ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 5 (528)

УДК 517.9

В.Н. БОБОЧКО

РАВНОМЕРНАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТОЧКОЙ ПОВОРОТА

Постановка задачи и некоторые проблемы ее решения

Рассмотрим систему сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений (СВДУ)

$$\varepsilon y'(x,\varepsilon) - A(x)y(x,\varepsilon) = \widetilde{h}(x) \tag{0.1}$$

при $\varepsilon \to +0$, $x \in I = [0;l]$, где $A(x) = \big(a_{ij}(x)\big)^2_{i,j=1}$ — известная матрица, $\widetilde{h}(x) = \operatorname{colon}\big(h_1(x), h_2(x)\big)$ — заданная вектор-функция, а $y(x,\varepsilon) = \operatorname{colon}\big(y_1(x,\varepsilon), y_2(x,\varepsilon)\big)$ — искомая вектор-функция.

Цель данной работы состоит в построении равномерной асимптотики решения (РАР) системы (0.1), пригодной на всем отрезке $[0;l]$ при наличии в этой системе точки поворота $x = 0$.

Наиболее существенные результаты в этом направлении получены в [1], [2]. Однако несмотря на значительный вклад Вазова в исследовании систем СВДУ с точками поворота, нерешенных вопросов осталось значительно больше, чем решенных. Для большей ясности сформулируем основной результат, полученный Вазовым. При наличии точки поворота $x = 0$ в системе (0.1) он соответствующими преобразованиями приводит матрицу $A(x)$ к матрице

$$A^*(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} \tag{0.2}$$

и строит асимптотику решения однородной системы дифференциальных уравнений с упрощенной матрицей (0.2). Однако, как сказано в ([2], с. 67), только для уравнений второго порядка существуют некоторые теории, но и они в большинстве неполные. Эти результаты, полученные для системы двух дифференциальных уравнений с точкой поворота, так не были обобщены на общий случай систем СВДУ. В исследованиях Вазова и других авторов, которые используют его метод, часто употребляется идея, что "не ограничивая общности, можно считать $\operatorname{tr} A(x,0) \equiv 0$" (см. [1], с. 189, формулы (29.11), (29.12)). Однако при этом не проводится исследование влияния соответствующего преобразования на характер полученной новой матрицы.

Приведем один простой пример, который проиллюстрирует опасность применения таких преобразований. Рассмотрим систему (0.1), в которой $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 1$, $a_{21} = x$. Корни характеристического уравнения $|A(x) - \lambda E| = 0$ равны $1 \pm \sqrt{x}$, т. е. в окрестности точки $x = 0$ они стабильные. При помощи преобразования

$$y(x,\varepsilon) = \exp\left\{\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^x \operatorname{tr} A(x)dx\right\} Z(x,\varepsilon) = \exp\left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\} Z(x,\varepsilon) \tag{0.3}$$

(см. [1], с. 189, формула (29.12)) система (0.1) перейдет в систему

$$\varepsilon Z'(x,\varepsilon) - A^*(x)Z'(x,\varepsilon) = h(x)\exp\left\{\frac{-x}{\varepsilon}\right\}, \tag{0.4}$$

с точкой поворота, в которой матрица $A^*(x)$ совпадает с матрицей (0.2). Однако в процессе такого преобразования была получена правая часть системы, которая содержит существенно особую функцию $\exp\left\{\frac{-x}{\varepsilon}\right\}$ относительно малого параметра. Системы СВДУ, содержащие точку поворота с такой правой частью, насколько автору известно, еще не исследованы. Поэтому вопрос о построения асимптотики частных решений неоднородных СВДУ вида (0.1) с точкой поворота остается актуальным и после построенных В. Вазовым асимптотик однородных СВДУ.

Таким образом, применение преобразования (0.3), а следовательно, употребление выражения "не ограничивая общности, можно считать, что $\operatorname{tr} A(x,0) \equiv 0$" нежелательно при исследовании СВДУ с точкой поворота. Если исследуется только однородная система СВДУ, как это делал Вазов, то в определенной степени есть оправдание применению преобразования (0.3).

Заметим еще следующее. Известно, что частное решение неоднородного СВДУ, построенное классическими методами с использованием фундаментальной системы решений настолько сложное, что оно почти непригодно для практических целей. Это утверждение хорошо проиллюстрировано в ([3], с. 31–33). Как показали проведенные исследования, для построения асимптотики частных решений неоднородных СВДУ с точками поворота необходимо использовать более сложные существенно особые функции (СОФ), чем для получения асимптотики решений однородных СВДУ. Для этих целей применялись функции Скорерра ([4], с. 411–414) в скалярном случае и функция $\Psi(t)$ (см. [3], с. 199; [5], с. 53–58) как в скалярном случае, так и для систем вида (0.6).

