ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 11 (438)

УДК 519.622 : 519.615

Е.Б. КУЗНЕЦОВ, В.И. ШАЛАШИЛИН

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ, ПРЕОБРАЗОВАННЫХ К НАИЛУЧШЕМУ АРГУМЕНТУ

Под сингулярными системами обыкновенных дифференциальных уравнений понимаются системы, состоящие из обыкновенных дифференциальных уравнений и недифференциальных соотношений. В качестве последних обычно рассматриваются системы нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений. В настоящее время в научной литературе для обозначения систем такого вида чаще используется термин дифференциально-алгебраические уравнения.

По-видимому, впервые численное решение дифференциально-алгебраических уравнений исследовалось в [1]. Система линейных относительно производных $\dot{y}$ уравнений

$$A(y)\dot{y} + B(y) = f(t)$$

с вырожденной матрицей $A(y)$, описывающая процессы, протекающие в электрических сетях, интегрировалась при помощи формул дифференцирования назад.

Позднее для решения данного вида уравнений были разработаны программы [2]–[5]. В настоящее время помимо многочисленных статей данной проблеме посвящено несколько монографий [6]–[12]. Однако, несмотря на несомненные достижения в данной области, полученные результаты не ликвидируют трудности численного решения дифференциально-алгебраических уравнений по сравнению с решением обыкновенных дифференциальных уравнений [11]:

— начальные условия должны быть согласованными с недифференциальными соотношениями;

— система линейных уравнений, решаемая на каждом шаге процесса интегрирования, является плохо обусловленной для мелких шагов; показано [11], что обусловленность системы имеет порядок $O(h^\nu)$, где ν — индекс системы, h — шаг интегрирования;

— ошибка метода при выборе шага интегрирования чувствительна к несогласованности в начальных условиях и резкому изменению решения;

— численное решение в большей степени зависит от точности аппроксимации итерационной матрицы.

Введем

Определение 1. Система линейных уравнений называется наилучшим образом обусловленной, если малые изменения элементов матрицы системы или ее правой части приводят к наименьшему изменению решения.

В данной работе предложен подход, согласно которому решение задачи Коши для системы дифференциально-алгебраических уравнений рассматривается с позиции метода продолжения решения по параметру, что позволяет поставить вопрос о выборе наилучшего параметра [13]–[16], доставляющего наилучшую обусловленность системе линейных уравнений продолжения. Это приводит к ослаблению части из отмеченных трудностей. Так, система линейных уравнений продолжения, получающаяся на каждом шаге процесса интегрирования, будет наилучшим

Работа выполнена при финансовой поддержке Госкомвуза Российской Федерации (гранта С.-Петербургск. гос. ун-та 95-0-1.8-33).

образом обусловленной, а в силу выбора аргумента задачи вычислительная ошибка будет менее чувствительна к резкому изменению решения.

1. Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциально-алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}F(y,\dot{y},x,t)=0,\quad y(t_0)=y_0,\\ G(y,x,t)=0,\quad x(t_0)=x_0,\end{gathered}\tag{1}$$

$$y(t):\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^n,\quad x(t):\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^m,\quad F:\mathbb{R}^{2n+m+1}\to\mathbb{R}^n,$$

$$G:\mathbb{R}^{n+m+1}\to\mathbb{R}^m,\quad t\in\mathbb{R}^1,\quad \dot{y}=\frac{dy}{dt}.$$

Величины t_0, y_0, x_0 должны быть согласованными, т. е. удовлетворять системе уравнений $G(y_0,x_0,t_0)=0$.

Изучается численное решение задачи Коши для дифференциально-алгебраических уравнений, которые наиболее часто используются при описании поведения механических систем. Такие уравнения имеют индекс, равный нулю или единице. Однако допускается, что в некоторых точках единственной гладкой интегральной кривой задачи (1), например, в предельных точках, матрицы $F_{,\dot{y}}=\partial F/\partial\dot{y}$ и $G_{,x}=\partial G/\partial x$ могут вырождаться.

Введем еще одно

Определение 2. Наилучшим аргументом задачи (1) называется аргумент, доставляющий системе линейных уравнений продолжения решения наилучшую обусловленность.

