

**Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение профессионального образования
«Казанский (Приволжский) Федеральный Университет»**

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО
КАФЕДРА АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ**

Направление:010800.68 – Механика и математическое моделирование

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(Магистерская диссертация)**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
НЕНАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД НА ОСНОВЕ
МИКРОМОДЕЛИРОВАНИЯ**

Работа завершена:

«____» _____ 2014 г. _____ Т.О.Феоктистов

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
д.ф.-м.н
зав. кафедрой аэрогидромеханики
«____» _____ 2014 г. _____ А.Г.Егоров

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н
«____» _____ 2014 г. _____ А.Г.Егоров

Казань – 2014

Содержание

Введение	3
1 Модели взаимодействующих капилляров	4
1.1 Модель связки цилиндрических капилляров	4
1.2 Модель Тулера-Ора	5
2 Модель взаимодействующих капилляров	8
2.1 Решетка	9
2.2 Капилляры	10
3 Гидравлические функции при дренаже	11
3.1 Капиллярная кривая	11
3.2 Относительная фазовая проницаемость	16
3.3 Верификация модели по экспериментальным данным для дренажа	20
4 Гидравлические функции при пропитке	27
4.1 Капиллярная кривая	27
4.2 Относительная фазовая проницаемость	34
Заключение	38
Список используемой литературы	39

Введение

Существуют несколько микромоделей влагопереноса в пористых средах. В данной работе будут рассмотрены такие из них, как модель связки цилиндрических капилляров и модель Тулера-Ора. Недостатком этих микромоделей является игнорирование взаимодействия пор между собой. Поэтому на сегодняшний день значительно более реалистичным считаются решетчатые модели, явным образом учитывающие связи между отдельными капиллярами. Модель подобного типа, описывающая гидравлические функции при дренировании и пропитке грунта, будет построена в этой работе. Разумеется, всякая математическая модель должна быть тщательно протестирована и верифицирована по результатам натурных экспериментов. Только после этого можно делать окончательное заключение о её достоверности и практической применимости. Накопленный массив экспериментальных данных с одной стороны и достижения теоретиков с другой позволяют в настоящее время значительно приблизиться к построению законченной модели влагопереноса в зернистых средах.

Изложенное выше определяет основную цель данной работы, заключающуюся в построении и верификации математической модели влагопереноса в ненасыщенном грунте.

1 Модели взаимодействующих капилляров

1.1 Модель связки цилиндрических капилляров

Наиболее простой микромоделью пористой среды является модель связки капилляров различного размера, не взаимодействующих друг с другом. Гидравлические кривые в случае связки цилиндрических капилляров вычисляются по следующей схеме. Для каждого фиксированного давления $p < 0$ в водной фазе (за нуль принято атмосферное давление) заполненными водой считаются те поры, радиус которых не превышает критического значения

$$L_{cr}(p) = -\frac{2\sigma}{p},$$

иными словами - поры с капиллярным давлением $p_{cap}(L) = -\frac{2\sigma}{L}$, меньшим чем уровень давления в системе. Проницаемость таких пор вычисляется согласно закону Пуазейля

$$k(L) = \frac{L^2}{8}, \quad L < L_{cr}(p),$$

а гидравлические функции определяются на основе известной плотности распределения пор по размерам

$$f_v(L)dL = \frac{\text{объем пор с радиусами из интервала } [L, L + dL]}{\text{общий объем пор}}$$

простым осреднением

$$s(p) = \int_0^{L_{cr}(p)} f_v(L) dL, \quad K(p) = m \int_0^{L_{cr}(p)} k(L) f_v(L) dL.$$

Здесь m - пористость среды.

Описанная простейшая модель имеет, по крайней мере, два недостатка. Один из них принципиален и заключается в игнорировании взаимодействия капилляров

друг с другом. Другая слабость модели заключается в недостаточной реалистичности как геометрии выбираемой системы капилляров, так и физических гипотез, лежащих в основе однозначного задания величины L_{cr} критического радиуса поры как функции давления.

1.2 Модель Тулера-Ора

Туллер и Ор рассматривают пористую среду как связку невзаимодействующих полигональных пор различного размера. Наличие углов внутри поры с одной стороны, как показывают натуральные наблюдения, является важным свойством поровой структуры, а, с другой стороны, делает необходимым учет влаги, содержащейся в капиллярных менисках вблизи углов. Как и ранее, степень заполнения S поры данного размера считается зависящей от уровня давления p в системе. Однако при низком уровне давления величина S не равна нулю (как в модели цилиндрических капилляров), но определяется толщиной $h(p)$ адсорбированных на твердой поверхности водных пленок и радиусом кривизны $r(p)$ жидкых менисков в углах поры (рис. 1). Толщина жидких пленок вычисляется через константу Гамакера $A_H < 0$ как:

$$h(p) = \sqrt[3]{\frac{A_H}{6\pi p}},$$

а радиус кривизны жидкых менисков - через поверхностное натяжение σ на границе раздела вода-воздух посредством соотношения Лапласа

$$r(p) = -\frac{\sigma}{p}.$$

Для воды входящие в эти соотношения константы определяются как $A_H = -6.0 \cdot 10^{-20}$ Дж и $\sigma = 0.0728$ Н/м. Величина S подсчитывается как сумма соответствующих вкладов $S = S_{film} + S_{men}$, где

$$S_{film} = a_1 \frac{h(p)}{L}, \quad S_{men} = a_2 \frac{r^2(p)}{L^2}.$$

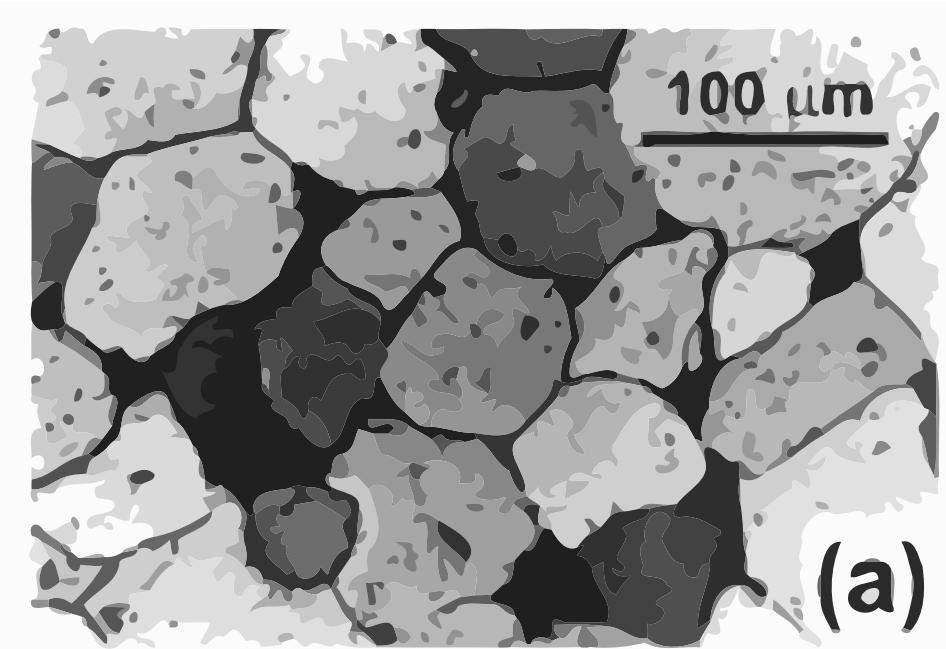


Рис. 1: Сечение образца песчаника, демонстрирующее угловатость порового пространства

Безразмерные константы a_1, a_2 определяются формой поры и выбором L . В дальнейшем в качестве характерного размера поры L будем принимать радиус вписанной в соответствующий полигон окружности. При этом для пор с поперечным сечением в виде правильного N -угольника

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 1 - \frac{\pi}{N} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{N}.$$

Переход от режима полного заполнения поры к пленочно-уголковому режиму при осушении поры происходит за счет движения мениска вдоль капилляра.

$$p_- = -a_- \frac{\sigma}{L}.$$

Величина p_- есть ни что иное, как давление, при котором внутри поры существует равновесный мениск, разделяющий в поперечном направлении воздух и воду.[6]

Сумма двух главных кривизн такого мениска, очевидно, должна совпадать с кривизной $1/r_-$ уголковых менисков. Следствием этого является простое уравнение

$$A(r_-) = r_- \Pi(r_-) \quad (1)$$

для нахождения критического радиуса r_- уголковых менисков. Здесь через A и обозначены площадь и периметр заполненной воздухом центральной части капилляра.

Решение уравнения (1) для правильных полигонов дается в явном виде, результатом чего является простая формула

$$a_- = 1 + \sqrt{\frac{\pi}{N} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{N}}.$$

В частности, для цилиндрической поры имеем $a_- = 2$; с уменьшением N величина a_- также уменьшается и достигает значения 1.78 при $N = 3$.