Теории СВДУ с точками поворота посвящено значительное количество журнальной и монографической литературы. Многими авторами хорошо изучено уравнение Лиувилля

$$\varepsilon^2 y''(x,\varepsilon) + [xr(x) + \varepsilon^2 q(x)]y(x,\varepsilon) = h(x). \tag{0.5}$$

Для систем СВДУ вида

$$\varepsilon^2 W''(x,\varepsilon) - A(x)W(x,\varepsilon) = h(x) \tag{0.6}$$

тоже удалось разработать достаточно общий метод построения РАР с различными типами точек поворота (см. [6]–[9] и др.).

Исходя из сказанного, можно сформулировать следующую основную проблему, ждущую своего решения в теории систем СВДУ первого порядка с точками поворота: без использования преобразования (0.3) построить равномерную асимптотику решения неоднородной системы (0.1) при наличии в ней точки поворота с последующим обобщением этих результатов на общий случай систем СВДУ первого порядка с точками поворота.

1. Условия существования точки поворота в системе

Теория СВДУ с точками поворота изучена достаточно хорошо, однако общего определения точки поворота до настоящего времени не дано (см. [1], с. 186–187). Для каждого класса уравнений вводится свое понятие точки поворота. В основном понятие точки поворота произошло от уравнения Лиувилля, и оно уже является классическим определением точки поворота для этого уравнения. Поскольку систему (0.1) можно привести к уравнению Лиувилля, то вводя понятие классической точки поворота для этой системы, будем это понятие сравнивать с аналогичным классическим определением точки поворота для уравнения Лиувилля.

Вначале нужно решить следующий вопрос: каким условиям должны удовлетворять коэффициенты системы (0.1), чтобы она содержала классическую точку поворота $x = 0$?

Характеристическое уравнение, соответствующее системе (0.1), имеет вид

$$|A(x) - \lambda E| \equiv \lambda^2(x) - \big(a_{11}(x) + a_{22}(x)\big)\lambda(x) + \det A(x) = 0. \tag{1.1}$$

Из (1.1) видно, что для того, чтобы система (0.1) содержала классическую точку поворота $x = 0$, аналогичную той, которая возникает в уравнении (0.5), необходимо наличие условий

$$\operatorname{tr} A(x,0) \equiv a_{11}(x) + a_{22}(x) \equiv 0, \tag{1.2}$$
$$\det A(0,0) = 0, \quad \det A'(0,0) \neq 0, \tag{1.3}$$

что и будем в дальнейшем предполагать.

При выполнении условий (1.2) существует такая матрица подобия $B(x)$, что преобразование

$$y(x, \varepsilon) = B(x)W(x, \varepsilon) \tag{1.4}$$

систему (0.1) переводит в систему

$$\varepsilon W'(x, \varepsilon) - (D_0(x) + \varepsilon D_1(x))W(x, \varepsilon) = h(x), \tag{1.5}$$

где

$$D_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\det A(x)a_{21}^{-1}(x) \\ a_{21}(x) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d_{12}(x) \\ d_{21}(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} -1 & -a_{11}(x)a_{21}^{-1}(x) \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D_1(x) = B^{-1}(x)B(x), \quad h(x) = B^{-1}(x)\widetilde{h}(x).$$

Вывод 1. Поскольку $B(x)$ есть матрица подобия, то преобразование (1.4) систему (0.1) переводит в систему (1.5), у которой $\operatorname{Sp} D_0(x) = \operatorname{Sp} A(x)$.

Вывод 2. В отличии от системы (0.4) при преобразовании (1.4) правая часть системы (1.5) по структуре та же самая, что и в исходной системе (0.1). Кроме этого, получена система СВДУ, у которой $d_{11}(x) \equiv d_{22}(x) \equiv 0$. Это условие является существенным при последующих исследованиях. Поскольку $d_{12}(0) = 0$, то для получения классической точки поворота нужно предположить, что $d_{21}(x) \equiv a_{21}(x) \neq 0$ для всех $x \in [0; l]$.

Чтобы лучше осознать важность полученных результатов и их соответствие уравнению Лиувилля, приведем однородную систему (0.1) к уравнению Лиувилля. Введя подстановку $y(x, \varepsilon) = \sqrt{a_{12}(x)}\, Z(x, \varepsilon)$, получим уравнение Лиувилля следующего вида:

$$\varepsilon^2 Z''(x, \varepsilon) - \varepsilon \operatorname{tr} A(x)Z'(x, \varepsilon) + [\det A(x) + \varepsilon\rho(x) + \varepsilon^2 q(x)]Z(x, \varepsilon) = 0, \tag{1.6}$$

где

$$\rho(x) = -a_{11}'(x) - m(x)\left[\frac{1}{2}\operatorname{tr} A(x) + a_{11}(x)\right], \quad q(x) = \frac{m'(x)}{2} - \frac{m^2(x)}{4}, \quad m(x) = \frac{a_{12}'(x)}{a_{12}(x)}. \tag{1.7}$$

Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты уравнения (1.6), чтобы оно содержало классическую точку поворота и чтобы к системе (0.1) можно было применить метод, описанный в [5] для уравнения Лиувилля и уже обобщенный на системы СВДУ вида (0.6)?