Основным результатом данной работы является

Теорема. *Если задача Коши для системы дифференциально-алгебраических уравнений* (1) *имеет единственную гладкую интегральную кривую, то для преобразования этой задачи к наилучшему аргументу необходимо и достаточно выбрать в качестве такого аргумента длину дуги λ, отсчитываемую вдоль интегральной кривой задачи.*

Доказательство. Пусть интеграл задачи (1)

$$\begin{gathered}f(y,x,t)=0,\\ f(y_0,x_0,t_0)=0,\quad f:\mathbb{R}^{n+m+1}\to\mathbb{R}^n\end{gathered}\tag{2}$$

задает в $(n+m+1)$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+m+1}$ единственную гладкую интегральную кривую. Процесс ее построения может быть представлен как процесс продолжения решения $y=y(t)$, $x=x(t)$ по параметру t. Такой подход позволяет поставить вопрос [13]–[16] о выборе наилучшего параметра продолжения решения системы (2), а значит, и наилучшего аргумента задачи (1).

Для того чтобы выяснить, какой аргумент будет наилучшим, полагаем, что величины y, x, t являются функциями некоторого аргумента μ, приращение которого в каждой точке интегральной кривой задачи (1) примем в виде

$$\Delta\mu=\alpha_i\Delta y_i+\beta_j\Delta x_j+\gamma\Delta t,\quad i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,m},\tag{3}$$

где Δy_i, Δx_j, Δt — приращения функций y_i, x_j, t; α_i, β_j, γ — компоненты единичного вектора $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_m,\gamma)^T$, задающего направление, в котором выбирается аргумент μ. Здесь и далее предполагается суммирование в произведениях по повторяющимся индексам в оговоренных пределах.

Разделим равенство (3) на $\Delta\mu$, стремящееся к нулю, тогда имеем

$$\begin{gathered}\alpha_i y_{i,\mu}+\beta_j x_{j,\mu}+\gamma t_{,\mu}=1,\\ i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,m},\quad ()_{,\mu}=\frac{d()}{d\mu}.\end{gathered}\tag{4}$$

Уравнения продолжения решения задачи (2) получим, если совместно с равенством (4) рассмотрим соотношения (2), продифференцированные по μ. Однако такой подход неконструктивен, т. к. интеграл (2) до решения задачи (1) неизвестен.

Уравнения продолжения могут быть получены иначе. Линеаризуем вектор-функцию F относительно производных $\dot{y}_i$ в окрестности некоторых известных значений $\dot{y}_i = \dot{y}_i^*$, полученных, например, на предыдущем шаге процедуры интегрирования или итерационного процесса, тогда имеем

$$F^* + F^*_{,\dot{y}_i}(\dot{y}_i - \dot{y}_i^*) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь вектор-функции F^* и $F^*_{,\dot{y}_i}$ вычисляются при $\dot{y}_i = \dot{y}_i^*$.

Принимая во внимание уравнение (4) и равенства $\dot{y}_i = y_{i,\mu}/t_{,\mu}$; $\dot{y}_i^* = y^*_{i,\mu}/t^*_{,\mu}$, а также дифференцируя вектор-функцию G относительно μ, получаем следующий вид представления уравнений продолжения:

$$\begin{aligned} &\alpha_i y_{i,\mu} + \beta_j x_{j,\mu} + \gamma t_{,\mu} = 1, \quad t^*_{,\mu} F^*_{,\dot{y}_i} y_{i,\mu} + (F^* t^*_{,\mu} - F^*_{,\dot{y}_i} y^*_{i,\mu}) t_{,\mu} = 0, \\ &G_{,y_i} y_{i,\mu} + G_{,x_j} x_{j,\mu} + G_{,t} t_{,\mu} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \tag{5}$$

Интегральная кривая задачи (1) может быть построена в результате интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученной после разрешения на каждом итерационном шаге уравнений продолжения (5) относительно производных с учетом начальных условий

$$y_i(0) = y_{i0}, \quad x_j(0) = x_{j0}, \quad t(0) = t_0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{6}$$

Здесь предполагается, что аргумент μ отсчитывается от начальной точки задачи (1).

Эффективность разрешения системы (5) определяется ее обусловленностью, зависящей от выбора аргумента μ, который определяется вектором α. Структура этой системы полностью совпадает со структурой системы, рассмотренной в [13], [14] при доказательстве необходимых и достаточных условий выбора наилучшего параметра продолжения решения системы нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений, содержащих параметр. Таким параметром, доставляющим наилучшую обусловленность системе линейных уравнений продолжения, является длина дуги λ, отсчитываемая вдоль кривой множества решений системы нелинейных уравнений.

