И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2001 МАТЕМАТИКА № 3 (466)

УДК 514.756.2

А.В. СТОЛЯРОВ

ЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ КОНФОРМНОГО ПРОСТРАНСТВА

Дифференциальная геометрия m-мерных поверхностей и распределений, вложенных в n-мерное конформное пространство C_n, изучалась в [1]–[7]. В данной работе исследуется внутренняя геометрия оснащенных распределений, погруженных в собственно конформное пространство C_n; центральные результаты получены с применением теории связностей в расслоенных пространствах в форме, данной Э. Картаном [8] и Г.Ф. Лаптевым [9]. Исследования проведены в минимально специализированной системе отнесения. Основные результаты доложены на Международной конференции [10]. Индексы принимают следующие значения:

$$\lambda,\mu,\rho=\overline{0,n+1};\quad \overline{I},\overline{K},\overline{L}=\overline{0,n};\quad I,K,L=\overline{1,n};\quad i,j,k,l,s,t=\overline{1,m};$$
$$\overline{i},\overline{j},\overline{k}=\overline{0,m};\quad \alpha,\beta,\gamma,\delta=\overline{m+1,n};\quad \overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}=0,\overline{m+1,n}.$$

1. Рассмотрим собственно конформное пространство C_n; отнесем его к подвижному полуизотропному [4] реперу $R=\{A_\lambda\}$, состоящему из точек A_0, A_{n+1} и n гиперсфер A_K действительных ненулевых радиусов, проходящих через эти точки. Если скалярные произведения $(A_\lambda A_\mu)$ элементов выбранного репера обозначить через $g_{\lambda\mu}$, то [1]

$$\|g_{\lambda\mu}\|=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & g_{IK} & 0\\ 1 & 0 & 0\end{Vmatrix},\quad g_{\lambda\mu}=g_{\mu\lambda},\tag{1}$$

причем в собственно конформном пространстве C_n матрица $\|g_{IK}\|$ является невырожденной и положительно определенной.

Любую гиперсферу $P\in C_n$ можно представить в виде линейной комбинации элементов репера R:

$$P=x^0A_0+x^IA_I+x^{n+1}A_{n+1}.\tag{2}$$

Если P — точка пространства C_n, то в силу соотношений (1), (2) и $(PP)=0$ ее координаты удовлетворяют уравнению

$$g_{IK}x^Ix^K+2x^0x^{n+1}=0.\tag{3}$$

Уравнение (3) есть уравнение неподвижной действительной овальной гиперквадрики Дарбу Q_n^2 проективного пространства P_{n+1}, на которую отображаются все точки конформного пространства C_n. При этом отображении Дарбу образы A_0 и A_{n+1} вершин A_0, A_{n+1} репера R лежат на гиперквадрике Дарбу (3), образами гиперсфер $P\in C_n$ действительного ненулевого радиуса являются точки P проективного пространства P_{n+1}, находящиеся вне гиперквадрики Q_n^2; в силу этого образами вершин A_I (т. е. гиперсфер) репера R являются точки $\mathrm{A_I}\in P_{n+1}$, лежащие на пересечении поляр точек A_0 и A_{n+1}. В проективном пространстве P_{n+1} имеем проективный репер $\mathrm{R}=\{\mathrm{A}_\lambda\}$, соответствующий выбранному конформному реперу $R=\{A_\lambda\}$.

Отметим, что группа конформных преобразований $\mathcal{L}$ пространства C_n изоморфна подгруппе группы проективных преобразований пространства P_{n+1}, а именно, изоморфна стационарной подгруппе гиперквадрики Дарбу $Q_n^2 \subset P_{n+1}$; эта подгруппа зависит от $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ независимых параметров.

2. При бесконечно малом преобразовании конформной группы $\mathcal{L}$ (стационарной подгруппы абсолюта $Q \subset P_{n+1}$) элементы конформного репера R (проективного репера R) получают приращения, главную часть которых определяют дифференциалы dA_λ (соответственно $d\mathrm{A}_\lambda$), являющиеся гиперсферами (точками); эти дифференциалы разлагаются по элементам исходного репера R (R) следующим образом:

$$dA_\lambda = \omega_\lambda^\mu A_\mu \quad (\text{соответственно } \ d\mathrm{A}_\lambda = \omega_\lambda^\mu \mathrm{A}_\mu), \tag{4}$$

где дифференциальные формы Пфаффа ω_λ^μ зависят от параметров группы $\mathcal{L}$ (стационарной подгруппы абсолюта Q_n^2). Условиями полной интегрируемости системы уравнений (4) являются структурные уравнения, которым подчинены формы ω_λ^μ,

$$D\omega_\lambda^\mu = \omega_\lambda^\rho \wedge \omega_\rho^\mu. \tag{5}$$

Кроме того, в силу соотношений (1) и (4) формы ω_λ^μ удовлетворяют следующим линейным зависимостям [1]:

$$\begin{aligned} &(\text{а}) \quad \omega_0^{n+1} = \omega_{n+1}^0 = 0, \quad \omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} = 0;\\ &(\text{б}) \quad \omega_I^0 + g_{IL}\omega_{n+1}^L = 0, \quad \omega_I^{n+1} + g_{IL}\omega_0^L = 0;\\ &(\text{в}) \quad dg_{IK} - g_{IL}\omega_K^L - g_{LK}\omega_I^L = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Форма $\psi \overset{\text{def}}{=} (dA_0 dA_0) = g_{IK}\omega_0^I\omega_0^K$ является относительно инвариантной: $\delta\psi = 2\psi\pi_0^0$, где

$$\pi_\lambda^\mu \overset{\text{def}}{=} \omega_\lambda^\mu|_{\omega_0^I=0}, \quad \delta \overset{\text{def}}{=} d|_{\omega_0^I=0};$$

она определяет угловую метрику конформного пространства C_n. Метрический тензор g_{IK} собственно конформного пространства невырожден:

$$g \overset{\text{def}}{=} |g_{IK}| > 0, \quad d\ln\sqrt{g} = \omega_L^L. \tag{7}$$

3. В каждой точке $A \in C_n$ возьмем m и $n-m$ линейно независимых гиперсфер P_i и P_α соответственно:

$$\begin{aligned} P_i &= A_i + x_i^0 A_0 + x_i^\beta A_\beta + x_i^{n+1} A_{n+1},\\ P_\alpha &= A_\alpha + x_\alpha^0 A_0 + x_\alpha^j A_j + x_\alpha^{n+1} A_{n+1}. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы все гиперсферы P_i и P_α проходили через точку A_0. Тогда

$$(P_i A_0) = x_i^{n+1} = 0, \quad (P_\alpha A_0) = x_\alpha^{n+1} = 0,$$

и, следовательно,

$$P_i = A_i + x_i^0 A_0 + x_i^\beta A_\beta, \quad P_\alpha = A_\alpha + x_\alpha^0 A_0 + x_\alpha^j A_j. \tag{8}$$

Совокупность точки A_0 и множества L_m гиперсфер $P = \xi^j P_j + \xi^0 A_0$, натянутых на A_0 и базисные гиперсферы P_j, назовем m-мерным линейным элементом (A_0, L_m); аналогично вводится понятие $(n-m)$-мерного линейного элемента (A_0, L_{n-m}), где L_{n-m} есть множество гиперсфер $Q = \eta^\alpha P_\alpha + \eta^0 A_0$. Очевидно, что все гиперсферы P и Q проходят через точку A_0.