Во-первых. Поскольку $q(x)$ не равно тождественно нулю, то полученное уравнение (1.6) содержит не классическую точку поворота, а сильную точку поворота, которая впервые была изучена автором (см. [5], раздел 8). Поэтому, требуя наличия простой классической точки поворота в системе (0.1), следует потребовать, чтобы $q(x) \equiv 0$ для всех $x \in [0; l]$. С учетом (1.2) и (1.7) это означает, что должно выполняться условие $a_{11}(x) \equiv a_{22}(x) \equiv 0$ для всех $x \in [0; l]$. В этом случае система (0.1) сводится к класическому уравнению Лиувилля (0.5).

Во-вторых. В этом случае $\det A(x) \equiv -a_{12}(x)a_{21}(x)$. Для выполнения условий (1.3) потребуем, чтобы выполнялось условие: точка $x = 0$ есть нуль первого порядка элемента $a_{12}(x)$.

Вывод 3. Для того чтобы $x = 0$ была классической точкой поворота для системы (0.1), нужно, чтобы имели место условия $a_{11}(x) \equiv a_{22}(x) \equiv 0$, $\det A(0) = 0$, $\det A'(0) \neq 0$ и точка $x = 0$ должна быть нулем первого порядка элемента $a_{12}(x)$.

Замечание 1. Система (0.1) в ([1], с. 188–189) исследована не в общем случае, а в упрощенном виде, когда матрица была представлена в форме (0.2). Там же сказано, что “не ограничивая общности, можно считать, что $\operatorname{tr} A(x, 0) \equiv 0$, т. к. этого всегда можно добиться с помощью преобразования (29.12)”. В [2] тоже исследована та же система СВДУ первого порядка.

Не ставя перед собой цель давать полный анализ результатов В. Вазова, зададим следующие вопросы. Как по исходной матрице, без приведения ее к виду (0.2) определить, что она содержит точку поворота? Как преобразования, проделанные В. Вазовым, повлияют на правую часть новой неоднородной системы уравнений?

Итак, будем исследовать систему СВДУ (0.1) при выполнении условий

$$a_{11}(x) \equiv a_{22}(x) \equiv 0, \quad \det A(0) = 0, \quad \det A'(0) \neq 0, \quad a_{12}(0) = 0, \quad a'_{12}(0) \neq 0. \tag{1.8}$$

2. Регуляризация системы сингулярно возмущенных уравнений

Для построения РАР системы (0.1) используем методику, разработанную для уравнения Лиувилля [5] и систем СВДУ вида (0.4). Для выделения всех существенно особых функций (СОФ), возникающих при решении системы (0.1) за счет особой точки $\varepsilon = 0$, введем регуляризующую переменную t по формуле $t = \varepsilon^{-\alpha}\varphi(x)$, где показатель α и регуляризующая функция $\varphi(x)$ подлежат определению.

Для определения "расширенной" функции получим "расширенное" векторное уравнение

$$\mathbf{L}_\varepsilon \widetilde{y}(x,t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{1-\alpha}\varphi'(x)\frac{\partial \widetilde{y}(x,t,\varepsilon)}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial \widetilde{y}(x,t,\varepsilon)}{\partial x} - A(x)\widetilde{y}(x,t,\varepsilon) = h(x). \tag{2.1}$$

Асимптотику решения расширенного уравнения (2.1) строим в виде ряда

$$\widetilde{y}(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{1}[\alpha_k(x,\varepsilon)U_k(t) + \varepsilon^\gamma \beta_k(x,\varepsilon)U'_k(t)] + f(x,\varepsilon)\Psi(t) + \varepsilon^\gamma g(x,\varepsilon)\Psi'(t) + \omega(x,\varepsilon). \tag{2.2}$$

Здесь $\theta(x,\varepsilon) \equiv \{\alpha_k(x,\varepsilon), \beta_k(x,\varepsilon), f(x,\varepsilon), g(x,\varepsilon), \omega(x,\varepsilon)\}$ — подлежащие определению аналитические функции относительно малого параметра $\varepsilon > 0$ и бесконечно дифференцируемые по переменной $x \in [0;l]$, $U_k(t)$, $k = 1,2,$ — функции Эйри–Дородницына. Показатель γ тоже подлежит определению. Существенно особая функция $\Psi(t)$ определена формулой

$$\Psi(t) = U_2(t)\int_{+\infty}^{t} U_1(\tau)d\tau - U_1(t)\int_{+\infty}^{t} U_2(\tau)d\tau.$$

Свойства функций Эйри–Дородницына и $\Psi(t)$ описаны в ([10] и [5], с. 41–72).