Очевидно, что в рассматриваемом случае кривая множества решений системы нелинейных уравнений (2) является интегральной кривой задачи (1), поэтому система (5) будет наилучшим образом обусловленной тогда и только тогда, когда в качестве аргумента принимается длина дуги λ, отсчитываемая вдоль интегральной кривой задачи (1). $\square$

Замечание 1. В [13], [14] в качестве меры обусловленности принимались как величина определителя системы, деленная на произведение квадратичных норм его строк, так и величина квадратичной ошибки.

Замечание 2. Согласно правилу Крамера решение системы (5), преобразованной к наилучшему аргументу λ, можно представить в виде

$$\frac{dy_i}{d\lambda} = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad \frac{dx_j}{d\lambda} = \frac{\Delta_{n+j}}{\Delta}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\Delta_{n+m+1}}{\Delta}, \\ i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \tag{7}$$

где Δ — определитель системы; $\Delta_k = (-1)^{k+1}\delta_k$ $(k = \overline{1,\, n+m+1})$, δ_k — определитель, получающийся при вычеркивании k-го столбца в матрице последних $(n+m)$ уравнений системы. Эти определители удовлетворяют равенству (см. [13], [14])

$$\Delta^2 = \Delta_k \Delta_k, \quad k = \overline{1,\, n+m+1},$$

которое показывает, что квадратичная норма правой части системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7) всегда равна единице. Если аргумент λ отсчитывать от начальной точки задачи (1), то начальные условия примут вид (6), и задача Коши для системы дифференциально-алгебраических уравнений (1) преобразуется в задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7), (6).

2. Рассмотрим алгоритм решения задачи (1), преобразованной к наилучшему аргументу λ. Очевидно, что использование формул (7) приведет к неэффективному алгоритму, основанному на многократном вычислении определителей. В силу гладкости интегральной кривой функции $y = y(\lambda)$, $x = x(\lambda)$, $t = t(\lambda)$ являются дифференцируемыми. Введем обозначения

$$\frac{dy_i}{d\lambda} = Y_i, \quad \frac{dx_j}{d\lambda} = X_j, \quad \frac{dt}{d\lambda} = T, \quad i = \overline{1,n}, \;\; j = \overline{1,m}. \tag{8}$$

Тогда с учетом этих обозначений уравнения продолжения (5), записанные относительно наилучшего аргумента λ, примут вид

$$\begin{aligned} T^* F,^*_{\dot{y}_i} Y_i + (F^* T^* - F,^*_{\dot{y}_i} Y_i^*) T &= 0, \\ G,_{y_i} Y_i + G,_{x_j} X_j + G,_t T &= 0, \\ Y_i Y_i + X_j X_j + TT &= 1, \\ i = \overline{1,\ n}, \quad j = \overline{1,\ m}&. \end{aligned} \tag{9}$$

Если последнее нелинейное уравнение системы (9) линеаризовать относительно функций Y_i, X_j, T, то получаем систему линейных уравнений относительно функций $Y_i^{(k)}$, $X_j^{(k)}$ и $T^{(k)}$, вычисленных на k-м шаге итерационного процесса

$$\begin{aligned} &T^{(k-1)} F,^*_{\dot{y}_i} Y_i^{(k)} + (F^* T^{(k-1)} - F,^*_{\dot{y}_i} Y_i^{(k-1)}) T^{(k)} = 0, \quad G,_{y_i} Y_i^{(k)} + G,_{x_j} X_j^{(k)} + G,_t T^{(k)} = 0, \\ &Y_i^{(k-1)} Y_i^{(k)} + X_j^{(k-1)} X_j^{(k)} + T^{(k-1)} T^{(k)} = 1, \quad i = \overline{1,n}, \;\; j = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь звездочкой помечены функции, вычисленные на предыдущем итерационном шаге, т. е. при $\dot{y}_i = Y_i^{(k-1)} / T^{(k-1)}$.

Система линейных уравнений (10) совместно с системой обыкновенных дифференциальных уравнений (8) определяет процедуру Ньютона. Если начальная точка не является предельной, то начальное значение вектора $Z = (Y_1, \ldots, Y_n, X_1, \ldots, X_m, T)^T$ можно взять в виде

$$Z^{(0)} = (0, \ldots, 0, 1)^T. \tag{11}$$

В качестве начального приближения в итерационном процессе на данном шаге процедуры интегрирования принимается решение, вычисленное на предыдущем шаге процедуры интегрирования.