Условия инвариантности элементов L_m и L_{n-m} имеют соответственно вид

$$\nabla_\delta x_i^\beta + \pi_i^\beta - x_i^\gamma x_j^\beta \pi_\gamma^j = 0 \quad \text{и} \quad \nabla_\delta x_\alpha^i + \pi_\alpha^i - x_\alpha^k x_\beta^i \pi_k^\beta = 0.$$

Следовательно, структурные формы полей элементов L_m и L_{n-m}, т.е. полей объектов x_i^α, x_α^i, имеют соответственно вид

$$\Delta x_i^\alpha \overset{\text{def}}{=} \nabla x_i^\alpha + \omega_i^\alpha - x_i^\gamma x_j^\alpha \omega_\gamma^j \quad \text{и} \quad \Delta x_\alpha^i \overset{\text{def}}{=} \nabla x_\alpha^i + \omega_\alpha^i - x_\alpha^k x_\gamma^i \omega_k^\gamma; \tag{9}$$

равенства $\Delta x_i^\alpha = 0$ и $\Delta x_\alpha^i = 0$ представляют собой условия стационарности соответственно элементов L_m и L_{n-m} при допустимых преобразованиях репера R.

Каждая из систем форм $\{\omega_0^K, \Delta x_i^\alpha\}$ и $\{\omega_0^K, \Delta x_\alpha^i\}$ вполне интегрируема. Следовательно, каждое из многообразий элементов $\{\omega_0^K, \Delta x_i^\alpha\}$, $\{\omega_0^K, \Delta x_\alpha^i\}$ является расслоенным пространством, базой которого служит пространство C_n, а слоями — соответственно пучки элементов (A_0, L_m) и (A_0, L_{n-m}), соответствующие точкам $A_0 \in C_n$.

В расслоенных пространствах $\{\Delta x_i^\alpha, \omega_0^K\}$ и $\{\Delta x_\alpha^i, \omega_0^K\}$ n-мерные погруженные многообразия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, определяемые системами дифференциальных уравнений

$$\Delta x_i^\alpha = \Lambda_{iK}^\alpha \omega_0^K \tag{10}$$

и

$$\Delta x_\alpha^i = \Lambda_{\alpha K}^i \omega_0^K, \tag{11}$$

называются распределениями в C_n соответственно m-мерных и $(n-m)$-мерных линейных элементов (A_0, L_m) и (A_0, L_{n-m}); каждая из систем (10) и (11) задает сечение соответствующего расслоенного пространства $\{\Delta x_i^\alpha, \omega_0^K\}$ и $\{\Delta x_\alpha^i, \omega_0^K\}$: каждой точке A_0 (центр распределения) ставится в соответствие один m-мерный или $(n-m)$-мерный линейный элемент пучка (A_0, L_m) или (A_0, L_{n-m}) соответственно.

В силу соотношений (9)–(11) имеем $\nabla x_i^\alpha + \omega_i^\alpha - x_i^\beta x_j^\alpha \omega_\beta^j = \Lambda_{iK}^\alpha \omega_0^K$, $\nabla x_\alpha^i + \omega_\alpha^i - x_\alpha^j x_\beta^i \omega_j^\beta = \Lambda_{\alpha K}^i \omega_0^K$. Эти уравнения показывают, что возможна частичная канонизация [11] конформного репера $R = \{A_\lambda\}$, при которой

$$x_i^\alpha = x_\alpha^i = 0; \tag{12}$$

в этом репере формы ω_i^α, ω_α^i становятся главными:

$$\omega_i^\alpha = \Lambda_{iK}^\alpha \omega_0^K, \tag{13}$$

$$\omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha K}^i \omega_0^K. \tag{14}$$

В выбранном репере (13) и (14) представляют собой системы дифференциальных уравнений распределений $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно; в этом репере гиперсферы P_i, P_α (см. (8)) в силу равенств (12) имеют следующие разложения:

$$P_i = A_i + x_i^0 A_0, \quad P_\alpha = A_\alpha + x_\alpha^0 A_0. \tag{15}$$

Потребуем, чтобы в каждом центре A_0 текущие элементы L_m и L_{n-m} распределений $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ были ортогональны, т. е.

$$(P_i P_\alpha) = (A_i A_\alpha) = g_{i\alpha} = 0; \tag{16}$$

при выполнении соотношений (16) распределения $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ назовем взаимно ортогональными. Частично канонизированный полуизотропный конформный репер R, определяемый объединенной системой равенств (12), (16), назовем полуортогональным репером 0-го порядка, адаптированным к взаимно ортогональным распределениям $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Из дифференциальных уравнений (6(в)) для равенств (16) следует

$$g_{ij}\omega_\alpha^j + g_{\alpha\beta}\omega_i^\beta = 0,$$

откуда с использованием уравнений (13), (14) находим связь между компонентами полей фундаментальных объектов 1-го порядка на распределениях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$:

$$g_{ij}\Lambda_{\alpha K}^j + g_{\alpha\beta}\Lambda_{iK}^\beta = 0. \tag{17}$$

Каждая из систем функций g_{ij}, $g_{\alpha\beta}$ образует невырожденный положительно определенный симметричный тензор:

$$dg_{ij} - g_{ik}\omega_j^k - g_{kj}\omega_i^k = 0, \quad dg_{\alpha\beta} - g_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma - g_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma = 0; \tag{18}$$

$$g_1 \overset{\mathrm{def}}{=} |g_{ij}| > 0, \quad d\ln\sqrt{g_1} = \omega_k^k; \quad g_2 \overset{\mathrm{def}}{=} |g_{\alpha\beta}| > 0, \quad d\ln\sqrt{g_2} = \omega_\gamma^\gamma; \tag{19}$$
$$g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j, \quad g_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta;$$
$$dg^{ij} + g^{ik}\omega_k^j + g^{kj}\omega_k^i = 0, \quad dg^{\alpha\beta} + g^{\alpha\gamma}\omega_\gamma^\beta + g^{\gamma\beta}\omega_\gamma^\alpha = 0.$$

4. Линия l в конформном пространстве C_n определяется уравнениями

$$l : \omega_0^K = l^K\theta, \quad D\theta = \theta \wedge \theta_0^0. \tag{20}$$

В силу соотношений (4), (15), (20) справедливо $dA_0 = (\omega_0^0 - x_k^0\omega_0^k - x_\beta^0\omega_0^\beta)A_0 + l^k\theta P_k + l^\beta\theta P_\beta (\operatorname{mod} l)$. Следовательно, кривая $l_{\mathfrak{M}}$, принадлежащая распределению $\mathfrak{M}$, имеет уравнения

$$l_{\mathfrak{M}} \begin{cases} \omega_0^\alpha = 0; \\ \omega_0^i = l^i\theta, \quad D\theta = \theta \wedge \theta_0^0. \end{cases} \tag{21}$$

Аналогично, кривая $l_{\mathfrak{N}}$, принадлежащая распределению $\mathfrak{N}$, имеет уравнения

$$l_{\mathfrak{N}} \begin{cases} \omega_0^i = 0; \\ \omega_0^\alpha = l^\alpha\theta, \quad D\theta = \theta \wedge \theta_0^0. \end{cases}$$

Пересечение $n-m$ гиперсфер P_α обозначим через $[P_\alpha]$; оно представляет собой $(n-m)$-параметрическую связку m-мерных сфер, проходящих через центр A_0. Аналогично, пересечение m гиперсфер P_i представляет собой m-параметрическую связку $(n-m)$-мерных сфер $[P_i]$, проходящих через центр A_0.