Определим полную производную по независимой переменной x от вектор-функции $\widetilde{y}(x,t,\varepsilon)$ и подставим ее значение в расширенное векторное уравнение (2.1). Приравняем коэффициенты при СОФ в полученной системе. Имеем ($k = 1,2$)

$$\begin{aligned} U_k(t) : -\varepsilon^{1-2\alpha+\gamma}\varphi'(x)\varphi(x)\beta_k(x,\varepsilon) - A(x)\alpha_k(x,\varepsilon) + \varepsilon\alpha'_k(x,\varepsilon) = 0, \\ U'_k(t) : \varepsilon^{1-\alpha}\varphi'(x)\alpha_k(x,\varepsilon) - \varepsilon^\gamma A(x)\beta_k(x,\varepsilon) + \varepsilon^{1+\gamma}\beta'_k(x,\varepsilon) = 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} \Psi(t) : -\varepsilon^{1-2\alpha+\gamma}\varphi'(x)\varphi(x)g(x,\varepsilon) - A(x)f(x,\varepsilon) + \varepsilon f'(x,\varepsilon) = 0, \\ \Psi'(t) : \varepsilon^{1-\alpha}\varphi'(x)f(x,\varepsilon) - \varepsilon^\gamma A(x)g(x,\varepsilon) + \varepsilon^{1+\gamma}g'(x,\varepsilon) = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\varepsilon\omega'(x,\varepsilon) - A(x)\omega(x,\varepsilon) + \varepsilon^{1+\gamma-\alpha}\varphi'(x)g(x,\varepsilon) = h(x). \tag{2.5}$$

Потребуем, чтобы полученные алгебраические системы уравнений (2.3)–(2.5) были регулярно возмущенными относительно малого параметра $\varepsilon > 0$. Для этого неопределенные до настоящего времени показатели α и γ подчиним следующим условиям: $1 - 2\alpha + \gamma = 0$ и $1 - \alpha = \gamma$. Из этих уравнений однозначно определим показатели $\alpha = \frac{2}{3}$ и $\gamma = \frac{1}{3}$.

Вывод 4. Если строить асимптотику решения расширенной системы (2.1) в виде ряда (2.2), в котором $\alpha = \frac{2}{3}$ и $\gamma = \frac{1}{3}$, то для определения коэффициентов этого ряда получим регулярно возмущенные относительно малого параметра $\varepsilon > 0$ системы алгебраических уравнений (2.3)-(2.5). А это означает, что проведена *регуляризация СВДУ* (0.1).

3. Построение формальных решений однородной расширенной системы

В построении асимптотики решений однородной расширенной системы (2.1) принимают участие векторные уравнения (2.3) с однозначно определенными показателями $\alpha = \frac{2}{3}$ и $\gamma = \frac{1}{3}$.

$$\alpha_k(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \alpha_{kr}(x), \quad \beta_k(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \beta_{kr}(x). \tag{3.1}$$

Подставим эти ряды в векторные уравнения (2.3). Тогда для определения вектор-функций $\alpha_{kr}(x) = \operatorname{colon}\left(\alpha_{1kr}(x), \alpha_{2kr}(x)\right)$ и $\beta_{kr}(x) = \operatorname{colon}\left(\beta_{1kr}(x), \beta_{2kr}(x)\right)$ получим следующие рекуррентные системы уравнений:

$$\Phi(x)Z_{k0}(x) = 0, \quad \Phi(x)Z_{kr}(x) = -Z'_{k(r-1)}(x), \quad r \geq 1. \tag{3.2}$$

Здесь $Z_{kr}(x) = \operatorname{colon}\left(\alpha_{1kr}(x), \alpha_{2kr}(x), \beta_{1kr}(x), \beta_{2kr}(x)\right)$, а

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 & 0 & -a_{12}(x) \\ 0 & \varphi'(x) & -a_{21}(x) & 0 \\ 0 & -a_{12}(x) & -\varphi(x)\varphi'(x) & 0 \\ -a_{21}(x) & 0 & 0 & -\varphi(x)\varphi'(x) \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Вычислив определитель этой системы, получим $\det\Phi(x) = [\varphi(x)[\varphi'(x)]^2 + a_{12}(x)a_{21}(x)]^2$. Регуляризующую функцию $\varphi(x)$ определим как решение задачи

$$[\varphi'(x)]^2\varphi(x) = -a_{12}(x)a_{21}(x) \equiv \det A(x), \quad \varphi(0) = 0. \tag{3.4}$$

Асимптотику решения расширенного уравнения строим с использованием функций Эйри–Дородницына. Поскольку аппарат функций Эйри–Дородницына хорошо разработан только для стабильной точки поворота, то этим самым было определено, что точка $x = 0$ должна быть стабильной точкой поворота, т.е. должно выполнятся условие $\det A(x) > 0$ для всех $x \in (0; l]$.

