ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 3 (430)

УДК 517.956

Н.Х. ХАЙРУЛЛИН

МНОГОМЕРНЫЕ ЦЕНТРИРОВАННЫЕ ВОЛНЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

1. *Введение.* Работа посвящена решению многомерной задачи Гурса о центрированной волне, рассмотренной в [1] (с. 538) –[5] в одномерном случае. Установлены достаточные условия единственности и существования голоморфного решения задачи Гурса, поставленной для систем квазилинейных уравнений первого порядка, определенных на аналитическом многообразии. Решена задача в общей постановке.

2. *Локальная задача.* На комплексно m-мерной аналитической поверхности с локальными координатами x_1, x_2, $x=(x_3,x_4,\dots,x_m)$ определены дифференциальные уравнения

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{m} A^k(x_1,x_2,x,W)(\mathfrak{W},\mathfrak{B})_{x_k}=f(x_1,x_2,x,W),\\ \sum_{k=1}^{m} C^k(x_1,x_2,x,W)\mathfrak{U}_{x_k}=h(x_1,x_2,x,W),\end{gathered}\tag{1}$$

$$\begin{gathered}W=(w_1,w_2,\dots,w_n)=(\mathfrak{W},\mathfrak{B},\mathfrak{U}),\\ \mathfrak{W}=(w_1,w_2,\dots,w_q),\quad \mathfrak{B}=(w_{q+1},w_{q+2},\dots,w_p),\quad \mathfrak{U}=(w_{p+1},w_{p+2},\dots,w_n),\\ f=(f_1,f_2,\dots,f_p),\quad h=(f_{p+1},f_{p+2},\dots,f_n);\\ A^k=(a^k_{ij})\ \ (1\le i,j\le p):\ a^1_{ij}=0\ \ (i\ne j),\quad a^1_{ii}=1\ \ (1\le i\le q),\quad a^1_{ii}=0\ \ (q+1\le i\le p),\\ a^2_{ij}=0\ \ (i\ne j,\ \ q+1\le i\le p,\ \ 1\le j\le p),\quad a^2_{ii}=1\ \ (q+1\le i\le p);\\ C^k=(a^k_{ij})\ \ (p+1\le i,j\le n):\ a^2_{ij}=0\ \ (i\ne j),\quad a^2_{ii}=1\ \ (p+1\le i\le n).\end{gathered}$$

Коэффициенты системы (1) определены в области $S\subset\mathbb{C}^{m+n}$ с проекцией $s\subset S$ в $\mathbb{C}^m$. Обозначим $s_3=\{(x_1,x_2,x)\in s: x_2=0\}$, $s_0=\{(x_1,x)\in s_3: x_1=0\}$, $s_1=s_3\setminus s_0$.

Считаем, что s_3 является характеристикой семейства Γ_1 системы (1) и на ней задана функция $\Phi(x_1,x)$ $(\Phi=(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n))$.

Поставим задачу: определить в s_* $(s_1\subset s_*\subset s\setminus s_0)$ решение $W(x_1,x_2,x)$ системы (1), удовлетворяющее на s_1 условию

$$W(x_1,0,x)=\Phi(x_1,x)\tag{2}$$

и допускающее семейство характеристик Γ_1, содержащих s_0.

Характеристики системы (1) определяются интегралами уравнения ([6], с. 85)

$$\det\sum_{k=1}^{m}A^k\eta_{x_k}\det C^k\eta_{x_k}=0.$$

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество голоморфных функций, $S_3=\{(x_1,x_2,x,W)\in S: x_2=0,\ (x_1,x)\in s_3,\ W=\Phi(x_1,x)\}$, D $(s_1\subset D\subset s\setminus s_0)$ — полная область Гартогса с плоскостью симметрии $x_2=0$, проекция которой на плоскость переменных x_1, x — неполная область Гартогса с плоскостью симметрии $x_1 = 0$ ([7], с. 268), Q — область изменения переменных η_{x_k} $(2 \leq k \leq m)$, содержащая точку $\eta_{x_2} = 1$, $\eta_{x_k} = 0$ $(k \geq 3)$.

