ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 11 (438)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.98

Р.З. АБДУЛЛАЕВ

КРИТЕРИЙ ИЗОМОРФНОСТИ НЕКОММУТАТИВНЫХ АЛГЕБР АРЕНСА

1. *Введение.* Пусть M — полуконечная алгебра фон Неймана, μ — точный нормальный полуконечный след на M, $(L^p(M,\mu), \| \ \|_p)$ — банахово пространство всех μ-измеримых операторов, присоединенных к M и интегрируемых с p-степенью. Множество $L^\omega(M,\mu) = \bigcap\limits_{p\geq 1} L^p(M,\mu)$ является заполненной $*$-подалгеброй в $*$-алгебре $K(M,\mu)$ всех μ-измеримых операторов, присоединенных к M [1], [2]. Впервые такие алгебры рассматривались в работе Аренса [3] в случае, когда $M = L^\infty(0,1)$ и $\mu(f) = \int\limits_0^1 f\,dm$, где m — линейная мера Лебега. Впоследствии свойства этих алгебр, ассоциированных с произвольной коммутативной алгеброй фон Неймана изучались в работах [4], [5]. Для произвольных алгебр фон Неймана M-алгебры $L^\omega(M,\mu)$ были введены в [1], [2] и были названы некоммутативными алгебрами Аренса.

Данная работа продолжает исследования свойств алгебр $L^\omega(M,\mu)$. Здесь получены необходимые и достаточные условия для совпадения алгебр $L^\omega(M,\mu)$ и $L^\omega(M,\nu)$, ассоциированных с различными следами μ и ν, установлена неизоморфность этих алгебр в случае, когда μ — конечный, а ν — полуконечный, но не конечный следы на M, найдены условия на алгебры фон Неймана M и N и следы μ и ν на M и N соответственно, обеспечивающие $*$-изоморфность алгебр Аренса $L^\omega(M,\mu)$ и $L^\omega(M,\nu)$.

Все необходимые обозначения и результаты теории алгебр фон Неймана взяты из [6], а теории некоммутативного интегрирования — из [7].

2. *Предварительные сведения.* Пусть M — полуконечная алгебра фон Неймана, μ — точный нормальный полуконечный след на M, $K(M,\mu)$ — $*$-алгебра всех μ-измеримых операторов, присоединенных к M [7]. Через $L^p(M,\mu)$ обозначим банахово пространство всех таких $x \in K(M,\mu)$, для которых $\|x\|_p = \mu(|x|^p)^{1/p} < \infty$, где $|x| = (x^*x)^{1/2}$ (см. [8]). Множество $L^\omega(M,\mu) = \bigcap\limits_{p\geq 1} L^p(M,\mu)$ является заполненным линейным подпространством в $K(M,\mu)$. В [1], [2] показано, что $L^\omega(M,\mu)$ — $*$-подалгебра в $K(M,\mu)$ и относительно топологии t_μ, порожденной системой норм $\{\| \ \|_p\}_{p\geq 1}$, $L^\omega(M,\mu)$ — полная метризуемая локально выпуклая $*$-алгебра.

Теорема 1. *Всякий $*$-изоморфизм алгебр Аренса является непрерывным отображением.*

Обозначим через $L_0(M,\mu)$ линейное подпространство в $K(M,\mu)$, порожденное множеством $M \bigcup \Big(\bigcup\limits_{p>1} L^p(M,\mu) \Big)$. Каждый оператор $y \in L_0(M,\mu)$ определяет непрерывный линейный функционал на $(L^\omega(M,\mu), t_\mu)$ по формуле $f_y(x) = \mu(xy)$. В [2] показано, что любой t_μ-непрерывный линейный функционал f на $L^\omega(M,\mu)$ представим в виде $f = f_y$ для некоторого $y \in L_0(M,\mu)$, т. е. сопряженное пространство к алгебре Аренса $(L^\omega(M,\mu), t_\mu)$ можно отождествить с пространством $L_0(M,\mu)$.