Все m-сферы $[P_\alpha]$ касаются образующего элемента L_m распределения $\mathfrak{M}$ в его центре A_0, а следовательно, касаются между собой вдоль любой кривой $l_{\mathfrak{M}}$, принадлежащей подмногообразию $\mathfrak{M}$.

Действительно, при смещении вдоль любой кривой $l_{\mathfrak{M}}$ в силу соотношений (4), (16), (21) справедливо $(P_\alpha A_0) = 0$, $(P_\alpha A_0 + dA_0) = (P_\alpha, l^j\theta A_j) = l^j\theta g_{\alpha j} = 0 (\operatorname{mod} l_{\mathfrak{M}})$, что и доказывает наше утверждение.

Аналогично, *все $(n-m)$-сферы $[P_i]$ касаются образующего элемента L_{n-m} распределения $\mathfrak{N}$ в его центре, а следовательно, касаются между собой вдоль любой кривой $l_{\mathfrak{N}}$, принадлежащей подмногообразию $\mathfrak{N}$.*

В силу этого по отношению к распределению $\mathfrak{M}$ (соответственно к распределению $\mathfrak{N}$) поле $[P_\alpha]$ будем называть полем касательных (нормальных) m-сфер, а поле $[P_i]$ — полем нормальных (касательных) $(n-m)$-сфер.

5. В [5] изучается геометрия нормализованного конформного пространства C_n. Пространство C_n называется нормализованным, если в нем задано дифференцируемое точечное соответствие $A_0 \to X_{n+1}$ (A_0 — нормализуемая точка, X_{n+1} — нормализующая точка пространства C_n); при этом каждое из распределений $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ согласно терминологии в [1] будем называть *вполне оснащенным* (или просто *оснащенным*).

Таким образом, нормализация конформного пространства C_n индуцирует полное оснащение одного (а следовательно, каждого) из распределений $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$; справедливо и обратное. Последнее равносильно тому, что в каждом центре A_0 к m-мерному и $(n-m)$-мерному элементам L_m и L_{n-m} присоединены инвариантные касательные m-сфера $[P_\alpha]$ и $(n-m)$-сфера $[P_i]$ соответственно, проходящие через точку X_{n+1}.

Пусть X_{n+1} — произвольная точка конформного пространства C_n, отличная от A_0 и не лежащая на изотропном конусе $g_{IK}x^Ix^K = 0$ с вершиной в точке A_0. Тогда, как известно [1], точка X_{n+1} имеет разложение

$$X_{n+1} = x^0A_0 + x^jA_j + x^\beta A_\beta + A_{n+1} \quad (x^{n+1} = 1), \tag{22}$$

и условие инвариантности ее ($\delta X_{n+1} = \theta X_{n+1}$) в силу $\theta = -\pi_0^0$ запишется в виде

$$\begin{gathered} \delta x^0 + 2x^0\pi_0^0 + x^j\pi_j^0 + x^\alpha\pi_\alpha^0 = 0, \\ \delta x^i + x^i\pi_0^0 + x^j\pi_j^i + \pi_{n+1}^i = 0, \quad \delta x^\alpha + x^\alpha\pi_0^0 + x^\beta\pi_\beta^\alpha + \pi_{n+1}^\alpha = 0. \end{gathered} \tag{23}$$

Условием полного оснащения распределения $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{N}$) является выполнение соотношений

$$(X_{n+1}P_\alpha) = (X_{n+1}P_i) = 0.$$

Использование разложений (15), (22) позволяет представить последние соотношения в виде

$$x_\alpha^0 = -g_{\alpha\beta}x^\beta, \quad x_i^0 = -g_{ij}x^j, \tag{24_1}$$

или, что то же самое,

$$x^\alpha = -g^{\alpha\beta}x_\beta^0, \quad x^i = -g^{ij}x_j^0. \tag{24_2}$$

Координаты точки X_{n+1} (см. (22)) удовлетворяют уравнению гиперквадрики Дарбу (3), откуда с использованием равенств (16), (24_2) находим

$$x^0 = -\frac{1}{2}(g^{ij}x_i^0x_j^0 + g^{\alpha\beta}x_\alpha^0x_\beta^0). \tag{25}$$

Следовательно, точка X_{n+1} (см. (22)) оснащающего поля в полуортогональном конформном репере R в силу (24_2), (25) имеет разложение

$$X_{n+1} = -\frac{1}{2}(g^{ij}x_i^0x_j^0 + g^{\alpha\beta}x_\alpha^0x_\beta^0)A_0 - g^{ij}x_j^0A_i - g^{\alpha\beta}x_\beta^0A_\alpha + A_{n+1}. \tag{26}$$

В выражении (26) функции x_i^0, x_α^0 в силу соотношений (6(б)), (18), (23), (24_1) подчинены уравнениям

$$\begin{aligned} &(\text{а}) \quad \nabla x_i^0 + \omega_i^0 = x_{iK}^0\omega_0^K, \\ &(\text{б}) \quad \nabla x_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 = x_{\alpha K}^0\omega_0^K. \end{aligned} \tag{27}$$

При выполнении уравнений (27) имеем полное оснащение обоих ортогональных распределений $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$; при этом репер $\widetilde{R} = \{A_0, P_i, P_\alpha, X_{n+1}\}$ является конформным полуортогональным, т. к.

$$\begin{gathered} (A_0A_0) = (X_{n+1}X_{n+1}) = (A_0P_i) = (A_0P_\alpha) = (X_{n+1}P_i) = (X_{n+1}P_\alpha) = (P_iP_\alpha) = 0, \\ (P_iP_j) = g_{ij}, \quad (P_\alpha P_\beta) = g_{\alpha\beta}, \quad (A_0X_{n+1}) = 1. \end{gathered}$$

Если в (27) выполняется лишь одна из систем уравнений ((а) или (б)), то говорят, что задано частичное оснащение распределения $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{N}$). Например, если для разложений (15) выполнена система уравнений (27(а)), то имеем частичное оснащение распределения $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{N}$) полем нормальных (касательных) $(n-m)$-сфер $[P_i]$; при этом в каждом центре A_0 $(n-m)$-сфера $[P_i]$ проходит через соответствующую точку

$$X'_{n+1} = -\frac{1}{2}g^{kj}x_k^0x_j^0A_0 - g^{kj}x_j^0P_k + A_{n+1},$$

а гиперсферы P_i, A_α и лежащие на них точки A_0, X'_{n+1} образуют конформный полуортогональный репер $R' = \{A_0, P_i, A_\alpha, X'_{n+1}\}$.