Постулируя описанную картину процесса и задаваясь объемной плотностью распределения пор по размерам, Тулер и Ор подсчитывали насыщенность s осреднением по всему массиву пор

$$s = s_-(p) = \int_0^\infty \left(\eta_- + (1 - \eta_-) S(p, L) \right) f_v(L) dL. \quad (2)$$

Знак минус здесь отвечает процессу дренажа пористого образца.

$$\eta_-(p, L) = \begin{cases} 0, & L > L_-(p), \\ 1, & L < L_-(p). \end{cases}$$

Аналогично Туллером и Ором подсчитывается и фазовая проницаемость рассматриваемой системы

$$K = m \int_0^{\infty} k_-(p, L) f_v(L) dL. \quad (3)$$

$$k_-(p, L) = a_3 L^2 \eta_-(p, L) + \left(a_4 \frac{r^4(p)}{L^2} + a_5 \frac{h^3(p)}{L} \right) (1 - \eta_-(p, L)).$$

Безразмерные константы a_3, a_4, a_5 зависят от формы поры и определяют проницаемость соответственно полностью заполненной поры, системы угловых менисков и адсорбированных пленок влаги. Их значения приведены в табл. 1.

N	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_+	a_-
3	2	0.395	0.15	0.025	1.33	1	1.78
4	2	0.215	0.141	0.0047	1.33	1	1.89
6	2	0.093	0.128	0.00046	1.33	1	1.95
∞	2	0	0.125	0	1.33	1	2

Таблица 1. параметры гидравлических функций одиночной поры

2 Модель взаимодействующих капилляров

Как уже отмечалось выше, принципиальным недостатком микромоделей пористой среды, основанных на рассмотрении связки капилляров является игнорирование взаимодействия пор между собой. Поэтому на сегодняшний день значительно более реалистичным считаются решетчатые модели, явным образом учитывающие связи между отдельными капиллярами. Далее будет использоваться подход, моделирующий пористую среду решеткой со связями - цилиндрическими капиллярами различного поперечного сечения. Узлы решетки считаются лишенными объема и лишь соединяющими связи между собой, размер узла считается совпадающим с максимальным размером выходящих из него капилляров. В реальных пористых средах узлы соответствуют расширениям пор, связи - сужениям

пор (горла пор), лимитирующих потоки между узлами.

2.1 Решетка

Двумя наиболее важными характеристиками решетки являются координационное число Z , определяющее среднее число входящих из одного узла связей, и плотность распределения поперечных размеров связей (капилляров). Основной интерес для данной работы представляют используемые в лабораторных экспериментах пористые засыпки из неконсолидированных сферических частиц. Ряд исследователей [7],[8] определяли среднее координационное число для таких сред и нашли его равным $Z = 4.6$. Поэтому в дальнейших расчетах величина Z будет варьироваться вблизи указанного значения $Z \in [4, 6]$.

В данной работе в качестве закона распределения пор по размерам используется гамма-распределение

$$f_n(L) = f_n(L|\chi, L_0) = \frac{L^\chi}{L_0^{\chi+1} \Gamma(\chi + 1)} \exp(-L/L_0).$$

Здесь L_0, χ - параметры функции распределения.

Следует подчеркнуть, что речь идет о частичной плотности вероятностей

$$f_n(L)dL = \frac{\text{число пор с размерами из интервала } [L, L + dL]}{\text{общее число пор}}$$

отличающейся от введенной ранее объемной плотности f_v . Для пересчета между f_n и f_v необходимо дополнительно указать, как длина капилляра связана с его поперечным размером L . В дальнейшем предполагается, что все связи решетки имеют одну и ту же длину, независимо от их поперечного размера. Поэтому с точностью до нормирующего множителя $f_v(L)$ совпадает с $L^2 f_n(L)$. Для гамма-распределения имеем

$$f_v(L) = f_v(L|\chi, L_0) = \frac{L^{\chi+2}}{L_0^{\chi+3} \Gamma(\chi + 3)} \exp(-L/L_0).$$

Соответствующие данным плотностям f функции распределения будем обозначать через F . Для гамма-распределения они выражаются через неполные гамма функции $P(y, \chi)$ формулами

$$F_n(L) = F_n(L|\chi, L_0) = P(L/L_0, \chi + 1),$$

$$F_v(L) = F_v(L|\chi, L_0) = P(L/L_0, \chi + 3).$$

2.2 Капилляры

Стандартный набор капилляров модели ТО в виде правильных многоугольников был дополнен криволинейным треугольником. На наш взгляд, он в большей степени отвечает внутренней геометрии сферических упаковок, чем правильные многоугольники, используемые при моделировании консолидированных пористых сред [2].

Соответствующие криволинейному треугольнику константы определяются следующим образом

- $a_- = 1.7512$, характеризует критическое значение $p_-(L) = -a_- \sigma / L$ заполнения и осушения капилляра по поршневому механизму;
- $a_0 = \frac{\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}}{(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1)^2} \approx 6.738$, характеризует площадь $A_0(L) = a_0 L^2$ поперечного сечения капилляра;
- $a_1 = \frac{\pi(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1)}{\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}} \approx 3.0139$, характеризует пленочную составляющую $S_{film}(p, L) = a_1 h(p)/L$ степени заполнения $S(p, L)$ капилляра;
- $a_3 = 0.134$, характеризует проницаемость $k_0(L) = a_3 L^2$ полностью заполненного капилляра;
- $a_5 = 2.01$, характеризует пленочную составляющую $k_{film}(p, L) = a_5 h^3(p)/L$ проницаемости частично заполненного капилляра.

Помимо рассмотрения в качестве одного из базисных элементов системы криволинейного треугольника еще одним важным шагом в построении микроскопической модели, способной адекватно описать экспериментальные данные для лабораторных засыпок, является отказ от чрезмерно идеализированного предположения о том, что все капилляры системы имеют одно и то же поперечное сечение и отличаются лишь размерами. Для успешного микромоделирования консолидированных пористых сред мы будем рассматривать смесь капилляров с двумя различными формами поперечного сечения: криволинейный треугольник и круг. Доли тех и других фиксируются одними и теми же, независимо от размера L , так, что

$$\frac{\text{число "треугольных" пор с размерами из интервала } [L, L + dL]}{\text{общее число пор}} = \alpha f_n(L) dL,$$

$$\frac{\text{число "круглых" пор с радиусами из интервала } [L, L + dL]}{\text{общее число пор}} = (1 - \alpha) f_n(L) dL.$$

В дальнейшем там где это будет удобно, будем писать вместо α и $1 - \alpha$ символы $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ соответственно. Аналогичными верхними индексами будем помечать также и другие параметры, относящиеся к элементам смеси.

3 Гидравлические функции при дренаже

3.1 Капиллярная кривая

Нам представляется, что значительно более приближенным к реальной физике процесса является анализ пористой среды как ансамбля взаимодействующих капилляров. В этой модели, каждый капилляр переключается из режима полного заполнения в уголково-пленоочный режим (капилляр осушается) при достижении давлением в системе p критической величины $p_-(L)$. Величина $p_-(L)$ совпадает с давлением, при котором в капилляре существует равновесный мениск, отделяющий жидкость от газа. Сам процесс осушки поры отвечает ("мгновенному") поршневому движению мениска вдоль поры с вытеснением воды из её центральной

части. Такой процесс, однако, имеет своим условием проникновение вытесняющего мениска внутрь капилляра извне (самопроизвольно мениск зародиться не может). Следовательно, если оба узла, на которые опирается данный капилляр, заполнены водой, капилляр также останется заполненным даже при снижении давления ниже критического. Осушение в этом случае произойдет лишь тогда, когда воздух проникнет в один из соседних узлов. Последнее возможно тогда и только тогда, когда хотя бы один из $2(Z - 1)$ капилляров, являющихся непосредственными соседями данного капилляра, осушится.

Обозначим далее чеез $\zeta(p)$ и $\eta(p, L)$ численную долю заполненных капилляров при данном уровне давления среди всех капилляров образца и среди капилляров размера L соответственно. Тогда вероятность того, что все $2(Z - 1)$ соседей данного капилляра заполнены, равна $\zeta^{2(Z-1)}$, в силу чего

$$\eta(p, L) = \begin{cases} 1, & L < L_-(p), \\ \zeta^{2(Z-1)}, & L > L_-(p). \end{cases} \quad (4)$$

Для нахождения ζ достаточно заметить, что

$$\zeta(p) = \int_0^\infty \eta(p, L) f_n(L) dL. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получим для нахождения ζ следующее алгебраическое уравнение

$$\zeta = b + (1 - b)\zeta^{2(Z-1)}, \quad b(p) = F_n(L_-(p)). \quad (6)$$

После определения величины ζ функция $\eta(p, L)$ подсчитывается согласно (4), а полная водонасыщенность s находится осреднением по всем порам:

$$s = s(p) = \int_0^\infty (\eta + (1 - \eta)(\beta S^{(1)}(p, L) + (1 - \beta)S^{(2)}(p, L))) f_v(L) dL. \quad (7)$$

Здесь верхний индекс указывает на один из двух типов пор (1 - треугольные, 2 - круглые), объемная доля β пор первого типа определяется через численную долю α как

$$\beta = \frac{\alpha a_0^{(1)}}{\alpha a_0^{(1)} + (1 - \alpha) \alpha a_0^{(2)}}, \quad a_0^{(1)} = 6.738, \quad a_0^{(2)} = \pi.$$