Таким образом, проблема заключается в интегрировании системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8), удовлетворяющей начальным условиям (6). Правые части системы (8) определяются из решения системы (10), которую следует решать до тех пор, пока итерационный процесс не сойдется с принятой точностью ε, т. е. пока не будет выполнено условие $\|Z^{(k)} - Z^{(k-1)}\| < \varepsilon$. Заметим, что при использовании при интегрировании системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8) программы PC1 [15] это условие реализуется благодаря методу прогноза и коррекции.

Уравнения продолжения будут иметь более простой вид, если дифференциальные соотношения F в системе (1) линейны относительно производных $\dot{y}_i$, т. е. имеют вид

$$a_{il}(y,x,t) \frac{dy_l}{dt} = f_i(y,x,t), \quad i, l = \overline{1,n},$$

где a_{il} — элементы квадратной матрицы порядка n. В этом случае уравнения продолжения (9) примут вид

$$\begin{aligned} a_{il}Y_l - f_iT = 0, \\ G_{,y_i}Y_i + G_{,x_j}X_j + G_{,t}T = 0, \\ Y_iY_i + X_jX_j + TT = 1, \quad i,l = \overline{1,n},\ \jmath = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{12}$$

Первые два уравнения этой системы с точностью до постоянного множителя определяют в пространстве $\mathbb{R}^{n+m+1} : \{y,x,t\}$ вектор, касательный к интегральной кривой. Третье уравнение реализует выбор касательного к интегральной кривой единичного вектора α, определяющего направление отсчета наилучшего аргумента λ. Это уравнение делает систему (12) нелинейной. Чтобы избежать трудностей, связанных с ее решением, можно при нахождении решения в k-й точке интегральной кривой взять в качестве вектора α вектор, касательный к интегральной кривой в предыдущей $(k-1)$-й точке. При достаточно малом шаге интегрирования $\Delta\lambda = \lambda_k - \lambda_{k-1}$ этот вектор будет близок к вектору, обеспечивающему наилучший аргумент задачи. Тогда систему (12) для k-й точки интегральной кривой можно записать в виде

$$\begin{aligned} a_{il}Y_l - f_iT = 0, \\ G_{,y_i}Y_i + G_{,x_j}X_j + G_{,t}T = 0, \\ Y_i^*Y_i + X_j^*X_j + T^*T = 1, \quad i,l = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{13}$$

Обозначим через $Z^* = (Y^*, X^*, T^*)^T$ единичный вектор решения размерности $(n+m+1)$, вычисленный на предыдущем шаге процесса интегрирования. Последнее уравнение системы (13) представляет собой скалярное произведение векторов Z и Z^*, касательных к интегральной кривой на данном и предыдущем шагах. Это уравнение утверждает, что проекция вектора Z на направление вектора Z^* равна единице.

Очевидно, что вектор Z, удовлетворяющий системе линейных уравнений (13), вообще говоря, не будет единичным, как этого требует система (12), поэтому после решения системы (13) найденный вектор Z следует нормировать по формулам

$$Z_i^* = Z_i/\sqrt{Z_jZ_j}, \quad i,j = \overline{1,\, n+m+1}. \tag{14}$$

При этом получается решение системы (12).

Таким образом, можно предложить следующий алгоритм решения задачи:

— находится решение системы дифференциальных уравнений (8), удовлетворяющее начальным условиям (6);

— правые части системы (8) определяются из решения системы линейных уравнений (13) с последующей нормировкой по формулам (14).

При таком подходе можно обходить не только ситуации, возникающие из-за обращения в нуль якобиана $G_{,x}$, но и решать системы дифференциально-алгебраических уравнений, у которых функции f, стоящие в правых частях дифференциальных уравнений, обращаются в некоторых точках, например, в предельных, в бесконечность. Чтобы преодолеть возникающие при этом трудности, достаточно переписать, если это возможно, первые n уравнений системы (12) в виде

$$Q_{il}Y_l - P_iT = 0, \quad i,l = \overline{1,n},$$

где функции Q_{il}, P_i не обращаются в бесконечность.

Согласно описанному подходу на алгоритмическом языке ФОРТРАН была разработана вычислительная программа, в которой система обыкновенных дифференциальных уравнений (8) интегрировалась при помощи метода прогноза и коррекции (программа PC1 [15]), а система линейных уравнений продолжения решалась при помощи метода Гаусса с использованием, для системы (10), или без использования, для системы (13), итерационного процесса, но с нормировкой (14).