Пусть μ и ν — точные нормальные полуконечные следы на алгебре фон Неймана M. Через $h = d\mu/d\nu$ будем обозначать производную Радона–Никодима следа μ относительно ν, т. е. h —

это такой положительный оператор, принадлежащий центру алгебры $K(M, \mu)$, для которого выполняется равенство $\mu(x) = \nu(hx)$ при всех $x \in M$.

3. *Критерий совпадения некоммутативных алгебр Аренса*

Теорема 2. *Пусть μ, ν — точные нормальные полуконечные следы на алгебре фон Неймана M, $h = d\mu/d\nu$. Тогда $L^\omega(M, \nu) \subset L^\omega(M, \mu)$ в том и только случае, когда $h \in L_0(M, \eta)$.*

Доказательство. Пусть $L^\omega(M, \nu) \subset L^\omega(M, \mu)$, тогда для каждого $x \in L^\omega(M, \nu)$ выполняется равенство $\mu(x) = \nu(hx)$, т. е. μ является положительным линейным функционалом на $L^\omega(M, \nu)$. Поскольку $(L^\omega(M, \nu), t_\nu)$ — полная метризуемая локально выпуклая $*$-алгебра и инволюция непрерывна в t_ν, то μ — t_μ-непрерывный линейный функционал на $L^\omega(M, \nu)$ ([9], теорема 5.5, с. 287). Следовательно, найдется такой оператор $y \in L_0(M, \nu)$, что $\nu(hx) = \mu(x) = \nu(yx)$ для всех $x \in L^\omega(M, \nu)$. Это означает, что $h = y$ и поэтому $h \in L_0(M, \nu)$.

Обратно, если $h \in L_0(M, \nu)$, то $\mu(x) = \nu(hx)$ является t_ν-непрерывным линейным функционалом на $L^\omega(M, \nu)$. Пусть $x \in L^\omega(M, \nu)$, $p \geq 1$, тогда $|x|^p \in L^\omega(M, \nu)$ и $\mu(|x|^p) < \infty$. Это означает, что $L^\omega(M, \nu) \subset \bigcap_{p \geq 1} L^p(M, \mu) = L^\omega(M, \mu)$. □

Из теоремы 2 получаем критерий совпадения алгебр Аренса.

Следствие. Пусть μ, ν — точные нормальные полуконечные следы на алгебре фон Неймана M. Следующие условия эквивалентны:

(i) $L^\omega(M, \mu) = L^\omega(M, \nu)$,
(ii) $\frac{d\mu}{d\nu} \in L_0(M, \nu)$, $\frac{d\nu}{d\mu} \in L_0(M, \mu)$.

4. *Критерий $*$-изоморфизма некоммутативных алгебр Аренса.* Пусть M и N — алгебры фон Неймана, α — $*$-изоморфизм из M на N, μ — точный нормальный полуконечный след на M. Рассмотрим на N след $\lambda(x) = \mu(\alpha^{-1}(x))$. Из [10] следует, что существует единственное биективное положительное линейное отображение $\widehat{\alpha} : L^1(M, \mu) + M \to L^1(N, \lambda) + N$, совпадающее с α на M такое, что $\lambda(\widehat{\alpha}(x)) = \mu(x)$ для всех $x \in L^1(M, \mu)$. В частности, $\widehat{\alpha}(L^p(M, \mu)) = L^p(N, \lambda)$ и $\|\widehat{\alpha}(x)\|_p = \|x\|_p$ для всех $x \in L^p(M, \mu)$, $p \geq 1$. Следовательно, $\widehat{\alpha}(L^\omega(M, \mu)) = L^\omega(N, \lambda)$ и сужение $\widetilde{\alpha}$ отображения $\widehat{\alpha}$ на $L^\omega(M, \mu)$ является непрерывным отображением из $(L^\omega(M, \mu), t_\mu)$ на $(L^\omega(N, \lambda) t_\lambda)$. Так как $(L^\omega(M, \mu), t_\mu)$ — локально выпуклая алгебра, а $M \bigcap L^\omega(M, \mu)$ — t_μ-плотно в $L^\omega(M, \mu)$, то $\widetilde{\alpha}(xy) = \widetilde{\alpha}(x)\widetilde{\alpha}(y)$ для любых $x, y \in L^\omega(M, \mu)$, т. е. $\widetilde{\alpha}$ — $*$-изоморфизм из $(L^\omega(M, \mu), t_\mu)$ на $(L^\omega(N, \lambda), t_\lambda)$.