Замечание 2. Если же $\det A(x) < 0$ для $x \in (0; l]$, то $x = 0$ будет нестабильной точкой поворота (см. [5], раздел 6). В этом случае для построения асимптотики решения системы (0.1) необходимо будет использовать функции Эйри–Лангера, причем одна из этих функций будет неограниченно возрастать на бесконечности. Без особых усилий функции Эйри–Лангера также можно использовать в случае со стабильной точкой поворота.

При выполнении условия $\det A(x) = -a_{12}(x)a_{21}(x) > 0$ решением задачи (3.4) будет функция

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{-a_{12}(x)a_{21}(x)}dx\right)^{2/3}.$$

Поскольку $\det\Phi(x) \equiv 0$, то существует нетривиальное решение системы (3.2) вида

$$Z_{k0}(x) = \operatorname{colon}\left(\frac{a_{12}(x)}{\varphi'(x)}\beta_{2k0}(x), \frac{a_{21}(x)}{\varphi'(x)}\beta_{1k0}(x), \beta_{1k0}(x), \beta_{2k0}(x)\right), \tag{3.5}$$

где $\beta_{ik0}(x)$, $i,k = 1,2,$ — до определенного времени произвольные, достаточно гладкие функции при $x \in [0; l]$.

Из явного вида матрицы (3.3) и решения (3.5) видно, что систему (3.2) можно разбить на две системы:

$$\begin{aligned} \varphi'(x)\alpha_{1kr}(x) - a_{12}(x)\beta_{2kr}(x) &= -\alpha_{1k(r-1)}{}'(x), \\ a_{21}(x)\alpha_{1kr}(x) + \varphi'(x)\varphi(x)\beta_{2kr}(x) &= \beta'_{2k(r-1)}(x) \end{aligned} \tag{3.6}$$

и

$$\begin{aligned} \varphi'(x)\alpha_{2kr}(x) - a_{21}(x)\beta_{1kr}(x) &= -\alpha_{2k(r-1)}{}'(x), \\ a_{12}(x)\alpha_{2kr}(x) + \varphi'(x)\varphi(x)\beta_{1kr}(x) &= \beta_{1k(r-1)}{}'(x). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Эти системы независимы одна от другой. Однако в построении асимптотики решения расширенного уравнения (2.2) они участвуют одновременно на каждом итерационном шаге.

Приступим к решению этих систем. Сначала рассмотрим эти системы при $r = 1$. С учетом полученного решения (3.5) имеем

$$\begin{aligned} &\varphi'(x)\alpha_{1k1}(x) - a_{12}(x)\beta_{2k1}(x) = -\alpha_{1k0}{}'(x) \equiv \frac{a_{12}(x)}{\varphi'(x)}\beta_{2k0}(x), \\ &a_{21}(x)\alpha_{1k1}(x) + \varphi'(x)\varphi(x)\beta_{2k1}(x) = \beta_{2k0}{}'(x) \end{aligned} \tag{3.8}$$

и

$$\begin{aligned} &\varphi'(x)\alpha_{2k1}(x) - a_{21}(x)\beta_{1k1}(x) = -\alpha_{2k0}{}'(x) \equiv \frac{a_{21}(x)}{\varphi'(x)}\beta_{1k0}(x), \\ &a_{12}(x)\alpha_{2k1}(x) + \varphi'(x)\varphi(x)\beta_{1k1}(x) = \beta_{1k0}{}'(x). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Из (3.4) следует, что определители этих систем тождественно равны нулю, т. е. $\Delta(x) = [\varphi'(x)]^2\varphi(x) + a_{12}(x)a_{21}(x) \equiv 0$. Следовательно, в общем случае не существует решений неоднородных систем алгебраических уравнений (3.8) и (3.9). Поэтому исследуем более детально правые части этих систем. Согласно теореме Кронекера–Капелли для того, чтобы существовали нетривиальные решения систем (3.8) и (3.9), необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенных матриц систем (3.8) и (3.9) совпадал с соответствующими рангами матриц этих систем. Для выполнения этих условий используем произвольность функций $\beta_{ik0}(x)$, содержащихся в правых частях систем (3.8) и (3.9) следующим образом. Условия Кронекера–Капелли для существования решения этих неоднородных систем уравнений эквивалентны условиям

$$\frac{\varphi'(x)}{a_{21}(x)} \equiv \frac{-a_{12}(x)}{\varphi(x)\varphi'(x)} = \frac{\alpha_{1k0}{}'(x)}{\beta_{2k0}{}'(x)} \equiv \frac{\left(\frac{a_{12}(x)}{\varphi'(x)}\beta_{2k0}(x)\right)'}{\beta_{2k0}{}'(x)}, \quad k = 1, 2, \tag{3.10}$$