Обозначая для простоты записи $1 - \zeta^{2(Z-1)}$ через μ и проводя интегрирование в (7), получаем окончательную расчетную формулу для определения капиллярной кривой в виде

$$s(p) = s_{cap}(p) + s_{men}(p) + s_{film}(p) \quad (8)$$

$$s_{cap} = 1 - \mu(p) + \mu(p) F_v(L_-) \quad (9)$$

$$s_{film} = \left(a_1^{(1)} \beta + a_1^{(2)} (1 - \beta) \right) \mu(p) h(p) G_1(L_-) \quad (10)$$

$$s_{men} = \frac{3}{\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}} \beta \mu(p) \sum_{k=1}^3 a_{2k} \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right) r \right)^{1+\frac{k}{2}} G_{1+\frac{k}{2}}(L_-) \quad (11)$$

$$G_k(L) = \int_L^\infty L^{-k} f_v(L) dL.$$

Для гамма-распределения функции G_k вычисляются в явном виде

$$G_k(l) = \frac{\Gamma(\chi + 3 - k)}{L_0^k \Gamma(\chi + 3)} (1 - P(L/L_0, \chi + 3 - k)).$$

Структурно правая часть (8) представляет собой сумму вкладов от полностью заполненных капилляров, уголковых менисков и пленок. Типичные графики суммарной зависимости $s(p)$ и её структурных составляющих $s_{cap}(p)$, $s_{men}(p)$, $s_{film}(p)$ представлены на рис. 2, 3. Указанные на этом рисунке асимптотики составляющих $s_{men}(p)$, $s_{film}(p)$ при $p \rightarrow \infty$ носят универсальный характер. Они непосредственно следуют из асимптотического анализа формул (10), (11) при $z \rightarrow 0$. Так например, капиллярная составляющая $s_{cap}(p)$ для гамма-распределения затухает как $s_{cap}(p) \sim (-p)^{-(3+\chi)}$.

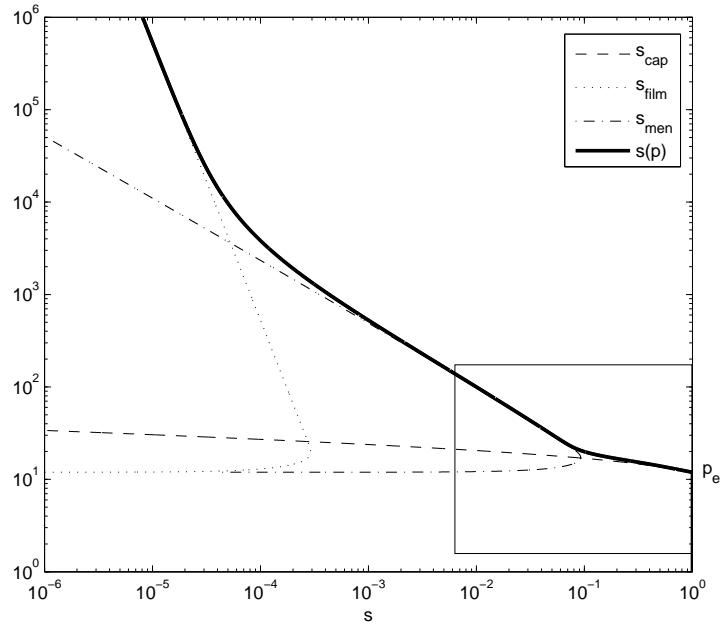


Рис. 2: Зависимость насыщенности от давления (в см. водного столба) для грунта 20/30 во всем диапазоне изменения насыщенности

Как видно на рис. 1. влияние адсорбированных пленок начинает сказываться лишь при очень низких насыщенностях $s \sim 10^{-4}$, и в типичных ситуациях его можно игнорировать. В то же время учет наличия менисков в углах пор необходим, особенно при рассмотрении малых (менее 20%) влажностей. Ещё одной характерной особенностью представленных графиков является резкое изменение вида зависимости $s(p)$ при значениях насыщенности порядка 10%, связанное с переходом от режима полного заполнения пор к уголковому режиму. На наш взгляд, именно эта особенность является причиной общеупотребительного использования концепции остаточной насыщенности s_{res} при обработке экспериментально полученных капиллярных кривых. Напомним, что согласно этой концепции давление неограниченно возрастает при приближении s к s_{res} . В нашем случае вместо неограниченного роста давления при $s \rightarrow s_{res}$ наблюдается резкое усиление его роста.

Наличие предельного p_e значения давления, при превышении которого $s \equiv 1$,

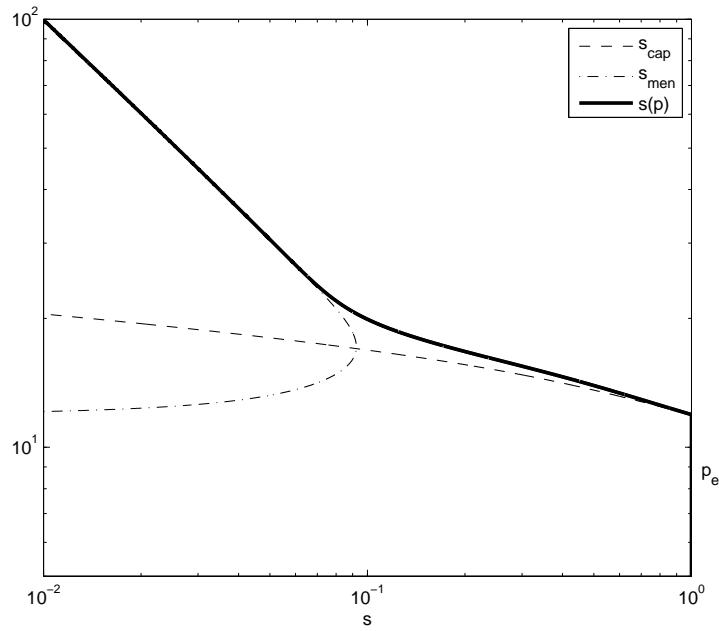


Рис. 3: Зависимость насыщенности от давления (в см. водного столба) для грунта 20/30 в области умеренной влажности

т. н. «air entry pressure», очевидным образом связано с критическим значением b_Z в уравнении (6): оно может быть найдено из условия $b(p_e) = b_Z$. В терминах функции распределения F_n это условие запишется как

$$F_n(L_-(p_e)) = \frac{2Z - 3}{2Z - 2} \quad (12)$$

Условие (12) естественным образом задаёт связь между параметрами функции распределения χ и L_0 , которая в дальнейшем может быть использована при верификации модели. Такая возможность связана с тем, что, как правило, в экспериментах с хорошо отсортированными однородными средами величина p_e является ярко выраженной и может быть определена с хорошей точностью.

3.2 Относительная фазовая проницаемость

Относительная фазовая проницаемость K ненасыщенной пористой среды определяется как отношение проницаемости среды в данном состоянии к проницаемости полностью насыщенной среды. Обычно её считают функцией насыщенности

$$K = K(s), \quad K(1) = 1.$$

В процессе первичного дренажа насыщенность s и давление p связаны однозначной зависимостью $s = s(p)$, поэтому в качестве аргумента K можно использовать p и вычислять $K(p)$ при каждом заданном уровне p давления в системе.

Для вычисления относительной фазовой проницаемости K решётки капилляров будем пользоваться известной электрической аналогией, сводящей проблему отыскания фазовой проницаемости к задаче нахождения эффективной проводимости решетки по заданному распределению проводимостей её связей. В таком контексте проводимость k каждой связи есть коэффициент пропорциональности между объемным потоком влаги через соответствующий капилляр и перепадом давления в узлах, соединяемых данной связью. Следовательно, с точностью до несуществующего множителя, проводимость определяется через проницаемость капилляра k и площадь его поперечного сечения $a_0^{(i)} L^2$ как

$$\tilde{k} = a_0^{(i)} L^2 k.$$

В свою очередь, проницаемость капилляра зависит от его формы, размера и состояния (заполнен он полностью или нет).

$$k = \begin{cases} a_3^{(i)} L^2, & \text{капилляр заполнен,} \\ L^2 A_4^{(i)}(r/L) + a_5^{(i)} h^3(p)/L, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь верхний индекс (i) указывает на тип капилляра, коэффициент a_5 и функция

A_4 определяют соответственно пленочную и уголковую составляющие проницаемости.

Считая далее проводимости пор распределенными независимо друг от друга и пользуясь хорошо известной аппроксимацией среднего поля найдем эффективную проводимость решетки $K_*(p)$ как решение следующего алгебраического уравнения

$$\frac{2}{Z} = \left\langle \frac{\tilde{k}}{\tilde{k} + K_*(Z/2 - 1)} \right\rangle \quad (13)$$

Под средним здесь понимается математическое ожидание относительно заданной плотности $f_n(\tilde{k})$, которая полностью восстанавливается по известным плотностям $f_n(L)$ распределения пор по размерам, долям $\alpha, 1 - \alpha$ пор различных типов и доли $\eta(p, L)$ заполненных пор данного размера. С точностью до не зависящего от давления множителя (который не существенен и определяется на завершающей стадии вычислений по условию нормировки $K(1) = 1$), найденная величина $K_*(p)$ совпадает с искомой зависимостью $K(p)$.