Теорема 1. *В некоторой окрестности $D \subset s_*$ множества s_1 существует единственное решение $W(x_1, x_2, x) \in \mathfrak{A}(D)$ задачи о центрированной волне* (1), (2), *если $A^k, C^k, f, h \in \mathfrak{A}(S_3)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, $\Phi \in \mathfrak{A}(s_3)$ в $S \times Q$ $\det \sum\limits_{k=1}^{m} C^k \eta_{x_k}$ не зависит от η_{x_1}, в точках S_3 матрица $A = (a_{ij}^2)$ $(1 \leq i, j \leq q)$ имеет q различных собственных значений λ_i, причем $\lambda_1 = \rho x_1^{\rho-1} c(x_1, x_2, x, W)$ $(\rho = 1, 2, \ldots)$, и в S_3 $\det l_* \neq 0$, где l_* получается заменой на $\frac{\partial c}{\partial w_j}$ элементов $l_{1\,j}$ матрицы (l_{ij}), составленной из компонент левых собственных векторов A. Для такого решения*

$$\begin{aligned} &\lim_{x_1 \to 0} y(x_1, x)/x_1^l = \xi, \quad c(0, 0, x, W^0) = \xi, \\ &\lim_{x_1 \to 0} W(x_1, y, (x_1, x), x) = W^0(\xi, x), \\ &L(0, 0, x, W^0)\mathfrak{W}_\xi^0 = 0, \quad \mathfrak{B}^0 = \mathfrak{B}_0^0, \quad \mathfrak{U}^0 = \mathfrak{U}_0^0, \\ &W^0 = (\mathfrak{W}^0, \mathfrak{B}^0, \mathfrak{U}^0), \quad W_0^0 = (\mathfrak{W}_0^0, \mathfrak{B}_0^0, \mathfrak{U}_0^0) = \Phi(0, x), \end{aligned} \tag{3}$$

где $L = (l_{ij})$ $(2 \leq i \leq q,\ 1 \leq j \leq q)$, $x_2 = y(x_1, x)$ — уравнение характеристики семейства Γ_1, отвечающего λ_1.

Теорема 1 доказывается методом С.В. Ковалевской. Голоморфная в D функция W представляется рядом Гартогса-Лорана ([8], с. 146)

$$W = \sum_{i=0}^{\infty} W_i(x_1, x) x_2^{i+1}, \quad W_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} W_{ij}(x) x_1^j. \tag{4}$$

Система (1) имеет только два вида решений

а) решение в форме (4) с коэффициентами

$$\begin{gathered} W_i = (\mathfrak{W}_i, \mathfrak{B}_i, \mathfrak{U}_i), \\ \mathfrak{W}_i = \sum_{j=-(i+1)\rho}^{\infty} \mathfrak{W}_{ij}(x) x_1^j, \quad \mathfrak{B}_j = \sum_{j=-i\rho}^{\infty} \mathfrak{B}_{ij}(x) x_1^j, \quad \mathfrak{U}_i = \sum_{j=-i\rho}^{\infty} \mathfrak{U}_{ij}(x) x_1^j; \end{gathered} \tag{5}$$

б) множество решений в форме (4) с коэффициентами

$$\begin{gathered} \mathfrak{W}_i = \sum_{j=-(i+1+[i/I])\rho}^{\infty} \mathfrak{W}_{ij}(x) x_1^j, \\ \mathfrak{B}_i = \sum_{j=-(i+[(i-1)/I])\rho}^{\infty} \mathfrak{B}_{ij}(x) x_1^j, \quad \mathfrak{U}_i = \sum_{j=-(i+[(i-1)/I])\rho}^{\infty} \mathfrak{U}_{ij}(x) x_1^j, \\ I = 1, 2, \ldots, [i/I] \text{ — целая часть числа } i/I. \end{gathered}$$

Устанавливается, что только решение (4), (5) удовлетворяет постановке задачи и утверждениям теоремы 1.

3. *Глобальная задача.* Квазилинейную систему берем в форме

$$\begin{gathered} C(p)w = g, \\ w = (w_1, w_2, \ldots, w_k),\ g = (g_1, g_2, \ldots, g_k),\ z = (z_1, z_2, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m, \\ p = (p_1, p_2, \ldots, p_m), \quad p_i = \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad C = (c^{sr}),\ \ (1 \leq s, r \leq k), \\ c^{sr} = \sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{q(r)} = 1}^{m} C^{sr}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{q(r)}} p_{\nu_1} p_{\nu_2} \cdots p_{\nu_{q(r)}}. \end{gathered} \tag{6}$$

В ней каждая функция w_r имеет свой наивысший порядок $q(r)$ производных.