Аналогично, если выполнена система уравнений (27(б)), то имеем частичное оснащение распределения $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{N}$) полем касательных (нормальных) m-сфер $[P_\alpha]$; при этом точка

$$X''_{n+1} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}x^0_\alpha x^0_\beta A_0 - g^{\alpha\beta}x^0_\beta P_\alpha + A_{n+1} \tag{28}$$

лежит на m-сфере $[P_\alpha]$, а точки A_0, X''_{n+1} и проходящие через них гиперсферы A_i, P_α образуют конформный полуортогональный репер $R'' = \{A_0, A_i, P_\alpha, X''_{n+1}\}$.

6. В конформном пространстве C_n строим инвариантные полные и частичные оснащения распределений $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ и поверхностей V_m, определяемые внутренним образом. Продолжая уравнения (13) и (14), имеем

$$\begin{aligned} &(\text{а}) \quad \nabla\Lambda^\alpha_{ij} + \Lambda^\alpha_{ij}\omega^0_0 - g_{ij}\omega^\alpha_{n+1} = \Lambda^\alpha_{ijL}\omega^L_0, \\ &(\text{б}) \quad \nabla\Lambda^\alpha_{i\beta} + \Lambda^\alpha_{i\beta}\omega^0_0 - \delta^\alpha_\beta\omega^0_i = \Lambda^\alpha_{i\beta L}\omega^L_0; \end{aligned} \tag{29}$$

$$\Lambda^\alpha_{i[jk]} = \Lambda^\alpha_{i\delta}\Lambda^\delta_{[jk]}, \quad \Lambda^\alpha_{i[\beta\gamma]} = \Lambda^\alpha_{is}\Lambda^s_{[\beta\gamma]}, \quad \Lambda^\alpha_{ij\beta} - \Lambda^\alpha_{i\beta j} = \Lambda^\alpha_{i\delta}\Lambda^\delta_{j\beta} - \Lambda^\alpha_{is}\Lambda^s_{\beta j}; \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &(\text{а}) \quad \nabla\Lambda^i_{\alpha j} + \Lambda^i_{\alpha j}\omega^0_0 - \delta^i_j\omega^0_\alpha = \Lambda^i_{\alpha jL}\omega^L_0, \\ &(\text{б}) \quad \nabla\Lambda^i_{\alpha\beta} + \Lambda^i_{\alpha\beta}\omega^0_0 - g_{\alpha\beta}\omega^i_{n+1} = \Lambda^i_{\alpha\beta L}\omega^L_0; \end{aligned} \tag{31}$$

$$\Lambda^i_{\alpha[jk]} = \Lambda^i_{\alpha\delta}\Lambda^\delta_{[jk]}, \quad \Lambda^i_{\alpha[\beta\gamma]} = \Lambda^i_{\alpha s}\Lambda^s_{[\beta\gamma]}, \quad \Lambda^i_{\alpha j\beta} - \Lambda^i_{\alpha\beta j} = \Lambda^i_{\alpha\delta}\Lambda^\delta_{j\beta} - \Lambda^i_{\alpha s}\Lambda^s_{\beta j}. \tag{32}$$

Из уравнений (29(а)), (31(б)) следует, что каждая из систем функций $\Lambda^\alpha_{[ij]}$, $\Lambda^i_{[\alpha\beta]}$ образует кососимметричный тензор. Обращение в нуль тензора $\Lambda^\alpha_{[ij]}$ есть условие полной интегрируемости системы уравнений $\omega^\alpha_0 = 0$, что представляет собой условие голономности распределения $\mathfrak{M}$. Аналогично, обращение в нуль тензора $\Lambda^i_{[\alpha\beta]}$ есть условие голономности распределения $\mathfrak{N}$.

Уравнениям (27(а)) в силу соотношений (29(б)), (31(б)) и (6(б)) удовлетворяют охваты

$$\Lambda_i \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-m}\Lambda^\gamma_{i\gamma}, \quad \widetilde{\Lambda}_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n-m}g_{ij}g^{\gamma\beta}\Lambda^j_{\beta\gamma}.$$

С использованием равенств (17) убеждаемся, что эти охваты совпадают

$$\widetilde{\Lambda}_i \equiv \Lambda_i = -\frac{1}{n-m}\Lambda^\gamma_{i\gamma}. \tag{33}$$

Аналогично, уравнениям (27(б)) удовлетворяют охваты

$$\Lambda_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{m}\Lambda^j_{\alpha j}, \quad \widetilde{\Lambda}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m}g^{jk}g_{\alpha\beta}\Lambda^\beta_{kj},$$

причем справедливо

$$\widetilde{\Lambda}_\alpha \equiv \Lambda_\alpha = -\frac{1}{m}\Lambda^j_{\alpha j}. \tag{34}$$

Доказана

Теорема 1. *Инвариантное полное оснащение взаимно ортогональных распределений $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, погруженных в конформное пространство C_n, определяется внутренним образом в первой дифференциальной окрестности полями квазитензоров Λ_i и Λ_α (см. (33), (34)).*

Если в конформном пространстве C_n задана поверхность V_m, то ее дифференциальные уравнения в полуортогональном репере имеют вид

$$\omega_0^\alpha = 0; \tag{35}$$

продолжение уравнений системы (35) приводит к системе Пфаффа

$$\omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega_0^j, \quad \Lambda_{[ij]}^\alpha = 0.$$

Уравнения (29), (31) и соотношения (17), (30), (32) теперь запишутся в виде

$$\begin{aligned} &(\text{а}) \quad \nabla\Lambda_{ij}^\alpha + \Lambda_{ij}^\alpha\omega_0^0 - g_{ij}\omega_{n+1}^\alpha = \Lambda_{ijk}^\alpha\omega_0^k, \\ &(\text{б}) \quad \nabla\Lambda_{\alpha j}^i + \Lambda_{\alpha j}^i\omega_0^0 - \delta_j^i\omega_\alpha^0 = \Lambda_{\alpha jk}^i\omega_0^k, \\ &(\text{в}) \quad \Lambda_{i[jk]}^\alpha = \Lambda_{\alpha[jk]}^i = 0, \quad \Lambda_{\alpha j}^i = -g^{ik}g_{\alpha\beta}\Lambda_{kj}^\beta. \end{aligned} \tag{36}$$

Каждая из систем функций $\{\Lambda_{ij}^\alpha, g_{ij}\}$, $\{\Lambda_{\alpha k}^i\}$ на поверхности $V_m \subset C_n$ образует геометрический объект второго порядка. Так как из охватов (33), (34) на поверхности $V_m \subset C_n$ имеет смысл лишь (34), то в силу уравнений (27), (36) справедлива

Теорема 2. *В дифференциальной окрестности ниже третьего порядка невозможно построить внутренним образом инвариантное полное оснащение поверхности $V_m \subset C_n$. Инвариантное касательное оснащение ее определяется внутренним образом во второй дифференциальной окрестности полем квазитензора Λ_α (см. (34)).*

Отметим, что М.А. Акивис [1] в третьей дифференциальной окрестности точки $A_0 \in V_m$ внутренним образом построил инвариантное нормальное (а следовательно, и полное) оснащение поверхности $V_m \subset C_n$. Существенным при этом является построение отличного от нуля относительного инварианта второго порядка M, внутренним образом определяемого самой поверхностью

$$d\ln M + 2m_1\omega_0^0 = M_k\omega_0^k, \quad m_1 \neq 0. \tag{37}$$

Продолжая последнее уравнение, имеем

$$\nabla M_k + M_k\omega_0^0 + 2m_1\omega_k^0 = M_{ks}\omega_0^s, \quad M_{[ks]} = 0. \tag{38}$$

Сравнивая уравнения (27(а)) и (37), с учетом (35) заключаем, что охват

$$\widetilde{M}_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2m_1}M_k \tag{39}$$

в третьей дифференциальной окрестности внутренним образом определяет инвариантное нормальное оснащение поверхности $V_m \subset C_n$.