Степень заполнения капилляра	Плотность вероятностей	
частично	$\alpha^{(i)} \mu(p) f_n(L)$	
Полностью	$L < L_-$	$\alpha^{(i)} f_n(L)$
	$L > L_-$	$\alpha^{(i)} (1 - \mu(p)) f_n(L)$

Таблица 2. Распределение проводимостей капилляров при первичном дренаже. Верхний индекс

$i=1,2$ указывает на элемент смеси

Переходя далее в правой части (13) к интегрированию по L и учитывая представленные в табл. 2 суммарные данные о распределении проводимости пор, получим после элементарных преобразований следующую безразмерную форму ал-

алгебраического уравнения для нахождения $K(p)$

$$\frac{2}{Z} = \int_0^\infty F_0 f_n(L) dL - \mu(p) \int_{L_-}^\infty F_0 f_n(L) dL + \mu(p) \int_{L_-}^\infty F_1 f_n(L) dL, \quad (14)$$

$$F_0 = F_0(L, K) = \alpha \frac{a_0^{(1)} a_3^{(1)} L^4}{a_0^{(1)} a_3^{(1)} L^4 + K} + (1 - \alpha) \frac{a_0^{(2)} a_3^{(2)} L^4}{a_0^{(2)} a_3^{(2)} L^4 + K},$$

$$F_1 = F_1(p, L, K) = \alpha \frac{a_0^{(1)} L^4 A_4(r/L) + a_0^{(1)} a_5^{(1)} h^3(p)L}{a_0^{(1)} L^4 A_4(r/L) + a_0^{(1)} a_5^{(1)} h^3(p)L + K} + (1 - \alpha) \frac{a_0^{(2)} a_5^{(2)} h^3(p)L}{a_0^{(2)} a_5^{(2)} h^3(p)L + K}.$$

Численное решение этого алгебраического уравнения не вызывает трудностей. Типичная зависимость относительной фазовой проницаемости $K(s)$ представлена на рис. 4. По графику видно, что существует некое пороговое значение s , которое достигается при уменьшении проницаемости K . Будем обозначать это пороговое значение через s_{res}^k и говорить о нем как об остаточной (по проницаемости) насыщенности. Заметим, что s_{res}^k отличается в большую сторону от другого предельного значения s_{res}^p , связанного с началом резкого роста функции капиллярного давления $P(s)$. Наличие порогового значения s_{res}^k обусловлено тем, что по его достижению система хорошо проводящих капилляров (полностью заполненные капилляры и капилляры с менисками) теряет связность. Поэтому в пренебрежении проницаемостью плохо проводящих капилляров потоки влаги в среде оказываются вообще невозможными, а с ее учетом - они определяются пленочной составляющей проницаемости и чрезвычайно малы.

Величина p_{res}^k , отвечающая остаточной насыщенности s_{res}^k при дренаже, может быть найдена из уравнения (14), если положить в нем $a_5 = 0, K = 0$:

$$\frac{2}{Z} = 1 - (1 - \alpha)\mu(p_{res}^k)(1 - F_n(L_-(p_{res}^k))).$$

Учитывая, что в силу (6)

$$1 - F_n(L_-) = \frac{1 - \zeta}{\mu},$$

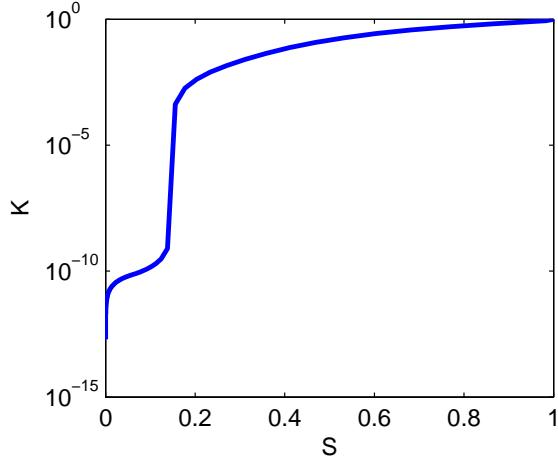


Рис. 4: Зависимость относительной фазовой проницаемости от насыщенности

получим имеющее очевидный физический смысл соотношение

$$\frac{2}{Z} = 1 - (1 - \alpha)(1 - \zeta(p_{res}^k)). \quad (15)$$

Его левая часть указывает на перколяционный порог решетки, вычисленный на основе приближения среднего поля. Правая часть подсчитывает этот порог как долю хорошо проводящих пор (величина $(1 - \alpha)(1 - \zeta)$ есть доля плохо проводящих пор с исключительно пленочным режимом течения жидкости). Заметим далее, что найденное из (15) значение $\zeta(p_{res}^k)$ мало, и, следовательно, хорошим приближением для него является величина $b = F_n(L(p_{res}^k))$. Поэтому (15) можно упростить, придав ему аналогичную (12) форму

$$F_n(L_-(p_{res}^k)) = \frac{2 - \alpha Z}{(1 - \alpha)Z}. \quad (16)$$

Подчеркнем, что используемая в данной работе и опирающаяся на аппроксимацию среднего поля процедура вычисления относительной фазовой проницаемости принципиально отличается от простого взятия арифметического среднего проницаемостей капилляров, используемого в работах Туллера и Ора. Соответственно,

и результаты существенно разнятся. Наш подход представляется физически более обоснованным, платить за это приходится, однако, решением более сложной математической задачи (14). Заметим, что использование аппроксимации среднего поля для схемы ТО привело бы к необходимости решения того же самого уравнения (14), но с $\mu \equiv 1$.

3.3 Верификация модели по экспериментальным данным для дренажа

Построенная микромодель верифицировалась по известным экспериментальным данным дренирования лабораторных засыпок 12/20, 20/30, 30/40. Код засыпки отвечает размерам сит, через которые просеивается песок при подготовке образца. Значения некоторых характеристик исследованных сред приведены в табл. 3.

Песок	Средний диаметр зерен, мм	K_s , см/мин	s_{res}	$-p_e$, см
12/20	1.105	30	0.036	5.42
20/30	0.713	15	0.048	8.66
30/40	0.532	9	0.054	13.03

Таблица 3. Физические данные лабораторных песков

Данные по зависимости относительной проницаемости от насыщенности для песков 12/20, 20/30, 30/40 были предоставлены нам D. Di-Carlo.

При заданном координационном числе решетки Z микромодель полностью определяется тремя параметрами: параметры L_0 и χ функции распределения и доля α треугольных капилляров. Подбор этих параметров осуществлялся исходя

из условия совпадения трёх характерных точек экспериментальных и теоретических кривых. А именно, по экспериментальным данным фиксировались значения p_e , $s_{res}^{(k)}$ и $p_{res}^{(k)} = P_{\text{экс}}^{(k)}$, и решалась система трёх нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} s_{res}^{(k)} &= s(p_{res}^{(k)}, \chi, L_0, \alpha), \\ F_n(L_{-}(p_{res}^{(k)})|\chi, L_0) &= \frac{2 - \alpha Z}{(1 - \alpha)Z} \\ F_n(L_{-}(p_e)|\chi, L_0) &= \frac{2Z - 3}{(2z - 2)} \end{aligned} \quad (17)$$

Относительно трёх неизвестных параметров L_0, χ, α . Два последних уравнения здесь - это уравнения (12), (16) для критических значений $p_e, p_{res}^{(k)}$. Заметим, что наиболее трудоемкая процедура расчета теоретической кривой относительной фазовой проницаемости не нужна при решении (17), поэтому нахождение параметров L_0, χ, α реализуется с малыми вычислительными затратами. Для рекомендованного в литературе координационного числа $Z = 4.6$ из решения (17) для песка 20/30 найдено $\alpha = 0.374, \chi = 32.8, L_0 = 0.0029\text{мм}$. Данные параметры плотности распределения соответствуют среднеквадратичному уклонению

$$\delta = \langle L \rangle^{-1} \langle (L - \langle L \rangle)^2 \rangle^{1/2} = (\chi + 1)^{-1/2} = 0.172.$$

Аналогичная процедура проведена также для песков 12/20, 30/40. Её результаты представлены в табл. 4. Соответствующие найденным значениям параметров гидравлические функции во всех трех случаях вполне удовлетворительно совпадают с экспериментальными данными как по капиллярной кривой (рис. 5, 7, 9), так и по относительной фазовой проницаемости (рис. 6, 8, 10)

Песок	L_0	δ	α
12/20	0.13	0.319	0.205
20/30	0.098	0.172	0.374
30/40	0.074	0.132	0.33

Таблица 4. Параметры микромодели, согласованные с экспериментальными данными

Отклик модели на вариацию параметра Z изучался для песка 20/30. При изменении Z вблизи выделенного значения $Z = 4.6$ подбираемые параметры L_0, χ, α изменяются очень слабо (табл. 5.), а хорошее совпадение экспериментальных и теоретических кривых сохраняется вплоть до значений $Z \approx 4$ с одной стороны и $Z \approx 6.5$ с другой.