Определение. Следы μ и ν назовем эквивалентными, если существует такой $*$-изоморфизм $\alpha : M \to N$, что $L^\omega(N, \nu) = L^\omega(N, \mu \circ \alpha^{-1})$.

Поскольку любой $*$-изоморфизм из $L^\omega(M, \mu) \bigcap M$ на $L^\omega(N, \nu) \bigcap N$ продолжается до $*$-изоморфизма из M на N, то из предыдущих рассуждений вытекает следующее

Утверждение. *Пусть μ и ν — точные нормальные полуконечные следы на алгебрах фон Неймана M и N соответственно. Тогда алгебры Аренса $L^\omega(M, \mu)$ и $L^\omega(N, \nu)$ $*$-изоморфны в том и только том случае, когда следы μ и ν эквивалентны.*

Теорема 3. *Пусть μ — точный нормальный конечный, а ν — точный нормальный полуконечный, но не конечный следы на алгебре фон Неймана M. Тогда алгебры Аренса $L^\omega(M, \mu)$ и $L^\omega(M, \nu)$ не $*$-изоморфны.*

Доказательство. Предположим, что α — $*$-изоморфизм из $L^\omega(M; \mu)$ на $L^\omega(M; \nu)$ и y — произвольный элемент из $L^\omega(M; \nu)$. Тогда из соотношений

$$\alpha(\mathbf{1})y = y\alpha(\mathbf{1}) = \alpha(x)\alpha(\mathbf{1}) = \alpha(x\mathbf{1}) = \alpha(x) = y$$

следует, что $\alpha(\mathbf{1})$ — единица алгебры $L^\omega(M; \nu)$. Поскольку в $L^\omega(M, \nu)$ существуют элементы с носителем $\mathbf{1}$, то $\alpha(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \in L^\omega(M, \nu)$, что противоречит не конечности следа ν. Следовательно, алгебры Аренса $L^\omega(M; \mu)$ и $L^\omega(M; \nu)$ не изоморфны. □

Литература

1. Закиров Б.С. *Некоммутативные алгебры Аренса* // Узбек. матем. журн. – 1997. – № 1. – С. 17–24.
2. Абдуллаев Р.З. *Пространства, сопряженные к некоммутативным алгебрам Аренса* // Узбек. матем. журн. – 1997. – № 2. – С. 3–7.
3. Arens R. *The space* L^ω *and the convex topological rings* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1946. – V. 52. – P. 931–935.
4. Bhatt S.J. *On Arens algebras* L^ω // Glasgow Math. J. – 1980. – V. 15. – № 2. – P. 305–312.
5. Bhatt S.J. *On Arens algebras* L^ω. II // Glasgow Math. J. – 1981. – V. 16. – № 2. – P. 297–306.
6. Takesaki M. *Theory of operator algebras.* I. – New York: Springer, 1979.
7. Fack T., Kosaki H. *Generalized* s*-numbers of* τ*-measurable operators* // Pacif. J. Math. – 1986. – V. 123. – № 2. – P. 269–300.
8. Yeadon F.J. *Non-commutative* L^p*-spaces* // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1975. – V. 77. – № 1. – P. 91–102.
9. Шеффер Х. *Топологические векторные пространства.* – М.: Мир, 1966.
10. Yeadon F.J. *Ergodic theorems for semifinite von Neumann algebras.* II // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1980. – V. 88. – P. 135–147.

Институт математики
Академии наук Узбекистана

Поступила
29.09.1997