В случае гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ в качестве относительного инварианта второго порядка М.А. Акивис [2] берет определитель невырожденного симметричного тензора

$$a_{ij}^n \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{ij}^n - \frac{1}{n-1}g_{ij}g^{ks}\Lambda_{sk}^n, \quad a \stackrel{\text{def}}{=} |a_{ij}^n|, \quad a_n^{kj}a_{ik}^n = \delta_i^j, \tag{40}$$

$$d\ln a + (n-1)\omega_0^0 - 2\omega_k^k = a_k\omega_0^k. \tag{41}$$

Уравнение (41) в силу (19) можно переписать в виде

$$d\ln\left(\frac{a}{g_1}\right) + (n-1)\omega_0^0 = a_k\omega_0^k \quad (\text{сравни с (37)}). \tag{41$'$}$$

Охват

$$\widetilde{a}_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n-1}a_k, \quad \nabla a_k + a_k\omega_0^0 + (n-1)\omega_k^0 = a_{ks}\omega_0^s, \quad a_{[ks]} = 0 \tag{42}$$

в третьей дифференциальной окрестности внутренним образом определяет инвариантное нормальное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$.

Охваты (40) справедливы и на регулярном (т. е. $|a^n_{ij}| \neq 0$) распределении гиперплоскостных элементов $\mathcal{M}$; при этом уравнение (41′) запишется в виде

$$d \ln \left(\frac{a}{g_1} \right) + (n-1)\omega^0_0 = a_L \omega^L_0. \tag{43}$$

Продолжая уравнение (43), имеем

$$\begin{aligned} &(\text{а}) \quad \nabla a_k + a_k \omega^0_0 + (n-1)\omega^0_k = a_{kL}\omega^L_0, \quad a_{[ks]} = \Lambda^n_{[ks]}, \\ &(\text{б}) \quad da_n + a_n(\omega^0_0 - \omega^n_n) + (n-1)\omega^0_n = a_{nL}\omega^L_0. \end{aligned}$$

Следовательно, поле квазитензора второго порядка (42) во второй дифференциальной окрестности определяет внутреннее инвариантное нормальное оснащение распределения $\mathcal{M}$; кроме того, поле скаляра $\widetilde{a}^0_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n-1} a^0_n$ во второй дифференциальной окрестности определяет внутреннее инвариантное касательное оснащение неголономного подмногообразия $\mathcal{M}$.

Теорема 3. *Инвариантное нормальное (касательное) оснащение распределения гиперплоскостных элементов $\mathcal{M}$ или гиперповерхности V_{n-1} полем квазитензора x^0_i (x^0_n) порядка v в дифференциальной окрестности порядка $v+1$ индуцирует инвариантное касательное (нормальное) оснащение подмногообразия $\mathcal{M}$ или V_{n-1}.*

Доказательство. Продолжая уравнения (27(а)), при $\alpha = n$ имеем $\nabla_\delta x^0_{ij} + x^0_{ij}\pi^0_0 + x^0_i \pi^0_j + x^0_j \pi^0_i + g_{ij} x^0_k \pi^k_{n+1} + \Lambda^n_{ik}\pi^0_n = 0$. В дифференциальной окрестности порядка $v+1$ строим охваты

$$\begin{aligned} &\widetilde{x}^0_{ij} \overset{\text{def}}{=} x^0_{ij} - x^0_i x^0_j + \frac{1}{2} g_{ij} g^{st} x^0_s x^0_t, && \nabla_\delta \widetilde{x}^0_{ij} + \widetilde{x}^0_{ij}\pi^0_0 + \Lambda^n_{ij}\pi^0_n = 0; \\ &\widehat{x}^0_{ij} \overset{\text{def}}{=} \widetilde{x}^0_{ij} - g_{ij}\Lambda_n \left(\frac{1}{n-1} g^{st}\Lambda^n_{st} - \frac{1}{2} g^{nn}\Lambda_n \right), && \nabla_\delta \widehat{x}^0_{ij} + \widehat{x}^0_{ij}\pi^0_0 + a^n_{ij}\pi^0_n = 0. \end{aligned}$$

Поле скаляра

$$\widehat{x}^0_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n-1} a^{ji}_n \widehat{x}^0_{ij}, \quad \delta \widehat{x}^0_n + \widehat{x}^0_n(\pi^0_0 - \pi^n_n) + \pi^0_n = 0$$

определяет инвариантное касательное оснащение распределения гиперплоскостных элементов $\mathcal{M}$ или гиперповерхности V_{n-1} в дифференциальной окрестности порядка $v+1$.

Обратно, пусть определено инвариантное касательное оснащение распределения гиперплоскостных элементов $\mathcal{M}$ или гиперповерхности V_{n-1} полем скаляра x^0_n порядка v:

$$dx^0_n + x^0_n(\omega^0_0 - \omega^n_n) + \omega^0_n = x^0_{nL}\omega^L_0. \tag{44}$$

Продолжая уравнение (44), получим

$$\nabla_\delta x^0_{ni} + x^0_{ni}(\pi^0_0 - \pi^n_n) - x^0_{nj}\pi^j_i + (\Lambda^k_{ni} + \delta^k_i x^0_n)\pi^0_k = 0. \tag{45}$$

Предполагая невырожденность тензора

$$\widetilde{\Lambda}^k_{ni} \overset{\text{def}}{=} \Lambda^k_{ni} + \delta^k_i x^0_n, \quad \widetilde{\Lambda}^{ni}_k \widetilde{\Lambda}^k_{nj} = \delta^i_j,$$

из уравнений (45) находим $\nabla_\delta x^0_k + \pi^0_k = 0$, $x^0_k \overset{\text{def}}{=} \widetilde{\Lambda}^{ni}_k x^0_{ni}$. Поле квазитензора v^0_k порядка $v+1$ определяет инвариантное нормальное оснащение распределения гиперплоскостных элементов $\mathcal{M}$ или гиперповерхности V_{n-1}. □

7. В конформном пространстве C_n рассмотрим распределение $\mathfrak{M}$ (а следовательно, и распределение $\mathfrak{N}$), вполне оснащенное полями квазитензоров x_i^0, x_α^0 (см. (27)), т. е. полями нормальных (касательных) $(n-m)$-сфер $[P_i]$ и касательных (нормальных) m-сфер $[P_\alpha]$; при этом гиперсферы (15) в каждом центре A_0 проходят через A_0 и точку X_{n+1} (см. (26)).