и

$$\frac{\varphi'(x)}{a_{12}(x)} \equiv \frac{-a_{21}(x)}{\varphi(x)\varphi'(x)} = \frac{\alpha_{2k0}{}'(x)}{\beta_{1k0}{}'(x)} \equiv \frac{\left(\frac{a_{21}(x)}{\varphi'(x)}\beta_{1k0}(x)\right)'}{\beta_{1k0}{}'(x)}, \quad k = 1, 2. \tag{3.11}$$

Из (3.10) и (3.11) при фиксированном $k = 1, 2$ получим соответственно одни и те же дифференциальные уравнения

$$[1 + \varphi(x)]\beta_{2k0}{}'(x) + \frac{a_{21}(x)}{\varphi'(x)}\left(\frac{a_{12}(x)}{\varphi'(x)}\right)'\beta_{2k0}(x) = 0, \tag{3.12}$$

$$[1 + \varphi(x)]\beta_{1k0}{}'(x) + \frac{a_{12}(x)}{\varphi'(x)}\left(\frac{a_{21}(x)}{\varphi'(x)}\right)'\beta_{1k0}(x) = 0, \tag{3.13}$$

гладкими решениями которых будут функции $\beta_{ik0}(x) = \beta^0_{ik0}\widetilde{\beta}_{ik0}(x)$, $i, k = 1, 2$, где β^0_{ik0} – произвольные постоянные, $\widetilde{\beta}_{ik0}(x)$ — частные, достаточно гладкие для всех $x \in [0; l]$, решения однородных уравнений (3.12) и (3.13).

Вывод 5. На данном этапе каждая из вектор-функций $Z_{k0}(x)$, $k = 1, 2$, определена соответственно с точностью до двух произвольных постоянных множителей $\beta^0_{ik0}, i = 1, 2$.

При таком определении вектор-функций $Z_{k0}(x)$ существуют решения неоднородных систем алгебраических уравнений (3.8) и (3.9) вида

$$Z_{kr}(x) \equiv \operatorname{colon}\left(\frac{a_{12}(x)\beta_{2kr}(x) - \alpha'_{1k(r-1)}(x)}{\varphi'(x)}, \frac{a_{21}(x)\beta_{1kr}(x) - \alpha'_{2k(r-1)}(x)}{\varphi'(x)}, \beta_{1kr}(x), \beta_{2kr}(x)\right),$$

где $\beta_{ikr}(x)$, $i, k = 1, 2$, — как и в (3.5), до определенного времени произвольные, достаточно гладкие функции при $x \in [0; l]$.

Продолжая далее решать системы (3.6) и (3.7) при $r > 1$, можно показать методом математической индукции, что эти системы уравнений асимптотически корректны в следующем смысле. Если потребовать существование решений систем уравнений (3.6) и (3.7) при $r = \overline{0; q}$, то каждая из них при $r = \overline{0; q-1}$ определяется с точностью до двух произвольных скалярных множителей β^0_{ikr}, которые образуют произвольный вектор $\beta^0_{kr} = \mathrm{colon}(\beta^0_{1kr}, \beta^0_{2kr})$.

4. Построение формальных частных решений неоднородного расширенного уравнения

Построение асимптотики частных решений неоднородного расширенного уравнения (1.2) обеспечивают системы (2.4) и (2.5). Исследуем сначала систему уравнений (2.4). По структуре она одинакова с системой (2.3). Следовательно, на основе результатов предыдущего параграфа можно сразу записать формальные решения этой системы в виде рядов по степеням малого параметра $\varepsilon > 0$. Однако в этом случае не получили бы желаемых решений рекурентной системы (2.5), которую с учетом однозначно определенных показателей запишем в виде ($\mu = \varepsilon^{1/3}$)

$$-A(x)\omega(x,\varepsilon) + \mu^2\varphi'(x)g(x,\varepsilon) + \mu^3\omega'(x,\varepsilon) = h(x). \tag{4.1}$$

Исходя из сказанного, для обеспечения существования гладкого решения системы (4.1) асимптотику решения системы (2.4) строим в виде рядов

$$f(x,\varepsilon) = \sum_{r=-2}^{+\infty} \mu^r f_r(x), \quad g(x,\varepsilon) = \sum_{r=-2}^{+\infty} \mu^r g_r(x). \tag{4.2}$$

Для определения вектор-функций $f_r(x)$ и $g_r(x)$ получим рекуррентные системы уравнений

$$\Phi(x)Y_r^{\text{частн.}}(x) = 0, \quad r = -2; -1; 0, \quad \Phi(x)Y_r^{\text{частн.}}(x) = -Y_{(r-3)}^{\text{частн.}\prime}(x), \quad r \geq 1. \tag{4.3}$$

Здесь $\Phi(x)$ — матрица (3.3), а $Y_r^{\text{частн.}}(x) = \mathrm{colon}\left(f_{1r}(x), f_{2r}(x), g_{1r}(x), g_{2r}(x)\right)$ — неизвестная вектор-функция.