Замечание 3. Введением новых переменных $z_i = \dot{y}_i$, задача (1) преобразуется в задачу

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= z, \quad y(t_0) = y_0, \\ F(y, z, x, t) &= 0, \quad x(t_0) = x_0, \\ G(y, x, t) &= 0, \quad z(t_0) = z_0, \end{aligned} \tag{15}$$

$$y, z : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n, \quad x : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^m, \quad F : \mathbb{R}^{2n+m+1} \to \mathbb{R}^n, \quad G : \mathbb{R}^{n+m+1} \to \mathbb{R}^m,$$

которая не требует применения итерационной процедуры Ньютона. Однако как показывает приведенный ниже пример, такое преобразование не всегда оправдано и может даже привести к непреодолимым вычислительным трудностям.

Рассмотрим задачу Коши для вырожденного уравнения Ван-дер-Поля [10], [12], записанного в неявном виде

$$(1 - y^2)\frac{dy}{dt} - y = 0, \quad y(0) = 2. \tag{16}$$

Частный интеграл задачи можно представить в форме

$$\ln \frac{y}{2} - \frac{y^2}{2} + 2 - t = 0.$$

Если же задачу (16) преобразовать к виду (15), в котором она приводится в [10], то получим

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= x, \quad y(0) = 2, \\ (1 - y^2)x - y &= 0, \quad x(0) = -0.66. \end{aligned} \tag{17}$$

Интегральная кривая этой задачи в пространстве переменных t, y, x имеет разрыв вдоль прямой $y = 1$, $t = 3/2 - \ln 2$ и, естественно, при интегрировании задачи (17) любым численным методом в окрестности этой прямой возникнут непреодолимые вычислительные трудности.

Приведенный пример показывает, что следует быть осторожным при переходе от задачи (1) к задаче (15), хотя в отдельных случаях такой переход допустим и оправдан, несмотря на то, что при этом на единицу увеличивается индекс системы и на n единиц увеличивается ее размерность.

3. В качестве первого примера рассмотрим численное решение кинематических уравнений Эйлера [17]

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ \cos\theta & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{,t} \\ \varphi_{,t} \\ \theta_{,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

определяющих связь между компонентами вектора угловой скорости $\omega(\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$ в подвижной системе координат, связанной с объектом, и производными по времени t от углов Эйлера ψ, φ, θ, где ψ — это угол прецессии, φ — угол собственного вращения и θ — угол нутации. Для определения закона изменения углов Эйлера систему (18) следует разрешить относительно производных. Матрица этой системы вырождается при значении угла нутации $\theta = 0$, и решение системы при помощи традиционных подходов при условиях $\omega_1 = -100$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = 0$,

$$t = 0, \quad \psi = \varphi = 0, \quad \theta = \pi/100 \tag{19}$$

приводит к недостоверным результатам.

После преобразования системы (18) к наилучшему аргументу λ система уравнений продолжения (13) примет вид

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & -\omega_1 \\ \sin\theta\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & -\omega_2 \\ \cos\theta & 1 & 0 & -\omega_3 \\ \psi_{,\lambda}^* & \varphi_{,\lambda}^* & \theta_{,\lambda}^* & t_{,\lambda}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{,\lambda} \\ \varphi_{,\lambda} \\ \theta_{,\lambda} \\ t_{,\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При решении этой системы при начальных условиях (19) с помощью вышеописанной программы получаются достоверные результаты. Причем достоверное численное решение задачи получается и в том случае, когда в начальных условиях (19) полагается $\theta = 0$. При этом углы прецессии и собственного вращения удовлетворяют известному аналитическому соотношению [17] $\varphi + \psi = 0$. Начальное значение вектора Z в виде (11) брать нельзя, т. к. начальная точка является предельной по переменной t. Это значение Z можно взять, например, в виде $Z^{(0)} = (1, 0, 0, 0)^T$.

В качестве другого примера рассмотрим задачу, в уравнение которой производная входит нелинейно

$$\begin{aligned} y - t - \dot{y} + \ln\dot{y} = 0, \quad y(1) = e, \\ y - x^2 - t^2 = 0, \quad x(1) = \sqrt{e-1}, \end{aligned} \tag{20}$$

где число $e = 2.71828\ldots$

Пространственная интегральная кривая задачи получается в результате пересечения поверхности цилиндра $y - e^t = 0$ с поверхностью параболоида, заданного вторым уравнением системы (20). Ошибка вычислений оценивается по формулам

$$\Delta_1 = y - e^t, \quad \Delta_2 = y - x^2 - t^2, \tag{21}$$

где присутствуют вычисленные значения функций.