Рассмотрим две системы форм, а именно, $\{\omega_0^I, \theta_{\overline{i}}^{j}\}$, $\{\omega_0^I, \theta_{\overline{\alpha}}^{\beta}\}$, где

$$\theta_0^j = \omega_0^j, \quad \theta_i^j = \omega_i^j - \delta_i^j(\omega_0^0 - x_k^0\omega_0^k - x_\gamma^0\omega_0^\gamma) + g^{jk}x_k^0\omega_i^{n+1} + x_i^0\omega_0^j, \tag{46}$$

$$\theta_0^\beta = \omega_0^\beta, \quad \theta_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta(\omega_0^0 - x_k^0\omega_0^k - x_\gamma^0\omega_0^\gamma) + g^{\beta\gamma}x_\gamma^0\omega_\alpha^{n+1} + x_\alpha^0\omega_0^\beta. \tag{47}$$

Каждая из этих систем удовлетворяет следующим структурным уравнениям:

$$\begin{cases} D\omega_0^I = \omega_0^K \wedge (\omega_K^I - \delta_K^I\omega_0^0), \quad D\theta_0^j = \theta_0^k \wedge \theta_k^j + \frac{1}{2}r_{0KL}^j\omega_0^K \wedge \omega_0^L, \\ D\theta_i^j = \theta_i^k \wedge \theta_k^j + \frac{1}{2}r_{iKL}^j\omega_0^K \wedge \omega_0^L; \end{cases} \tag{48}$$

$$\begin{cases} D\omega_0^I = \omega_0^K \wedge (\omega_K^I - \delta_K^I\omega_0^0), \quad D\theta_0^\beta = \theta_0^\gamma \wedge \theta_\gamma^\beta + \frac{1}{2}r_{0KL}^\beta\omega_0^K \wedge \omega_0^L, \\ D\theta_\alpha^\beta = \theta_\alpha^\gamma \wedge \theta_\gamma^\beta + \frac{1}{2}r_{\alpha KL}^\beta\omega_0^K \wedge \omega_0^L. \end{cases} \tag{49}$$

Здесь

$$r_{0KL}^j = 2(\delta_{[K}^\gamma\Lambda_{|\gamma|L]}^j - \delta_{[K}^j\delta_{L]}^\gamma x_\gamma^0), \tag{50}$$

$$\begin{aligned} r_{iKL}^j = 2[&g^{st}x_t^0x_s^0g_{i[K}\delta_{L]}^j - g^{js}x_s^0g_{i[K}\delta_{L]}^t x_t^0 + x_{i[K}^0\delta_{L]}^j + \\ &+\Lambda_{i[K}^\gamma\Lambda_{|\gamma|L]}^j - x_i^0x_s^0\delta_{[K}^s\delta_{L]}^j - g^{js}x_s^0\Lambda_{i[K}^\gamma g_{L]\gamma} - g^{js}x_{s[K}^0g_{L]i} + \\ &+\delta_i^j(x_{s[K}^0\delta_{L]}^s - x_s^0\Lambda_{\gamma[K}^s\delta_{L]}^\gamma + x_{\gamma[K}^0\delta_{L]}^\gamma + x_\gamma^0\delta_{[K}^s\Lambda_{|s|L]}^\gamma)]; \end{aligned} \tag{51}$$

$$r_{0KL}^\beta = 2(\delta_{[K}^j\Lambda_{|j|L]}^\beta - \delta_{[K}^\beta\delta_{L]}^j x_j^0), \tag{52}$$

$$\begin{aligned} r_{\alpha KL}^\beta = 2[&g^{\gamma\delta}x_\delta^0x_\gamma^0g_{\alpha[K}\delta_{L]}^\beta - g^{\beta\delta}x_\delta^0g_{\alpha[K}\delta_{L]}^\gamma x_\gamma^0 + x_{\alpha[K}^0\delta_{L]}^\beta + \\ &+\Lambda_{\alpha[K}^j\Lambda_{|j|L]}^\beta - x_\alpha^0x_\gamma^0\delta_{[K}^\gamma\delta_{L]}^\beta - g^{\beta\gamma}x_\gamma^0\Lambda_{\alpha[K}^j g_{L]j} - g^{\beta\gamma}x_{\gamma[K}^0g_{L]\alpha} + \\ &+\delta_\alpha^\beta(x_{\gamma[K}^0\delta_{L]}^\gamma - x_\gamma^0\Lambda_{j[K}^\gamma\delta_{L]}^j + x_{j[K}^0\delta_{L]}^j + x_j^0\delta_{[K}^\gamma\Lambda_{|\gamma|L]}^j)]. \end{aligned} \tag{53}$$

Из соотношений (48), (49) следует, что каждая из систем форм (46), (47) в расслоенном многообразии с линейной структурной группой, определяемой инвариантными формами $\{\theta_{\overline{i}}^{j}\}$, $\{\theta_{\overline{\alpha}}^{\beta}\}$, удовлетворяет структурным уравнениям Картана–Лаптева [9], [12], а следовательно, устанавливает фундаментально-групповую аффинную связность $\overset{(m)}{\nabla}$ или $\overset{(n-m)}{\nabla}$ на оснащенном распределении $\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{N}$ соответственно. Соответствующие пространства аффинной связности обозначим через $\mathrm{A}_{n,m}$ и $\mathrm{A}_{n,n-m}$. В структурных уравнениях (48), (49) каждая из систем функций r_{0KL}^j, r_{iKL}^j (r_{0KL}^β, $r_{\alpha KL}^\beta$) образует соответственно тензор кручения и тензор кривизны пространства $\mathrm{A}_{n,m}$ ($\mathrm{A}_{n,n-m}$). Доказана

Теорема 4. *При полном оснащении одного (а следовательно, каждого) из распределений $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, погруженных в конформное пространство C_n, на подмногообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ индуцируются пространства аффинной связности $\mathrm{A}_{n,m}$ и $\mathrm{A}_{n,n-m}$ соответственно, базой которых является пространство C_n и слоевыми формами — формы* (46) *и* (47)*. Тензоры кручения и кривизны этих пространств имеют соответственно строения* (50), (51) *и* (52), (53).

Уравнения (18) в силу строения форм θ_i^j, θ_α^β (см. (46), (47)) и соотношений (6(б)), (16) запишутся в виде

$$\text{(а)} \quad dg_{ij} - g_{ik}\theta_j^k - g_{kj}\theta_i^k = 2g_{ij}(\omega_0^0 - x_k^0\omega_0^k - x_\gamma^0\omega_0^\gamma),$$

$$\text{(б)} \quad dg_{\alpha\beta} - g_{\alpha\gamma}\theta_\beta^\gamma - g_{\gamma\beta}\theta_\alpha^\gamma = 2g_{\alpha\beta}(\omega_0^0 - x_k^0\omega_0^k - x_\gamma^0\omega_0^\gamma);$$

последние уравнения говорят о том, что аффинные связности $\overset{(m)}{\nabla}$, $\overset{(n-m)}{\nabla}$ пространств $\mathrm{A}_{n,m}$ и $\mathrm{A}_{n,n-m}$ являются вейлевыми [13] (вообще говоря, с кручением) с метрическим тензором g_{ij} или $g_{\alpha\beta}$ и дополнительной формой

$$\theta \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0^0 - x_k^0\omega_0^k - x_\gamma^0\omega_0^\gamma. \tag{54}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Пространства аффинной связности $\mathrm{A}_{n,m}$ и $\mathrm{A}_{n,n-m}$, индуцируемые полным оснащением распределений $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, являются вейлевыми (вообще говоря, с кручением) с метрическим тензором g_{ij} или $g_{\alpha\beta}$ и дополнительной формой θ (см.* (54)*).*