Z	4	4.5	5	5.5	6	6.5
$\langle L \rangle$	0.139	0.138	0.137	0.136	0.135	0.134
δ	0.166	0.171	0.175	0.178	0.181	0.184
α	0.463	0.388	0.323	0.265	0.211	0.161

Таблица 5. Параметры микромодели, отвечающие песку 20/30 при различных координационных числах Z решетки

Дальнейшее уменьшение либо увеличение Z приводит к заметному ухудшению согласования теории и эксперимента. Оптимальное значение параметра Z достаточно субъективно оценивается нами величиной $Z \approx 5.5$. По сравнению с базовым вариантом $Z = 4.6$ при $Z = 5.5$ несколько улучшается качество описания кривой относительной фазовой проницаемости. Однако, на наш взгляд, этот "оптимум" не столько ярко выражен, чтобы придавать ему слишком большое значение и отказываться в его пользу от достаточно обоснованного теоретически универсального значения $Z = 4.6$.

Отметим три важных факта, которые говорят в пользу адекватности используемого в данной работе подхода к нахождению гидравлических кривых. Во-первых,

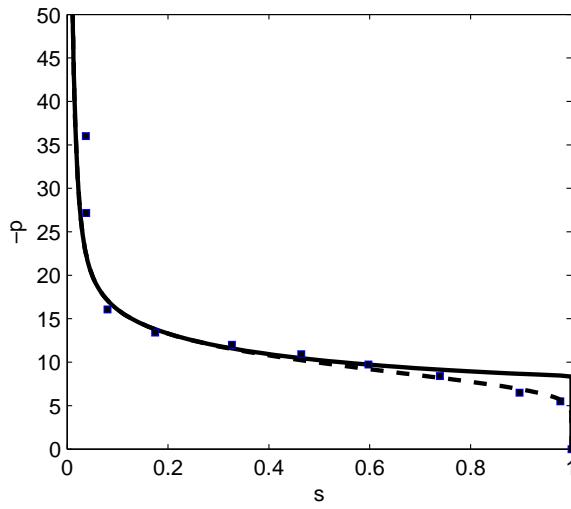


Рис. 5: Сравнение теоретической зависимости давления от насыщенности (сплошная линия) с экспериментальными данными (маркеры) для песка 12/20 при $Z = 4.6$

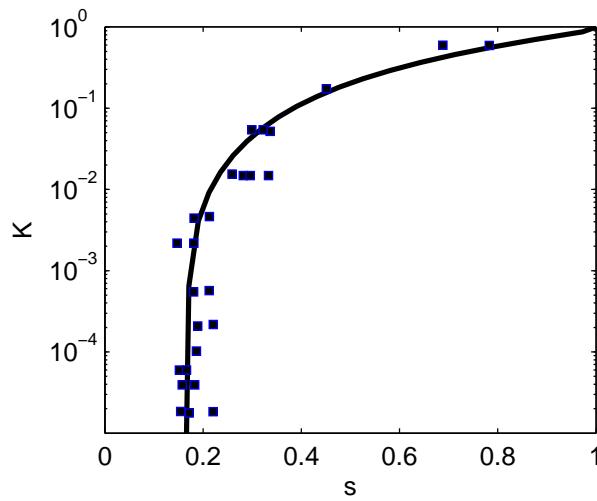


Рис. 6: Сравнение теоретической зависимости фазовой проницаемости от насыщенности (сплошная линия) с экспериментальными данными (маркеры) для песка 12/20 при $Z = 4.6$

найденные в результате подбора параметров оптимальные величины среднего размера пор $\langle L \rangle$ хорошо коррелирует со средним размером зерен. Первые из них соотносятся между собой в пропорции 1:0.70:0.48, в то время как вторые - в пропорции 1:0.65:0.48. В то же время примерно пятикратное превышение диаметра зерен над

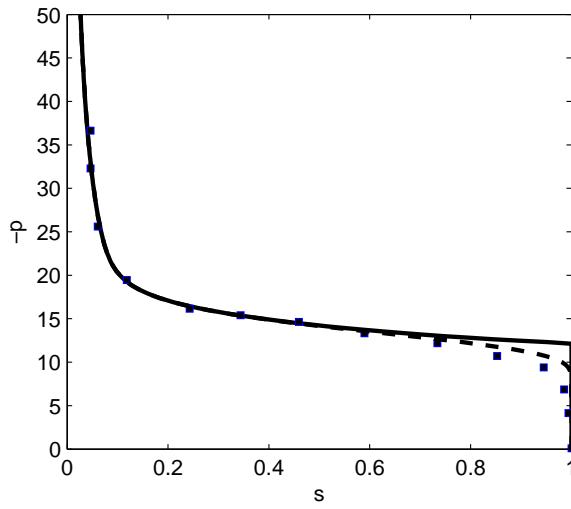


Рис. 7: Сравнение теоретической зависимости давления от насыщенности (сплошная линия) с экспериментальными данными (маркеры) для песка 20/30 при $Z = 4.6$

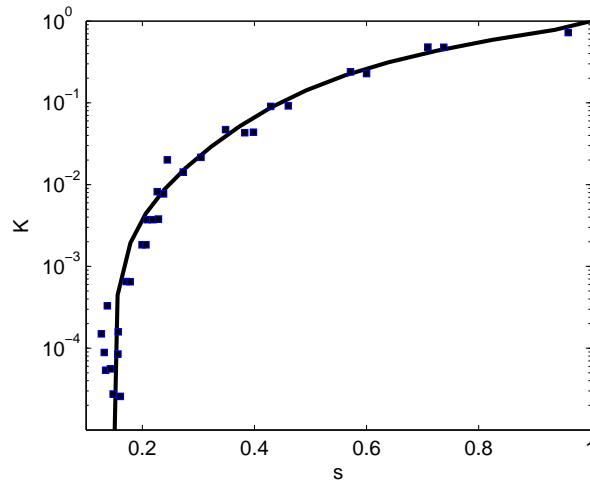


Рис. 8: Сравнение теоретической зависимости фазовой проницаемости от насыщенности (сплошная линия) с экспериментальными данными (маркеры) для песка 20/30 при $Z = 4.6$

радиусами пор представляется с геометрической точки зрения достаточно разумной величиной. Во-вторых, относительное среднеквадратичное уклонение распределения пор по размерам растет при переходе от песков 30/40 к 20/30 и далее к 12/20, что согласуется с увеличением разброса диаметров частиц, составляющих

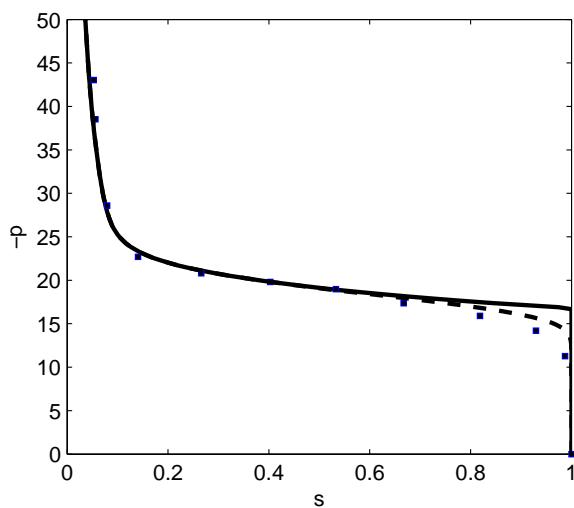


Рис. 9: Сравнение теоретической зависимости давления от насыщенности (сплошная линия) с экспериментальными данными (маркеры) для песка 30/40 при $Z = 4.6$

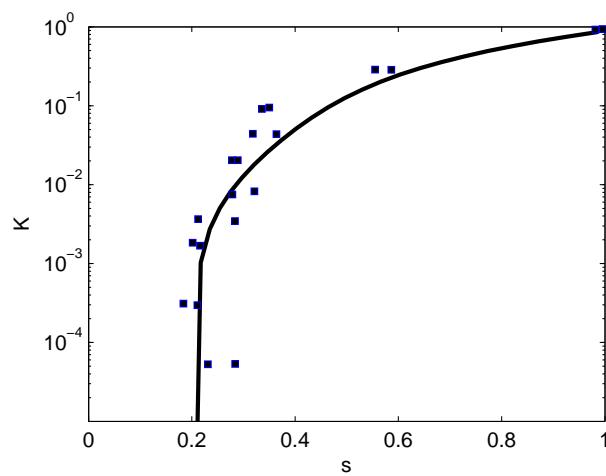


Рис. 10: Сравнение теоретической зависимости фазовой проницаемости от насыщенности (сплошная линия) с экспериментальными данными (маркеры) для песка 30/40 при $Z = 4.6$

указанные среды.

Интересно рассмотреть также упрощенную игнорированием взаимодействия пор друг с другом модель (модель ТО) на тех же самых экспериментальных данных. При этом, разумеется, модель ТО модифицируется с использованием пред-

ложенной в данном разделе геометрии порового пространства и способа вычисления относительной фазовой проницаемости. Единственное отличие между двумя моделями выражается в замене в расчетных формулах (8) и (14) функции $\mu(p)$ на константу $\mu = 1$. Оставляя в стороне процедуру согласования модифицированной модели ТО с экспериментальными данными, отметим лишь, что оптимальные значения параметров L_0, χ, α практически совпадают со значениями, которые были получены ранее для модели, учитывающей взаимодействие пор. Капиллярные кривые для упрощенной модели показаны на рис. 5, 7, 9 пунктирными линиями. Зависимости $K(s)$ для обеих моделей также практически неразличимы (относительная погрешность менее 2.5% во всем диапазоне изменения s). Таким образом, по крайней мере для рассмотренных пористых сред игнорирование взаимодействия между порами для случая дренажа оказывается вполне допустимыми.

