathrm{k}_2^{(1)}}{2}$ равна нулю. Поэтому неголономную плоскость можно также назвать минимальным НТ-1.

Напомним, что главные кривизны 1-го рода отличаются от собственных значений симметричного оператора B^* лишь знаком. Для неголономной плоскости они равны, поэтому всякое направление плоскости π будет главным направлением 1-го рода. Это в свою очередь, означает, что через каждую точку M проходит бесконечно много линий кривизны 1-го рода. Следовательно репер, построенный для не минимального НТ-1 в данном случае не будет каноническим. Для построения канонического репера неголономной плоскости найдем главную нормаль линии тока векторного поля нормалей $\{\overline{\mathrm{e}}_3\}$. Ее направляющим вектором будет вектор $a\overline{e_1} + b\overline{e_2}$. Направим вектор $\overline{\mathrm{e}}_1$по главной нормали линии тока векторного поля $\overline{\{e_3\}}$. Тогда $b = 0$. И если учесть, что для неголономной плоскости $\mathrm{H} = 0$, то формулы (2.1) примут вид

$$\begin{aligned} \omega_3^1 &= \frac{\rho}{2}\omega^2 + a\omega^3, \\ \omega_3^2 &= -\frac{\rho}{2}\omega^1. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Для неголономной плоскости уравнение $\left(d^2\overline{r}, \overline{e_1}, \overline{e_2}\right) = 0$, определяющие асимптотические линии в силу (6.1)превращается в тождество. Таким образом, всякая линия неголономной плоскости является асимптотической линией.

Так как для неголономной плоскости $\mathrm{H} = 0$ (см. раздел 4), то она не имеет линий кривизны 2-го рода.

Теорема 2. *В* $\mathbf{E_3}$ *существует единственная неголономная плоскость* (*с точностью до движения евклидова пространства*).

Доказательство. Дифференцируем внешним образом (6.1) и затем применяем лемму Картана ([3], с. 101), получаем

$$\begin{aligned} d\rho &= 2\rho\left(a\omega^1 + \beta\omega^2\right), \\ da &= \left(a^2 - \frac{\rho^2}{4}\right)\omega^1 + \beta\omega^2 + \lambda\omega^3, \\ a\omega_2^1 &= \beta\omega^1 + \frac{\rho^2}{4}\omega^2 + \gamma\omega^3. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Внешнее дифференцирование равенств (6.2) приводит к условиям $\beta = \lambda = 0$, $\gamma = \frac{a\rho}{2}$. После этого система (6.2) перепишется в виде

$$\begin{aligned} d\rho &= 2a\rho\omega^1, \\ da &= \left(a^2 - \frac{\rho^2}{4}\right)\omega^1, \\ a\omega_2^1 &= \frac{\rho^2}{4}\omega^2 + \frac{a\rho}{2}\omega^3. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Так как $d\omega^1 = 0$, то можно положить

$$\omega^1 = dw. \tag{6.4}$$

Тогда из первых двух уравнений системы (6.3) находим

$$\rho = \frac{-4}{4w^2+1}, \quad a = \frac{-4w}{4w^2+1}. \tag{6.5}$$

Далее, так как $d\left(\frac{1}{2W}\sqrt{4w+1}\omega^2\right) = 0$, то можно положить $\frac{1}{2W}\sqrt{4w^2+1}\omega^2 = du$. Следовательно,

$$\omega^2 = \frac{2W}{\sqrt{4W^2+1}}du. \tag{6.6}$$

Ищем функции λ_2, λ_3, для которых выполнялось бы равенство

$$d\left(\lambda_2\omega^2 + \lambda_3\omega^3\right) = 0.$$

Такие функции существуют и имеют вид

$$\lambda_2 = \frac{1}{w\sqrt{4w^2+1}}, \quad \lambda_3 = \frac{2}{\sqrt{4w^2+1}}.$$

Положим $\lambda_2\omega^2 + \lambda_3\omega^3 = dv$. Тогда

$$\omega^3 = \frac{1}{2}\sqrt{4w^2+1}dv - \frac{1}{\sqrt{4W^2+1}}du. \tag{6.7}$$

Используя формулы (6.1), (6.3)–(6.7), находим

$$\begin{aligned} d\overline{r} &= dw\overline{e_1} + \frac{2wdu}{\sqrt{4w^2+1}}\overline{e_2} + \left(\frac{1}{2}\sqrt{4w^2+1}dv - \frac{1}{\sqrt{4w^2+1}}du\right)\overline{e_{3,}} \\ d\overline{e_1} &= \frac{1}{\sqrt{4W^2+1}}dv\overline{e_2} + \frac{2W}{\sqrt{4W^2+1}}dv\overline{e_{3,}} \\ d\overline{e_2} &= -\frac{1}{\sqrt{4w^2+1}}dv\overline{e_1} - \frac{1}{4w^2+1}dt\overline{e_{3,}} \\ d\overline{e_3} &= -\frac{2w}{\sqrt{4w^2+1}}dv\overline{e_1} + \frac{1}{4w^2+1}dw\overline{e_{2.}} \end{aligned} \tag{6.8}$$