Компоненты тензора кручения, например, пространства $A_{n,m}$ (см. (50)) имеют следующее строение:

$$r_{0st}^j = 0, \quad r_{0s\alpha}^j = -(\Lambda_{\alpha s}^j + x_\alpha^0\delta_s^j), \quad r_{0\beta\gamma}^j = 2\Lambda_{[\beta\gamma]}^j. \tag{55}$$

Из соотношений (55) следует, что если пространство аффинной связности $\mathrm{A}_{n,m}$, индуцируемое на оснащенном распределении $\mathfrak{M}$, имеет нулевое кручение, то ортогональное ему распределение $\mathfrak{N}$ является голономным и поле касательных m-мерных сфер $[P_\alpha]$ внутренним образом определяется в первой дифференциальной окрестности охватом (34):

$$x_\alpha^0 = \Lambda_\alpha;$$

при этом распределение $\mathfrak{M}$ также является голономным, ибо из соотношений (17) в силу $r_{0s\alpha}^j = 0$ (см. (55)) следует $g_{\alpha\beta}\Lambda_{ij}^\beta - g_{ij}\Lambda_\alpha = 0$, откуда $g_{\alpha\beta}\Lambda_{[ij]}^\beta = 0$ и $\Lambda_{[ij]}^\beta = 0$.

Справедлив также аналогичный результат для пространства аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n-m}$, индуцируемого на оснащенном распределении $\mathfrak{N}$. Следовательно, имеет место

Теорема 6. *Если пространство аффинной связности $\mathrm{A}_{n,m}$ ($\mathrm{A}_{n,n-m}$), индуцируемое на вполне оснащенном распределении $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{N}$), имеет нулевое кручение, то ортогональное ему распределение $\mathfrak{N}$ ($\mathfrak{M}$) и исходное подмногообразие $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{N}$) являются голономными, причем поле касательных m-сфер $[P_\alpha]$ (($n-m$)-сфер $[P_i]$) внутренним образом определяется в первой дифференциальной окрестности охватом* (34) ((33))*.*

8. В конформном пространстве C_n рассмотрим поверхность V_m; в силу уравнений (35) и строения форм (46) аффинная связность $\overset{(m)}{\nabla}$ на поверхности $V_m \subset C_n$ определяется без задания поля квазитензора x_γ^0. Таким образом, если задано нормальное оснащение поверхности V_m полем квазитензора x_k^0, то на ней индуцируется пространство аффинной связности $\mathrm{A}_{m,m}$, определяемое системой форм $\{\omega_0^j, \theta_i^j\}$, где

$$\theta_i^j = \omega_i^j - \delta_i^j(\omega_0^0 - x_k^0\omega_0^k) + g^{jk}x_k^0\omega_i^{n+1} + x_i^0\omega_0^j;$$

это пространство не имеет кручения ($r_{0st}^j = 0$, см. (55)) и является вейлевым (теорема 5) с дополнительной формой

$$\theta = \omega_0^0 - x_k^0\omega_0^k. \tag{56}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 7. *Нормальное оснащение поверхности V_m конформного пространства C_n индуцирует вейлево пространство $W_m \equiv A_{m,m}$ с метрическим тензором g_{ij} и дополнительной формой* (56)*.*

Отметим, что этот результат ранее получен А.П. Норденом [5] и в 1964 г. М.А. Акивисом в докторской диссертации.

Продолжая уравнения (см. (27(а)))

$$\nabla x_i^0 + x_i^0\omega_0^0 + \omega_i^0 = x_{ij}^0\omega_0^j,$$

находим

$$\nabla_\delta x_{ij}^0 + x_{ij}^0\pi_0^0 + x_i^0\pi_j^0 + x_j^0\pi_i^0 + g_{ij}x_k^0\pi_{n+1}^k + \Lambda_{ij}^\alpha\pi_\alpha^0 = 0.$$

Следовательно, на поверхности $V_m \subset C_n$ система функций $x_{[ij]}^0$ образует кососимметричный тензор.

Так как $D\theta = 2x_{[st]}^0\omega_0^s \wedge \omega_0^t$, то дополнительная форма (56) является полным дифференциалом тогда и только тогда, когда кососимметричный тензор $x_{[st]}^0$ обращается в нуль; последнее является условием римановости пространства W_m. Доказана

Теорема 8. *Вейлево пространство W_m, индуцируемое нормальным оснащением поверхности V_m конформного пространства C_n, является римановым тогда и только тогда, когда обращается в нуль кососимметричный тензор $x_{[ij]}^0$. Это условие выполняется для нормального оснащения поверхности V_m полем квазитензора $\widetilde{M}_k$ третьего порядка* (*см.* (38), (39)) *и при $m = n-1$ — полем квазитензора $\widetilde{a}_k$ третьего порядка* (*см.* (42)).

9. Пусть распределение $\mathfrak{M}$ частично оснащено полем касательных m-сфер $[P_\alpha]$, определяемым полем квазитензора x_α^0. Следовательно, касательные гиперсферы P_α (см. (15)) проходят через точку X''_{n+1} (см. (28)), причем точки A_0, X''_{n+1} и проходящие через них гиперсферы A_i, P_α образуют конформный полуортогональный репер R'' (см. п. 5).

Возьмем систему из $(m+1)^2$ форм Пфаффа $\{\Omega_{\bar{i}}^{\bar{j}}\}$:

$$\begin{cases} \Omega_0^j = \omega_0^j, \quad \Omega_0^0 = \omega_0^0 - x_\alpha^0\omega_0^\alpha, \quad \Omega_i^j = \omega_i^j, \\ \Omega_i^0 = \omega_i^0 - x_\alpha^0\omega_i^\alpha - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}x_\alpha^0 x_\beta^0\omega_i^{n+1} \end{cases} \tag{57}$$

и дополнительную систему форм $\{\Omega_{n+1}^{\bar{j}}, \Omega_{\bar{i}}^{n+1}\}$:

$$\Omega_{n+1}^j = -g^{jk}\Omega_k^0, \quad \Omega_i^{n+1} = \omega_i^{n+1}, \quad \Omega_0^{n+1} = \omega_0^{n+1} = 0, \quad \Omega_{n+1}^0 = \omega_{n+1}^0 = 0.$$

Система форм (57) удовлетворяет структурным уравнениям пространства конформной связности $C_{n,m}$ с n-мерной базой и m-мерными слоями, являющимися конформными пространствами $C_m(u^i) \equiv C_m(u)$:

$$\begin{gathered} D\omega_0^I = \omega_0^K \wedge (\omega_K^I - \delta_K^I\omega_0^0), \\ D\Omega_{\bar{i}}^{\bar{j}} = \Omega_{\bar{i}}^{\bar{k}} \wedge \Omega_{\bar{k}}^{\bar{j}} + \Omega_{\bar{i}}^{n+1} \wedge \Omega_{n+1}^{\bar{j}} + \frac{1}{2}R_{\bar{i}KL}^{\bar{j}}\omega_0^K \wedge \omega_0^L. \end{gathered} \tag{58}$$