4 Гидравлические функции при пропитке

4.1 Капиллярная кривая

Процесс является более сложным процессом, чем дренаж. Это связано с тем, что условия заполнения водой узлов при пропитке отличаются от условия проникновения в узел воздуха при дренаже. Различие связано с тем, что размер узла не меньше размера выходящих из него связей и, следовательно, капиллярный порог узла выше капиллярного порога связей. Поэтому при дренаже воздух автоматически проникнет в узел, как только он окажется в одном из выходящих из него капилляров, а при пропитке узел может остаться незаполненным даже если несколько выходящих из него капилляров (меньшего размера) заполнены водой. В это же время введено понятие кооперативного механизма заполнения узлов. Оно заключается в том, что чем больше выходящих из узла капилляров заполнено водой, тем мениск меньшего радиуса способен проникнуть в узел, а, значит, тем при меньшем уровне давления в системе произойдет заполнение узла. Формализуя этот факт, вводят ранжированную по-следовательность $p_1 < p_2 < \dots < p_{Z-1}$ пороговых давлений, при которых происходит заполнение узла при наличии $Z - i$ заполненных выходящих из него капилляров (события I_1, I_2, \dots, I_{Z-1}). Величина p_1 обычно определяется [9] условием существования равновесного мениска в узле, $p_1 = -a\sigma/L_{site}$. В силу того, что размер L_{site} узла в нашей модели совпадает с максимальным размером выходящих из него капилляров, имеем

$$p_1 = \max p_-^1, \dots, p_-^Z, \quad (18)$$

где через p_-^i обозначены критические значения p_- давления для выходящих из узла капилляров. Информация о последующих пороговых значениях давления p_2, p_3, \dots носит менее точный характер. Предлагаемые в различных работах [Blunt, 1998, Oren et.al, 1998, Patzek, 2000] формулы для их вычисления вряд ли можно назвать строго обоснованными. На их основе тем не менее ясно, что величина p_2

существенно выше чем p_1 , и поэтому во многих ситуациях события I_2, I_3, \dots разумно попросту игнорировать. Применяя, например, соотношение из [Patzek, 2000] к случаю однородных (с порами одного размера) сред, получим в качестве оценки, что величина p_2 отличается от $p_1 = p_-$ в 2.74 раза. Это значение заметно превышает критическое давление p_+ для пор любой формы Ясно, что в этом случае событие I_2 попросту не может наступить, так как значительно раньше с ростом давления сработает “snap-off” механизм заполнения пор. Учитывая изложенное, ограничимся в дальнейшем рассмотрением лишь механизма I_1 кооперативного заполнения узла. Еще одним обстоятельством, которое не учитывается в модели ТО и будет, в некотором приближении, учтено в развивающейся нами микромодели, является наличие в среде защемленного воздуха. В процессе пропитки пора либо некоторая система связанных пор (кластер), может оказаться окруженной со всех сторон водой. Заполнение такой поры (кластера) водой в дальнейшем оказывается невозможным из-за слабой сжимаемости воздуха в рабочем диапазоне давлений (десятки сантиметров водного столба при фоновом давлении в 1 атмосферу = 10 метров водного столба). Полный учет эффекта защемления воздуха является сложной задачей, которую можно решить, видимо, лишь на основе непосредственного численного моделирования процесса пропитки на решетке капилляров. Соответствующие численные эксперименты [Панфилов, 1995, Blunt 1998] показывают, что для пористых сред с малой относительной дисперсией распределения пор по размерам воздушные кластеры невелики, а большинство из них состоит лишь из одной поры. Поэтому в первом приближении разумно учитывать лишь эту возможность защемления воздуха. Дополнительный учет механизма I_1 кооперативного заполнения и наличия энтралпированного воздуха приводит к следующему выражению для зависимости $\eta(p, L)$ доли полностью заполненных водой

пор данного размера L от давления p

$$\eta(p, L) = \begin{cases} 1 - \zeta^{2Z-2}(p_+(L)), & p > p_+(L), L < L_+(p), \\ 2\zeta^{Z-1}(p)(1 - \zeta^{Z-1}(p)), & p_- < p < p_+, L_+ < L < L_-, \\ 0, & p < p_-(L), L > L_-(p). \end{cases} \quad (19)$$

Здесь $\zeta(p)$ по-прежнему обозначает общую долю заполненных пор при данном уровне давления p в системе. Прокомментируем формулу (19). Ее нижняя строка указывает, что при $p < p_-(L)$ соответствующий капилляр ни при каких условиях не может быть полностью заполнен. Средняя строка (с учетом (18)) указывает на то, что необходимым и достаточным условием заполнения выделенной поры в диапазоне давлений $p \in [p_-, p_+]$ является требование того, чтобы либо все $Z - 1$ ее “правых” соседей либо все $Z - 1$ ее “левых” соседей (но не те и другие одновременно) оказались заполненными водой. Под “правыми” и “левыми” соседями мы понимаем капилляры, входящие в один из двух узлов, на которые опирается выделенный капилляр. Указанное условие при этом есть ни что иное, как условие срабатывания механизма I_1 кооперативного заполнения не блокированной со всех сторон водой поры. Наконец, верхняя строка в (19) указывает на то, что

1. с переходом давления через критическое значение $p_+(L)$ заполненными будут все поры данного размера L за исключением тех, в которых воздух заблокирован непосредственными соседями;
2. при $p > p_+(L)$ нет механизмов, изменяющих состояние поры, в силу чего величина η будет оставаться неизменной с дальнейшим ростом давления.

Для нахождения $\zeta(p)$ по-прежнему можно воспользоваться соотношением (5), получив в результате интегрирования (19) уравнение следующего вида

$$\zeta(p) = \int_0^{L_+(p)} (1 - \zeta^{2Z-2}(L)) f_n(L) dL + 2\zeta^{Z-1}(p)(1 - \zeta^{Z-1}(p)) \int_{L_+(p)}^{L_-(p)} f_n(L) dL. \quad (20)$$

При численном решении уравнения (20) удобно свести его дифференцированием по p к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d\zeta}{dp} = \frac{(\zeta^{2Z-2} - 1)f_n(L_+)L_+ + 2\zeta^{Z-1}(1 - \zeta^{Z-1})(f_n(L_+)L_+ - f_n(L_-)L_-)}{p[1 - (2Z - 2)\zeta^{Z-2}(2\zeta^{Z-1} - 1)(F_n(L_+) - F_n(L_-))]} \quad (21)$$

и решать это дифференциальное уравнение с граничным условием $\zeta(\infty) = 0$. Результаты такого решения для $Z = 4.6$ и значений параметра плотности распределения $\chi = 9, 33, 56$, соответствующих лабораторным пескам $12/20, 20/30, 30/40$, представлены на рис. 11. Там же для сравнения изображены зависимости ζ , отвечающие выбору $Z = \infty$ (модель ТО). Обратим внимание на то, что результат решения практически не зависит от значения параметра $a_- \in [1.75, \infty]$. Это объясняется следующим. При малых p величина ζ также мала, в силу чего вторым слагаемым в правой части (20) можно пренебречь по сравнению с первым. Значение ζ растет при достижении p значений отвечающих пику плотности распределения $f_n(L)$. Но в силу узости пика весь он в этом случае лежит значительно левее величины L_- и верхний предел интеграла в правой части (20) может быть без ущерба для точности вычислений заменен бесконечностью. Из рис. 11 видно, что при $\zeta \geq 0.5$ наблюдается существенное различие между моделью ТО и предлагаемой микромоделью. Наиболее ярко оно выражено в том, что в отличие от модели ТО, развиваемая в данной работе микромодель предсказывает наличие предельного значения $\zeta_{air} < 1$, а, значит и остаточной по воздуху насыщенности $s_{air} < 1$. При достаточно больших значениях χ (для достаточно однородных сред) остаточное значение ζ_{air} зависит лишь от координационного числа Z решетки. Это можно наблюдать на рис. (для $Z = 4.6$ с изменением χ от 9 до ∞ остаточное значение изменяется от 0.8973 до 0.8965). Объясняется этот факт теми же соображениями, что и независимость ζ от параметра a_- . Обратимся к вычислению главной кривой пропитки $s = s(p)$. Будем игнорировать при этом для простоты пленочную составляющую насыщенности, что вполне допустимо, если только не работать в области сверхмалых влажностей $s < 10^{-4}$. Разобъем при