Интегрируя систему (6.8), получим

$$\begin{aligned}
\overline{e_1} &= \overline{\varepsilon_1}\cos v - \overline{\varepsilon_2}\sin v\ ,\\
\overline{e_2} &= \frac{1}{\sqrt{4w^2+1}}\left(-\overline{\varepsilon_1}\cos v - \overline{\varepsilon_2}\sin v\right) + \frac{2w}{\sqrt{4w^2+1}}\overline{\varepsilon_3},\\
\overline{e_3} &= \frac{2w}{\sqrt{4w^2+1}}\left(-\overline{\varepsilon_1}\cos v - \overline{\varepsilon_2}\sin v\right) - \frac{1}{\sqrt{4w^2+1}}\overline{\varepsilon_3},\\
\overline{r} &= \left(\overline{\varepsilon_1}\cos v - \overline{\varepsilon_2}\sin v\right) w + \left(u - \frac{1}{2}v\right)\overline{\varepsilon_3},
\end{aligned}$$

где $\{\overline{\varepsilon_1}, \overline{\varepsilon_2}, \overline{\varepsilon_3}\}$ образует ортонормированный базис некоторой неподвижной декартовой системы координат. Обозначим координаты точки M в полученной декартовой системе координат через (x, y, z), тогда

$$\begin{aligned}
x &= w\cos v,\\
y &= -w\sin v,\\
z &= u - \frac{v}{2}.
\end{aligned}$$

Отсюда находим $w^2 = x^2 + y^2$,

$$\begin{aligned}
dw &= \frac{xdx + ydy}{x^2+y^2},\\
dv &= \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2},\\
du &= dz + \frac{ydx - xdy}{2\left(x^2+y^2\right)}.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Подставляя (6.9) в (6.7), получим уравнение

$$dz = 2\left(ydx - xdy\right), \tag{6.10}$$

соответствующее неголономной плоскости в некоторой неподвижной декартовой системе координат (x, y, z). Таким образом, доказали, что существует единственное распределение $\Delta : M(x, y, z) > \pi$, где π имеет уравнение

$$2y\left(X - x\right) - 2x\left(Y - y\right) - Z + z = 0,$$

X, Y, Z — текущие координаты плоскости π.

Это распределение определено во всем пространстве $\mathbf{E_3}$ и не имеет особых точек. □

Замечание. Неголономная гиперплоскость в E_4 рассмотрена в работе [8].

7. Векторное поле нормалей неголономной плоскости

Как следует из (6.10) векторное поле нормалей неголономной плоскости — гладкое векторное поле $\overline{N}\left(2y, -2x, -1\right)$ без особых точек. Его линии тока лежат на цилиндрах $x^2+y^2 = a^2$ с общей осью l и представляют собой винтовые линии

$$\begin{aligned}
x &= a\sin t,\\
y &= a\cos t,\\
z &= -\frac{1}{2}t + b
\end{aligned}$$

($a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$), (см. рис. 1).

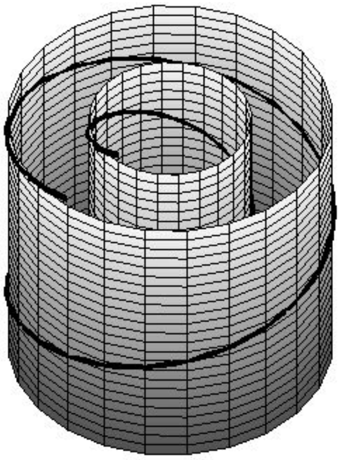

Рис. 1.

Заметим, что ось l так же является линией тока векторного поля $\overline{N}$. Эквидирекционные линии поля $\overline{N}$ — прямые, параллельные l.