Задача (20) при начальном шаге интегрирования по переменной λ, равном 0.001, и точности вычислений 10^{-5} решалась при помощи разработанной программы на отрезке $t \in [1, 2]$ за 38 с. Ошибки (21), вычисленные в момент $t = 2$, имели значения $\Delta_1 = 0.29 \cdot 10^{-2}$, $\Delta_2 = 0.9 \cdot 10^{-3}$.

Система линейных уравнений (10) имела вид

$$\begin{gathered} \left(\frac{T^{(k-1)}}{Y^{(k-1)}} - 1\right) Y^{(k)} + \left(y - t + \ln\frac{Y^{(k-1)}}{T^{(k-1)}} - 1\right) T^{(k)} = 0, \\ Y^{(k)} - 2xX^{(k)} - 2tT^{(k)} = 0, \\ Y^{(k-1)}Y^{(k)} + X^{(k-1)}X^{(k)} + T^{(k-1)}T^{(k)} = 1. \end{gathered}$$

При решении задачи рассматривались как точное значение вектора $Z^{(0)} = (Y_0, X_0, T_0)^T$, равное

$$Z^{(0)} = \left(\frac{2\sqrt{e-1}}{Q}, \frac{e-2}{eQ}, \frac{Y_0}{e}\right)^T, \quad Q = \sqrt{4e-3},$$

найденное из решения системы

$$\begin{gathered} e - 1 - \frac{Y_0}{T_0} + \ln\frac{Y_0}{T_0} = 0, \\ Y_0 - 2\sqrt{e-1}X_0 - 2T_0 = 0, \\ Y_0^2 + X_0^2 + T_0^2 = 1, \end{gathered}$$

так и приближенное $Z^{(0)} = (2/3, 2/3, 1/3)^T$. На решение задачи это не оказывало влияния.

Литература

1. Gear C.W. *Simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations* // IEEE Trans. Circuit Theory. – 1971. – CT. 18. – № 1. – P. 89–95.
2. Hindmarsh A.C. *LSODE and LSODI, two new initial value ordinary differential equations solvers* // ACM. SIGNUM. Newsletter. – 1980. – V. 15. – № 4. – P. 10–11.
3. Sincovec R.F., Erisman A.M., Yip E.L., Epton M.A. *Analysis of descriptor system using numerical algorithms* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1981. – V. 26. – № 1. – P. 139–147.
4. Petzold L.R. *A description of DASSL: A differential-algebraic system solver* // Scientific Computing. — Amsterdam: North-Holland, 1983. – 65 p.
5. Герасимов Б.П., Кульчицкая И.А. *STIFSP-пакет программ интегрирования дифференциально-алгебраических систем большой размерности* // Препринт. Ин-т прикладной математики АН СССР. – 1984. № 103. – 23 с.
6. Campbell S.L. *Singular system of differential equations.* I. – San-Francisco, London, Melbourn: Pitman Advanced Publ. Program, 1980. – 176 p.
7. Campbell S.L. *Singular system of differential equations.* II. – San-Francisco, London, Melbourn: Pitman Advanced Publ. Program, 1982. — 234 p.
8. Griepentrog E., Marz R. *Differential-algebraic equations and their numerical treatment.* – Leipzig: Teubner, 1986. — 220 p.
9. Бояринцев Ю.Е., Данилов В.А., Логинов А.А., Чистяков В.Ф. *Численные методы решения сингулярных систем.* – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. – 223 с.
10. Hairer E., Lubich C., Roche M. *The numerical solution of differential-algebraic systems by Runge–Kutta methods.* – Berlin etc.: Springer, 1989. – 139 p.
11. Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. *Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations.* – N. Y., Amsterdam, London: North-Holland, 1989. – 210 p.
12. Hairer E., Wanner G. *Solving ordinary differential equations.* 2. *Stiff and differential-algebraic problems.* – Berlin, e. a.: Springer-Verlag, 1991. – 601 p.
13. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. *Наилучший параметр продолжения решения* // Докл. РАН. – 1994. – Т. 334. – № 5. – С. 566–568.
14. Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. *Задача Коши как задача продолжения по наилучшему параметру* // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 6. – С. 964–971.
15. Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. *Задача Коши как задача продолжения решения по параметру* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1993. – Т. 33. – № 12. – С. 1792–1805.
16. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. *Задача Коши для нелинейно деформируемых систем как задача продолжения решения по параметру* // Докл. РАН. – 1993. – Т. 329. – № 4. – С. 426–428.
17. Лурье А.И. *Аналитическая механика.* – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.

Московский государственный авиационный институт (технический университет)

Поступила 12.07.1996