С учетом результатов предыдущего параграфа исследования проведем схематически. Поскольку $\det\Phi(x) \equiv 0$, то существуют нетривиальные решения однородных систем (4.3) при $r = -2; -1; 0$ вида (см. (3.5))

$$Y_r^{\text{частн.}}(x) = \mathrm{colon}\left(\frac{a_{12}(x)}{\varphi'(x)}g_{2r}(x), \frac{a_{21}(x)}{\varphi'(x)}g_{1r}(x), g_{1r}(x), g_{2r}(x)\right), \tag{4.4}$$

где $g_{ir}(x)$ — до определенного времени произвольные, достаточно гладкие функции при $x \in [0; l]$.

Далее, по аналогии с предыдущим параграфом (см. (3.6)–(3.7)), для определения функций $f_r(x)$ и $g_r(x)$ при $r \geq 1$ получим две рекуррентные системы уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi'(x)f_{1r}(x) - a_{12}(x)g_{2r}(x) &= -f_{1(r-3)}{}'(x), \\ a_{21}(x)f_{1r}(x) + \varphi'(x)\varphi(x)g_{2r}(x) &= g_{2(r-3)}{}'(x) \end{aligned} \tag{4.5}$$

и

$$\begin{aligned} \varphi'(x)f_{2r}(x) - a_{21}(x)g_{1r}(x) &= -f_{2(r-3)}{}'(x), \\ a_{12}(x)f_{2r}(x) + \varphi'(x)\varphi(x)g_{1r}(x) &= g_{1(r-3)}{}'(x). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Определители этих систем тождественно равны нулю. Поэтому исследование существования их решения при $r = \overline{1; 3}$ проведем по аналогии с (3.10) и (3.11). Потребуем выполнения условий

$$\frac{\varphi'(x)}{a_{21}(x)} \equiv \frac{-a_{12}(x)}{\varphi(x)\varphi'(x)} = \frac{f_{1(r-3)}{}'(x)}{g_{2(r-3)}{}'(x)} \equiv \frac{\left(\frac{a_{12}(x)}{\varphi'(x)}g_{2(r-3)}(x)\right)'}{g_{2(r-3)}{}'(x)} \tag{4.7}$$

и

$$\frac{\varphi'(x)}{a_{12}(x)} \equiv \frac{-a_{21}(x)}{\varphi(x)\varphi'(x)} = \frac{f_{2(r-3)}{}'(x)}{g_{1(r-3)}{}'(x)} \equiv \frac{\left(\frac{a_{21}(x)}{\varphi'(x)} g_{1(r-3)}(x)\right)'}{g_{1(r-3)}{}'(x)}. \tag{4.8}$$

Снова, из равенств (4.7) и (4.8) получим дифференциальные уравнения

$$[1+\varphi(x)]g_{2(r-3)}{}'(x) + \frac{a_{21}(x)}{\varphi'(x)}\left(\frac{a_{12}(x)}{\varphi'(x)}\right)' g_{2(r-3)}(x) = 0, \quad r = \overline{1;3}, \tag{4.9}$$

$$[1+\varphi(x)]g_{1(r-3)}{}'(x) + \frac{a_{12}(x)}{\varphi'(x)}\left(\frac{a_{21}(x)}{\varphi'(x)}\right)' g_{1k(r-3)}(x) = 0, \quad r = \overline{1;3}. \tag{4.10}$$

гладкими решениями которых будут функции $g_{i(r-3)}(x) = g^0_{i(r-3)}\widetilde{g}_{i(r-3)}(x)$, $i=1,2$, где $g^0_{i(r-3)}$ — произвольные постоянные, $\widetilde{g}_{i(r-3)}(x)$ — частные, достаточно гладкие для всех $x \in [0;l]$, решения однородных уравнений (4.9) при $r = \overline{1;3}$.

Дальнейшие исследования приводят к следующим выводам.

Вывод 6. Требуя существования решений систем (4.5) и (4.6) при $r=\overline{1;3}$, определим вектор-функции $Y_r^{\text{частн.}}(x)$, $r=\overline{-2;0}$ (см. (4.4)) с точностью до произвольных постоянных множителей g^0_{ir}, $r=\overline{-2;0}$, $i=1,2$.

Вывод 7. При таком определении вектор-функций $Y_r^{\text{частн.}}(x)$, $r=\overline{-2;0}$, существуют решения неоднородных системы уравнений (4.5) и (4.6) при $r=\overline{1;3}$ вида

$$Y_r^{\text{частн.}}(x) \equiv \operatorname{colon}\left(\frac{a_{12}(x)g_{2r}(x) - g'_{1(r-3)}(x)}{\varphi'(x)}, \frac{a_{21}(x)g_{1r}(x) - g'_{2(r-3)}(x)}{\varphi'(x)}, g_{1r}(x), g_{2r}(x)\right).$$

Замечание 3. На первый взгляд в решениях появились лишние произвольные постоянные множители g^0_{ir}. Однако далее будет показано, что на каждом итерационном шаге за счет однозначного определения этих постоянных будет обеспечено существование достаточно гладких решений систем (4.1), т. е. будет получена аналогия с методом решения уравнения Лиувилля и систем СВДУ вида (0.4) (см. [5]–[9]).