С векторным полем $\overline{N}$ инвариантно связаны следующие векторные поля: а) векторное поле $\overline{n}$ главных нормалей линий тока поля $\overline{N}$; б) векторное поле $\overline{b}$ бинормалей линий тока поля $\overline{N}$. Обозначим Δ_1 — распределение, ортогональное полю $\overline{n}$, и Δ_2 — распределение, ортогональное полю $\overline{b}$. Для них имеют место следующие утверждения.

Предложение 3. *Распределение Δ_1 голономно и определяет слоение, слоями которого являются круговые цилиндры с общей осью l. Для него l — особая прямая.*

Доказательство. Уравнение Пфаффа, соответствующее распределению Δ_1 имеет вид

$$xdx + ydy = 0. \tag{7.1}$$

Это уравнение вполне интегрируемо и его интегральными поверхностями являются цилиндры $x^2 + y^2 = a^2$, на которых лежат линии тока поля $\overline{N}$. Из (7.1) видим, что $x = y = 0$ (общая ось цилиндров) — особая прямая для Δ_1. □

Линии тока поля $\overline{n}$ — прямые линии, лежащие в плоскостях, ортогональных l, и в каждой такой плоскости образующие пучок с центром в особой точке, принадлежащей l. Поле $\overline{n}$ имеет эквидирекционные поверхности. Они представляют собой пучок плоскостей с осью l.

Предложение 4. *Распределение Δ_2 голономно и определяет слоение, слоями которого являются геликоиды.*

Доказательство. Уравнение Пфаффа, соответствующее распределению Δ_2 имеет вид

$$ydx - xdy + 2\left(x^2 + y^2\right) dz = 0. \tag{7.2}$$

Уравнение (7.2) вполне интегрируемо, его интегральными поверхностями являются геликоиды (рис. 2)

$$x = y\,\mathrm{tg}\,(c - 2z).$$

Линии тока поля $\overline{b}$ — винтовые линии, лежащие на тех же цилиндрах, что и линии тока нормалей неголономной плоскости, но ортогональные последним. Эквидирекционных поверхностей поле $\overline{b}$ не имеет. А его эквидирекционные линии — прямые, параллельные l. □

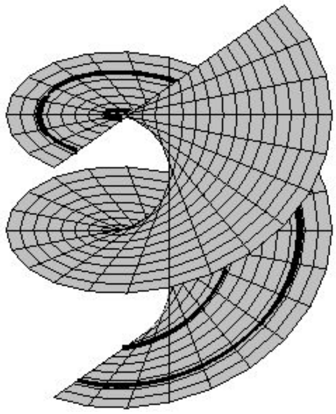

Рис. 2.

Литература

[1] Фиников С.П. *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии* (ГИТТЛ, М.–Л., 1948).
[2] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Г. *Современная геометрия* (Наука, М., 1979).
[3] Вершик А.М., Гершкович В.Я. *Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи*, Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. (ВИНИТИ, М., 1987), т. 16, с. 7–85 (1987).
[4] Лаптев Г.Ф. *Распределение касательных элементов*, Тр. геометрич. семинара (ВИНИТИ, М., 1971), т. 3, с. 29–48.
[5] Аминов Ю.А. *Геометрия векторного поля* (Наука, М., 1990).
[6] Синцов Д.М. *Работы по неголономной геометрии* (Вища школа, Киев, 1972).
[7] Слухаев В.В. *Геометрия векторных полей* (Изд. Томск. ун-та, Томск, 1982).
[8] Онищук Н.М. *Неголономная гиперплоскость в четырехмерном евклидовом пространстве*, Вестн. Томск. ун-та (математика и механика) № 3 (4), 10–21 (2008).

О.В. Цоколова

аспирант, кафедра геометрии,
Томский государственный университет,
пр. Ленина, д. 36, г. Томск, 634050, Россия,

`e-mail:` tov234@mail.ru

O.V. Tsokolova

Nonholonomic torses of the first kind

Abstract. In the three-dimensional Euclidean space we study two-dimensional nonholonomic distributions of planes orthogonal to a vector field with zero total curvature of the first kind (they are called nonholonomic torses of the first kind). Using the Cartan method [1] and a canonical moving frame, we study geometric properties of two kinds: 1) one of the principal curvatures of the first kind differs from zero (the general case); 2) both principal curvatures of the first kind equal zero (a nonholonomic plane). The result in case 2) is obtained in a general form.

Keywords: nonholonomic geometry, distribution, Pfaff equation, vector field.

O.V. Tsokolova

Postgraduate, Chair of Geometry,
Tomsk State University,
36 Lenin Ave., Tomsk, 634050 Russia,

`e-mail:` tov234@mail.ru