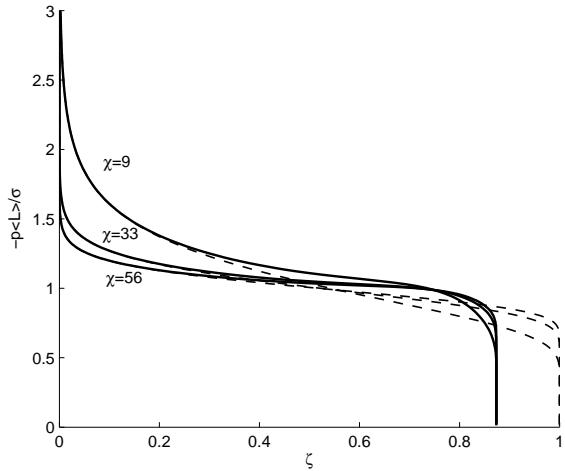


Рис. 11: Зависимость доли полностью заполненных пор ζ от безразмерного давления при различных значениях параметра χ плотности распределения пор по размерам. Сплошные линии - модель с учетом кооперативного заполнения и защемленного воздуха, пунктиры - модель ТО

данном давлении p все множество капилляров на три класса: заполненные водой, неблокированные капилляры с углковым режимом заполнения и блокированные капилляры. Представив в виде суммы соответствующих вкладов

$$s = s(p) = s_{cap} + s_{men} + s_{trap}, \quad (22)$$

подсчитаем независимо друг от друга. Первые два вклада вычисляются аналогично случаю дренажа

$$s_{cap} = \int_0^\infty \eta(p, L) f_v(L) dL, \quad s_{men} = \beta \int_0^\infty \eta_{men}(p, L) S^{(1)}(p, L) f_v(L) dL \quad (23)$$

Здесь через η_{men} обозначена числовая доля неблокированных пор с углковым режимом заполнения. Она за вычетом доли блокированных пор η_{trap} совпадает со

значением $1 - \eta$

$$\eta_{men} = 1 - \eta - \eta_{trap}, \quad \eta_{trap}(p, L) = \begin{cases} \zeta^{2Z-2}(p_+(L)), & L < L_+(p), \\ \zeta^{2Z-2}(p)(1 - \zeta^{Z-1}(p)), & L > L_-(p). \end{cases}$$

Вычисляя интегралы (23), получим

$$s_{cap}(p) = \int_0^{L_+} (1 - \zeta^{2Z-2}(L)) f_v(L) dL + 2\zeta^{Z-1}(p)(1 - \zeta^{Z-1}(p))(F_v(L_-) - F_v(L_+)) \quad (2)$$

$$s_{men}(p) = \frac{3}{\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}} \beta \sum_{k=1}^3 a_{2k} \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right) r \right)^{1+k/2} \times \quad (24)$$

$$[(1 - \zeta^{Z-1}(p))^2 (G_{1+k/2}(L_+) - G_{1+k/2}(L_-)) + (1 - \zeta^{2Z-2}(p)) G_{1+k/2}(L_-)] \quad (25)$$

Перейдем к вычислению насыщенности s_{trap} капилляров с защемленным воздухом. Определенная сложность подсчета s_{trap} вызвана тем, что входящие в число $\eta_{trap}(p, L)$ капилляры были блокированы при различных уровнях давления $p' < p$, а значит, содержат различное количество влаги $S^{(1)}(p', L)$. Поэтому s_{trap} зависит не только от текущего значения p , но и от всех предшествующих давлений

$$s_{trap} = \beta \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^p S^{(1)}(p', L) \frac{d\eta_{trap}(p', L)}{dp'} dp' \right) f_v(L) dL \quad (26)$$

Переставляя здесь пределы интегрирования и подсчитывая интеграл по L явно, получим

$$s_{trap}(z) = \beta \sum_{k=1}^3 a_{2k}^{(1)} \int_0^z z^{1+k/2} G_{1+k/2}(z) d\zeta^{2Z-2}(z) \quad (27)$$

Рассчитанные по формулам (22),(24),(25),(27) главные кривые пропитки для трех лабораторных песков представлены на рис.12 сплошными линиями. Параметры микромодели L_0, χ, α были определены ранее по данным дренажных испытаний. На том же рисунке для сравнения пунктирными линиями приведены кривые про-

питки, вычисленные согласно модели ТО. Как видно из графиков, расхождение между двумя моделями несущественно для $s < 0.5$ в той области, где полностью заполненных пор относительно немного и обоими дополнительными эффектами (зашемления воздуха и кооперативного заполнения пор) можно пренебречь. С ростом s расхождение между моделями усиливается и наиболее ярко проявляется в наличии для разрабатываемой модели остаточной по воздуху насыщенности $s_{air} < 1$. Наличие такой предельной насыщенности – хорошо известный из опытов факт. Более того, вычисленные значения $s_{air} = 0.823, 0.874, 0.879$ для сред 12/20, 20/30, 30/40 соответственно, лежат в известной из экспериментов вилке $0.8 < s_{air} < 0.9$. На рис. 13 для сравнения представлены главная кривая пропитки

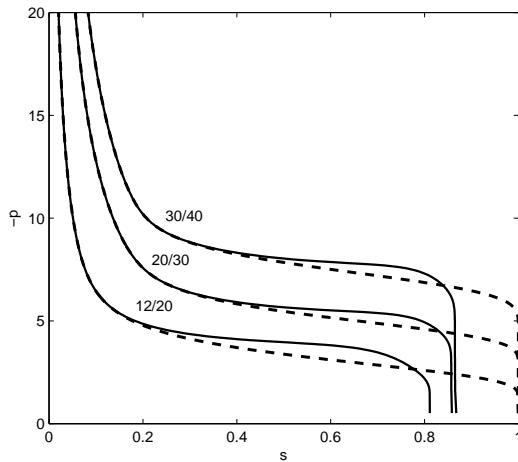


Рис. 12: Главные кривые пропитки для трех лабораторных песков. Сплошные линии – предлагаемая модель, пунктир – модель ТО

для песка 20/30, рассчитанная по представленным выше формулам и главная дренажная кривая для той же среды, определенная в ходе верификации экспериментальных данных [4] в параграфе 3.3. Как видно из этих зависимостей, в области больших и умеренных насыщенностей имеет место примерно двукратное отличие капиллярных кривых пропитки и дренажа, сохраняющееся и для других типов засыпок. Оно объясняется примерно двукратным отличием в значениях p_+, p_-

критических давлений и находит свое подтверждение в экспериментах. Обратим

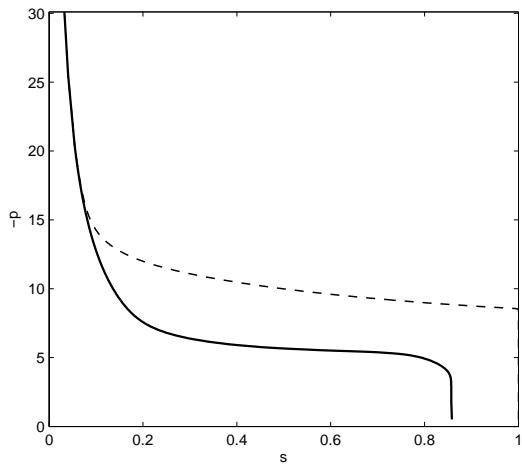


Рис. 13: Главная кривая пропитки (сплошная линия) и главная кривая дренажа (пунктир) для песка 20/30

внимание на то, что ярко выраженный при умеренных s гистерезис капиллярных кривых становится пренебрежимо малым в области малых насыщенностей, где обе кривые оказывается возможным описать единой зависимостью. Этот теоретический результат приобретает особое значение в связи с отсутствием достоверных экспериментальных данных по измерению капиллярных кривых при малых s .

4.2 Относительная фазовая проницаемость

Относительная фазовая проницаемость $K(s)$ при пропитке определяется той же самой формулой (13), что и при дренаже. Необходимо лишь иным способом конкретизировать данные по распределению проводимостей капилляров. Повторяя соответствующие рассуждения, получим приведенные в табл. 6 суммарные данные по распределению проводимостей капилляров. Воспользовавшись этими дан-

ными, преобразуем исходное уравнение к аналогичному безразмерному виду

$$\begin{aligned}
\frac{2}{Z} = & \int_0^{L_+} (1 - \mu(L)) F_2 f_n(L) dL + \int_0^{L_+} \mu(L) F_0 f_n(L) dL + \\
& + 2\zeta^{Z-1}(p)(1 - \zeta^{Z-1}(p)) \int_{L_+}^{L_-} F_0 f_n(L) dL + \\
& + ((1 - \zeta^{Z-1}(p))^2 + \zeta^{2Z-2}(p)) \int_{L_+}^{L_-} F_1 f_n(L) dL + \int_{L_-}^{\infty} F_1 f_n(L) dL
\end{aligned} \tag{28}$$

Степень заполнения капилляра		Плотность вероятностей
частично	$L < L_+$	$\alpha^{(i)}(1 - \mu(p))f_n(L)$
	$L_+ < L < L_-$	$\alpha^{(i)}((1 - \zeta^{Z-1}(p))^2 + \zeta^{2Z-2}(p))f_n(L)$
	$L > L_-$	$\alpha^{(i)}f_n(L)$
полностью	$L < L_+$	$\alpha^{(i)}\mu(p)f_n(L)$
	$L_+ < L < L_-$	$2\alpha^{(i)}\zeta^{Z-1}(p)(1 - \zeta^{Z-1}(p))f_n(L)$