Предположение 1. А. Коэффициенты системы (6) определены в области Ω изменения переменных z, $\dfrac{\partial^j w_r}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}\cdots\partial z_m^{i_m}}$ $(i_1+i_2+\cdots+i_m=j,\ j=0,1,\ldots,q(r)-1,\ r=1,2,\ldots,k)$; $c^{sr}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{q(r)}}$, $g\in\mathfrak{A}(\Omega)$,

$$c^{sr}_{\nu_1,\ldots,\nu_i,\ldots,\nu_j,\ldots,\nu_{q(r)}}=c^{sr}_{\nu_1,\ldots,\nu_j,\ldots,\nu_i,\ldots,\nu_{q(r)}}.$$

Б. В проекции ω области Ω в пространство $\mathbb{C}^m$ переменной z определены функции $\psi(z),\varphi(z)\in\mathfrak{A}(w)$, для которых $\operatorname{rang}\frac{\partial(\psi,\varphi)}{\partial z}=2$ в каждой точке ω.

В. На поверхности $\omega_3=\{z\in\omega:\varphi(z)=0\}$ заданы функции $\Psi_{r,i_1,i_2,\ldots,i_m}(z)\in\mathfrak{A}(\omega_3)$, $r=1,2,\ldots,k$; $j=0,1,\ldots,q(r)-1$, $i_1+i_2+\cdots+i_m=j$. В каждой точке области

$$\Omega_3=\left\{z\in\omega_3,\quad \frac{\partial^j w_r}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}\cdots\partial z_m^{i_m}}=\Psi_{r,i_1,i_2,\ldots,i_m}(z)\right\}$$

направления нормалей ω_3 являются характеристическими, и эта поверхность принадлежит семейству характеристик Γ_1.

Г. Направления нормалей поверхности $\psi(z)=\mathrm{const}$ в точках Ω_3 не являются характеристическими.

Пусть $\omega_2=\{z\in\omega:\psi(z)=0\}$, $\omega_0=\omega_2\cap\omega_3$, $\omega_1=\omega_3\setminus\omega_0$. Поставим задачу: определить решение $w(z)$ уравнения (6), удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial^j w_r}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}\cdots\partial z_m^{i_m}}=\Psi_{r,i_1,i_2,\ldots,i_m},\quad z\in\omega_1, \tag{7}$$

и допускающее семейство характеристик Γ_1, содержащих ω_0.

Обозначим $A=(\mathfrak{A}^{sr})$ $(s,r=1,2,\ldots,k)$. Диагональная клетка $\mathfrak{A}^{ss}$ имеет порядок $q(s)$. Первая ее строка составлена из коэффициентов $a^{ss}_{2,\alpha_1,\alpha_2}$ $(\alpha_1+\alpha_2=q(s)-1,\ \alpha_1,\alpha_2\geq 0)$, нижняя соседняя параллель к главной диагонали — из -1, а остальные ее элементы являются нулями. Первая строка клетки $\mathfrak{A}^{sr}$ $(s\neq r)$ размера $q(s)\times q(r)$ состоит из элементов $a^{sr}_{2,\alpha_1,\alpha_2}$ $(\alpha_1+\alpha_2=q(r)-1,\ \alpha_1,\alpha_2\geq 0)$, а остальные ее элементы равны нулю. Здесь $a^{sr}_{2,\alpha_1,\alpha_2}$ — элементы матрицы $(b^{sr}_{1,1,\ldots,1})^{-1}(h^{sr}_{2,\alpha_1,\alpha_2})$,