Если в каждом локальном пространстве $C_m(u)$ выбрать конформный репер $\{A_0, A_i, X''_{n+1}\}$, отождествив центр A_0 распределения $\mathfrak{M}$ с точкой $A(u) \in C_{n,m}$, то, следуя Э. Картану [8] и Г.Ф. Лаптеву [9], конформную связность пространства $C_{n,m}$ можно определить отображением соседнего слоя $C_m(u+du)$ на исходный слой $C_m(u)$ по закону

$$\begin{gathered} A_{\bar{i}}(u+du) \to A_{\bar{i}}(u,du) = A_{\bar{i}} + \Omega_{\bar{i}}^{\bar{j}}A_{\bar{j}} + \Omega_{\bar{i}}^{n+1}X''_{n+1} + \rho(\varepsilon_{\bar{i}}^{\bar{j}}A_{\bar{j}} + \varepsilon_{\bar{i}}^{n+1}X''_{n+1}), \\ X''_{n+1}(u+du) \to X''_{n+1}(u,du) = X''_{n+1} + \Omega_{n+1}^{\bar{j}}A_{\bar{j}} + \rho(\varepsilon_{n+1}^{\bar{j}}A_{\bar{j}} + \varepsilon_{n+1}^{n+1}X''_{n+1}), \end{gathered}$$

где

$$\rho = \sqrt{(\omega_0^1)^2 + \cdots + (\omega_0^m)^2}, \quad \lim_{\rho\to 0}\varepsilon_{\tilde{i}}^{\tilde{j}} = 0, \quad \tilde{i}, \tilde{j} = 0, \overline{1,m}, n+1.$$

В структурных уравнениях (58) компоненты тензора кривизны-кручения $R^{\bar{j}}_{\bar{i}KL}$ пространства $C_{n,m}$ имеют следующее строение:

$$\begin{aligned}
&R^0_{0KL} = 2\delta^{\alpha}_{[K}x^0_{|\alpha|L]}, \quad R^j_{0KL} = 2(\delta^{\alpha}_{[K}\Lambda^j_{|\alpha|L]} + x^0_{\alpha}\delta^{\alpha}_{[K}\delta^j_{L]}),\\
&R^j_{iKL} = 2(\Lambda^{\alpha}_{i[K}\Lambda^j_{|\alpha|L]} - g^{\alpha\beta}x^0_{\alpha}x^0_{\beta}g_{i[K}\delta^j_{L]} - g^{\alpha\beta}x^0_{\beta}g_{i[K}\Lambda^j_{|\alpha|L]}),\\
&R^0_{iKL} = 2(x^0_{\alpha}x^0_{\beta}\delta^{\beta}_{[K}\Lambda^{\alpha}_{|i|L]} - x^0_{\alpha[K}\Lambda^{\alpha}_{|i|L]} + g^{\alpha\beta}x^0_{\beta}x^0_{\alpha[K}g_{L]i}) +\\
&\qquad + g^{\alpha\beta}x^0_{\alpha}x^0_{\beta}(x^0_{\gamma}g_{i[K}\delta^{\gamma}_{L]} - g_{\gamma[K}\Lambda^{\gamma}_{|i|L]}).
\end{aligned} \tag{59}$$

Система функций R^j_{0KL} образует самостоятельный тензор, который называется тензором кручения пространства $C_{n,m}$. Если пространство $C_{n,m}$ без кручения, то, замыкая уравнения $D\Omega^j_0 = \Omega^0_0 \wedge \Omega^j_0 + \Omega^k_0 \wedge \Omega^j_k$ (см. (58)), получим

$$(R^j_{iKL} - \delta^j_i R^0_{0KL})\omega^i_0 \wedge \omega^K_0 \wedge \omega^L_0 = 0,$$

откуда находим

$$R^j_{(ist)} = 0, \quad R^j_{[ik]\alpha} - \delta^j_{[i}R^0_{|0|k]\alpha} = 0. \tag{60}$$

Соотношения (60) представляют собой аналоги тождеств Риччи пространства $C_{n,m}$ без кручения.

Так как $R^j_{0KL} \equiv r^j_{0KL}$ (см. (50) и (59)), то имеем предложение, аналогичное теореме 6. Таким образом, справедлива

Теорема 9. *Частичное оснащение распределения $\mathfrak{M}$ m-мерных линейных элементов конформного пространства C_n полем касательных m-сфер $[P_\alpha]$ индуцирует пространство конформной связности $C_{n,m}$, определяемое системой $(m+1)^2$ форм Пфаффа* (57). *Компоненты тензора кривизны-кручения этого пространства имеют строение* (59), *причем если пространство $C_{n,m}$ без кручения, то имеют место аналоги тождеств Риччи* (60), *взаимно ортогональные распределения $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ голономны и поле касательных m-сфер $[P_\alpha]$ определяется внутренним образом в первой дифференциальной окрестности полем квазитензора Λ_α (см.* (34)).

Заметим, что если распределение $\mathfrak{M}$ частично оснащено полем нормальных $(n-m)$-сфер $[P_i]$, определяемым полем квазитензора x^0_i, то согласно п. 5 последнее равносильно касательному оснащению распределения $\mathfrak{N}$, что, в свою очередь, приводит к справедливости предложения, аналогичного теореме 9; при этом в соотношениях (57)–(60) следует произвести замену индексов $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\} \leftrightarrow \{\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}\}$.

Литература

1. Акивис М.А. *К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей* // Матем. сб. – 1961. – Т. 53. –№ 1. – С. 53–72.
2. Акивис М.А. *Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного пространства* // Матем. сб. – 1952. – Т. 31. – № 1. – С. 43–75.
3. Akivis M.A., Goldberg V.V. *Conformal differential geometry and its generalizations.* – USA, 1996. – 400 p.
4. Бушманова Г.В., Норден А.П. *Элементы конформной геометрии.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1972. – 178 с.
5. Норден А.П. *Конформная интерпретация пространства Вейля* // Матем. сб. – 1949. – Т. 24. – № 1. – С. 75–85.
6. Бронштейн Р.Ф. *Об одном классе многомерных распределений в конформном пространстве* // Ткани и квазигруппы. – Калинин: Изд-во Калининск. ун-та, 1982. – С. 18–24.
7. Бронштейн Р.Ф. *К конформной теории многомерных распределений* // Геометрия погруженных многообразий. – М.: МГПИ, 1983. – С. 17–25.
8. Картан Э. *Пространства аффинной, проективной и конформной связности.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1962. – 210 с.

9. Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
10. Столяров А.В. *О внутренней геометрии оснащенного распределения в конформном пространстве* // Материалы Международн. конф. "Инвариантные методы исследования на многообразиях структур геометрии, анализа и матем. физ.". – М.: Изд-во Московск. ун-та, 1999. – С. 47–48.
11. Остиану Н.М. *О канонизации подвижного репера погруженного многообразия* // Rev. Math. pures Appl. – 1962. – V. 7. – № 2. – P. 231–240.
12. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1979. – Т. 9. – 246 с.
13. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.

Чувашский государственный
педагогический университет

Поступила
07.02.2000