Таблица. 6. Распределение проводимостей капилляров при пропитке. Верхний индекс $i = 1, 2$ указывает на элемент смеси

$$F_0 = F_0(L, K) = \alpha \frac{a_0^{(1)} a_3^{(1)} L^4}{a_0^{(1)} a_3^{(1)} L^4 + K} + (1 - \alpha) \frac{a_0^{(2)} a_3^{(2)} L^4}{a_0^{(2)} a_3^{(2)} L^4 + K}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
F_1 = F_1(p, L, K) = & \alpha \frac{a_0^{(1)} L^4 A_4(r/L) + a_0^{(1)} a_5^{(1)} h^3(p)L}{a_0^{(1)} L^4 A_4(r/L) + a_0^{(1)} a_5^{(1)} h^3(p)L + K} + \\
& + (1 - \alpha) \frac{a_0^{(2)} L^4 A_4(r/L) + a_0^{(2)} a_5^{(2)} h^3(p)L}{a_0^{(2)} L^4 A_4(r/L) + a_0^{(2)} a_5^{(2)} h^3(p)L + K}
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
F_2 = F_2(L, K) = & \alpha \frac{a_0^{(1)} L^4 A_4(1) + c_h a_0^{(1)} a_5^{(1)} L^2}{a_0^{(1)} L^4 A_4(1) + c_h a_0^{(1)} a_5^{(1)} L^2 + K} + \\
& + (1 - \alpha) \frac{a_0^{(2)} L^4 A_4(1) + c_h a_0^{(2)} a_5^{(2)} L^2}{a_0^{(2)} L^4 A_4(1) + c_h a_0^{(2)} a_5^{(2)} L^2 + K}, \quad c_h = -\frac{-A_H}{6\pi\sigma}
\end{aligned} \tag{5}$$

При каждом значении давления p решение алгебраического уравнения (28) определяет относительную фазовую проницаемость K . С учетом известной зависимости $s = s(p)$ это в конечном итоге дает искомую зависимость $K(s)$ фазовой проницаемости от насыщенности. Величину $p_{res}^{(k)}$, отвечающую остаточной насыщенности $s_{res}^{(k)}$, можно найти из уравнений (24) и (28), если положить в последнем из них $a_5 = 0, K = 0$. Результат при этом в точности совпадает с соотношением (15), полученным ранее для случая первичного дренажа. С использованием близости $\zeta_{res}^{(k)}$ к $F_n(L_+(p_{res}^{(k)}))$ (см. рис. 11) получаем аналогичное (16) уравнение

$$F_n(L_+(p_{res}^{(k)})) = \frac{2 - \alpha Z}{(1 - \alpha)Z} \quad (29)$$

для нахождения критической величины $p_{res}^{(k)}$. Из сравнения (29) с (16) следует,

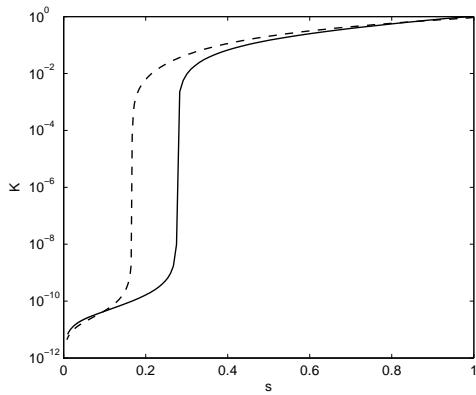


Рис. 14: Зависимость относительной фазовой проницаемости от насыщенности для песка 12/20 во всем диапазоне изменения насыщенности. Сплошная линия – пропитка, пунктирная линия – дренаж

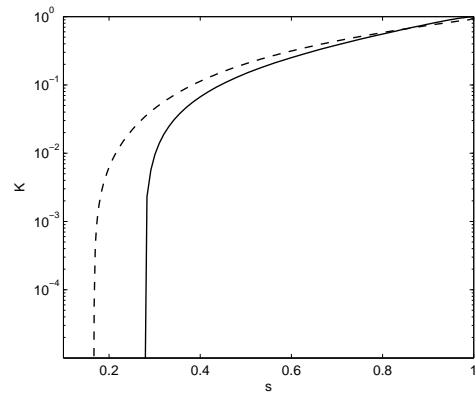


Рис. 15: Зависимость относительной фазовой проницаемости от насыщенности для песка 12/20 в области умеренных и больших насыщенностей. Сплошная линия – пропитка, пунктирная линия – дренаж

что критическое значение $p_{res}^{(k)}$ для пропитки отличается от соответствующего значения для дренажа лишь множителем a_- . Интересно выяснить, как соотносятся между собой величины $s_{res}^{(k)}$ остаточных насыщенностей при пропитке и дренаже.

Простые оценки показывают, что капиллярная составляющая s_{cap} предельной насыщенности практически одна и та же в обоих случаях: с хорошей точностью ее можно найти как $F_v(L_-(p_{res}^{(k)}))$ для дренажа и как $F_v(L_+(p_{res}^{(k)}))$ для пропитки. Количество же s_{men} жидкости, содержащейся при $p = p_{res}^{(k)}$ в угловых менисках, при пропитке заметно больше чем при дренаже. Причина – в сильной зависимости s_{men} от давления и существенной (в $a_- \approx 2$ раз) разницы в уровне критического давления $p_{res}^{(k)}$ для дренажа и пропитки. Изложенное указывает на то, что остаточная насыщенность при пропитке будет выше, чем при дренаже. Расчеты, часть из которых представлена на рис. 14, 15, подтверждают это заключение. Видно, что кривые относительных фазовых проницаемостей для пропитки и дренажа различны в области малых проницаемостей. В остальном диапазоне изменения насыщенности кривые фазовой проницаемости $K(s)$ для процессов дренажа и пропитки оказываются близки друг к другу. Как правило, в физике почв игнорируют различие между кривыми фазовой проницаемости для дренажа и пропитки. Представленные результаты говорят о том, что это упрощение является оправданным лишь для области умеренных и больших насыщенностей. При малых значениях s имеет место выраженный гистерезис фазовой проницаемости $K(s)$. Это обстоятельство является принципиально важным для ряда теорий. Именно такое поведение фазовых проницаемостей наблюдается и в тщательно проведенных лабораторных экспериментах. Воспроизведение этого факта развивающей в данной работе микромоделью является еще одним свидетельством её адекватности.

Заключение

Представленные в работе результаты показывают, как мы надеемся, возможные пути совершенствования существующих моделей влагопереноса в пористых средах. К этим путям относится, например, построение более реалистичных микромоделей пористых сред. Реалистичность здесь может достигаться через отказ от слишком идеализированного представления о пористой среде как о связке невзаимодействующих капилляров цилиндрического поперечного сечения. Привлечение более тонких моделей геометрии внутрипорового пространства и учёт взаимодействия пор друг с другом позволяет принять во внимание дополнительные механизмы переноса жидкости, такие, например, как её транспорт через систему плёнок и уголковых менисков. Это, в свою очередь, расширяет диапазон применимости моделей в область малых насыщенностей, где эксперименты, как правило, не всегда могут предоставить исчерпывающую информацию.

Список используемой литературы

1. Or D. Flow in unsaturated fractured porous media: Hydraulic conductivity of rough surfaces / D. Or, M. Tuller // Water Resour. Res. - 2000. - Vol.36. - No. 5. - P. 1165-1177.
2. Iwamatsu M. Capillary condensation and adhesion of two wetter surfaces / M. Iwamatsu, K. Horii // J. Colloid Interface Sci. - 1996. - Vol.182. - P.400-406i.
3. Tuller M. Unsaturated hydraulic conductivity of structured porous media: A review of liquid configuration-based models / M. Tuller, D. Or // Vadose Zone Journal. - 2002. - Vol. 1. - P. 14-37.
4. DiCarlo D. A. Experimental measurements of saturation overshoot on infiltration / D. A. DiCarlo // Water Resour. Res. - 2004. - Vol. 40(4).
5. Баренблatt Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах // Москва "Недра". -1984.
6. Alt W. On nonstationary flow through porous media / W. Alt, S. Luckhaus, A. Visintin // Ann. Math. Pura Appl. J - 1984. - Vol. 136.-P.303-316
7. Bakke S. 3-D pore scale modelling of heterogeneous sandstone reservoir rocks and quantitative analysis of the architecture, geometry and spatial continuity of the pore network / S. Bakke, P. Oren // Soc. Pet. Eng. - 1996. - SPE paper 35479
8. Yanuka M. Percolation processes and porous media / M. Yanuka, F. Dullien, D. Enick // J. Colloid Interface Sci. -1986. - Vol. 112. - P.24-41.
9. Patzek T.W. Verification of a complete pore network model of drainage and imbibition / T.W. Patzek // Soc. Pet. Eng. - 2000. - SPE paper 59312
10. Yuan Y., Zhao Z., Nie J., Xu Y. Pore Network Analysis of Zone Model for Porous Media Drying//Mathematical Problems in Engineering J - 2014. - Vol. 2014.

11. Raoof A., Hassanzadeh S. M. Saturation-dependent solute dispersivity in porous media: Pore-scale processes//Water Resources Research J - 2013. - Vol. 49.