$$h^{sr}_{2,\alpha_1,\alpha_2}=\frac{q(r)}{q(r)-\alpha_1}\,\frac{(\alpha_1+\alpha_2)!}{\alpha_1!\alpha_2!}\,b^{sr}_{2,\alpha_1,\alpha_2},\quad \alpha_1+\alpha_2=q(r)-1,$$
$$b^{sr}_{2,\alpha,\beta}=\sum_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{q(r)}=1}^{m}c^{sr}_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{q(r)}}\frac{\partial\varphi}{\partial z_{\mu_1}}\frac{\partial\psi}{\partial z_{\mu_2}}\cdots\frac{\partial\psi}{\partial z_{\mu_{\alpha+1}}}\frac{\partial\varphi}{\partial z_{\mu_{\alpha+2}}}\cdots\frac{\partial\varphi}{\partial z_{\mu_{q(r)}}},$$
$$b^{sr}_{1,1,\ldots,1}=\sum_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{q(r)}=1}^{m}c^{sr}_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{q(r)}}\frac{\partial\psi}{\partial z_{\mu_1}}\frac{\partial\psi}{\partial z_{\mu_2}}\cdots\frac{\partial\psi}{\partial z_{\mu_{q(r)}}}.$$

В случае одного уравнения $A=\mathfrak{A}^{11}$. Для системы уравнений первого порядка $\mathfrak{A}^{sr}=a^{sr}_2$ $(q=1,\ \alpha_1=\alpha_2=0)$.

Пусть x_i $(i=1,2,\dots,m,\ x_1=\psi(z),\ x_2=\varphi(z),\dots)$ — локальные координаты. Обозначим

$$w_{r,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m}=\frac{\partial^j w_r}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}},\quad j=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m,$$
$$\mathfrak{W}=(w_{r,\alpha_1,\alpha_2})\quad(\,r=1,2,\dots,k,\ \ \alpha_1+\alpha_2=q(r)-1,\ \ \alpha_1,\alpha_2\ge 0\,),$$
$$\mathfrak{B}=(w_{r,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\sigma})\quad(\,r=1,2,\dots,k,\ \ \sigma=3,4,\dots,m,$$
$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\sigma=q(r)-1,\ \ \alpha_\sigma=1,2,\dots,q(r)-1\,),$$
$$\mathfrak{U}=(w_r,w_{r,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\alpha})\quad(\,r=1,2,\dots,k,\ \ \sigma=1,2,\dots,m,$$
$$j=1,2,\dots,q(r)-2,\ \ \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\sigma=j,\ \ \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{\sigma-1}\ge 0,\ \ \alpha_\sigma=1,2,\dots,j),$$
$$W=(\mathfrak{W},\mathfrak{B},\mathfrak{U}).$$

Предположение 2. В точках Ω_3 матрица A имеет $q=\sum\limits_{r=1}^{k}q(r)$ различных собственных значений λ_i, причем $\lambda_1=\rho x_1^{\rho-1}c$, $\det l_*\ne 0$.

Здесь l_* получается из l, составленной из левых собственных векторов матрицы A, заменой элементов первой строки на $\frac{\partial c}{\partial \mathfrak{W}}$.

Теорема 2. *При предположениях* 1, 2 *существует единственное голоморфное в некоторой окрестности* $\omega_*\subset\omega\setminus\omega_0$ *характеристики* ω_1 *решение задачи отцентрированной условиями* (6), (7). *В локальных координатах такое решение обладает свойствами* (3).

Теорема 2 доказывается сведением задачи (6), (7) к задаче (1), (2), понижением порядка дифференциальных уравнений после перехода к локальным координатам.

Литература

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений.* – М.: Наука, 1967. – 592 с.
2. Хайруллин Н.Х. *Центрированные волны квазилинейных систем.* – Марийский политехн. ин-т. – Йошкар-Ола, 1979. – 117 с. – Деп. в ВИНИТИ 25.10.79, № 3729.
3. Хайруллин Н.Х. *Задача Гурса для квазилинейных систем.* – Марийский политехн. ин-т. – Йошкар-Ола, 1987. – 21 с. – Деп. в ВИНИТИ 28.12.87, № 9134-В87.
4. Хайруллин Н.Х. *Задача Гурса для квазилинейных систем с аналитическими входными данными.* – Марийский политехн. ин-т. – Йошкар-Ола, 1987. – 28 с. – Деп. в ВИНИТИ 3.12.87, № 8479-В87.
5. Хайруллин Н.Х. *Задача Гурса для квазилинейных систем в инвариантах* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 10. – С. 89–90.
6. Годунов С.К. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1971. – 416 с.
7. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ.* – М.: Наука, 1969. – 576 с.
8. Владимиров В.С. *Методы теории функций многих комплексных переменных.* – М.: Наука, 1964. – 412 с.

Марийский государственный
технический университет

Поступила
30.01.1997