Продолжая далее решать итерационные системы алгебраических уравнений (4.5) и (4.6) при $r>3$, методом математической индукции можно показать, что системы уравнений (4.5) и (4.6) асимптотически корректны.

Таким образом, еще осталось исследовать решения системы (4.1). Асимптотику решения этой системы строим в виде ряда

$$\omega(x,\varepsilon) = \sum_{r=-2}^{+\infty} \mu^r \omega_r(x). \tag{4.11}$$

Для определения вектор-функций $\omega_r(x)$ получим рекуррентные системы уравнений

$$\begin{gathered} -A(x)\omega_0(x) = h(x) - \varphi'(x)g_{(-2)}(x), \quad -A(x)\omega_r(x) = -\varphi'(x)g_{(r-2)}(x), \quad r=1;2, \\ -A(x)\omega_r(x) = -\varphi'(x)g_{(r-2)}(x) - \omega'_{(r-3)}(x), \quad r \geq 3. \end{gathered} \tag{4.12}$$

Здесь $\omega_r(x) = \operatorname{colon}(\omega_{1r}(x), \omega_{2r}(x))$ — неизвестная вектор-функция.

Исследуем уравнение (4.12) при $r=0$. Для этого сначала вычислим его правую часть. Для большей наглядности распишем ее в скалярном виде. Имеем

$$\begin{aligned} -a_{12}(x)\omega_{20}(x) &= h_1(x) - \varphi'(x)g_{1(-2)}(x) \equiv h_1(x) - \varphi'(x)g^0_{1(-2)}\widetilde{g}_{1(-2)}(x), \\ -a_{21}(x)\omega_{10}(x) &= h_2(x) - \varphi'(x)g_{2(-2)}(x) \equiv h_2(x) - \varphi'(x)g^0_{2(-2)}\widetilde{g}_{2(-2)}(x). \end{aligned} \tag{4.13}$$

При решении системы (4.13) необходимо уточнить, какой из множителей определителя $\det A(x) \equiv -a_{12}(x)a_{12}(x)$ обращается в нуль в точке поворота. Согласно предположению (1.8) исследования проводятся для случая $a_{12}(0)=0$. В общем случае первое уравнение системы (4.13) не имеет гладкого решения в точке поворота. Однако, используя произвольность множителя $g^0_{1(-2)}$, выберем его в виде $g^0_{1(-2)} = h_1(0)\big(\varphi'(0)\widetilde{g}_{1(-2)}(0)\big)^{-1}$. Поскольку в этом случае $a_{21}(0) \neq 0$, то не нарушая общности, можно взять $g^0_{2(-2)} = 0$.

При таком выборе множителей $g^0_{i(-2)}$ существует достаточно гладкое решение системы (4.13) на всем отрезке I, включая и точку поворота $x = 0$, а именно

$$\omega_{10}(x) = \frac{-h_2(x) + \varphi'(x)g_{2(-2)}(x)}{a_{21}(x)}, \quad \omega_{20}(x) = \frac{-h_1(x) + \varphi'(x)g_{1(-2)}(x)}{a_{12}(x)}.$$

Здесь

$$\omega_{20}(0) = \lim_{x\to+0} \frac{-h_1(x) + \varphi'(x)g_{1(-2)}(x)}{a_{12}(x)} = \frac{[-h_1(x) + \varphi'(x)g_{1(-2)}(x)]'}{a'_{12}(x)}\Big|_{x=0} < \infty.$$

Исследуем систему (4.12) при $r = 1, 2$. Для обеспечения существования достаточно гладкого решения этой системы на всем отрезке I, включая и точку поворота $x = 0$, можно взять $g^0_{(-1)} = g^0_0 = 0$. Тогда получим гладкие решения

$$\omega_{1r}(x) = \frac{\varphi'(x)g_{2r}(x)}{a_{21}(x)}, \quad \omega_{2r}(x) = \frac{\varphi'(x)g_{1r}(x)}{a_{12}(x)}, \quad r = 1, 2.$$

При $r \geq 3$ в развернутом виде имеем систему

$$\begin{aligned} -a_{12}(x)\omega_{2r}(x) &= -\varphi'(x)g^0_{1(r-2)}\widetilde{g}_{1(r-2)}(x) - {\omega_{1(r-3)}}'(x), \\ -a_{21}(x)\omega_{1r}(x) &= -\varphi'(x)g^0_{2(r-2)}\widetilde{g}_{2(r-2)}(x) - {\omega_{2(r-3)}}'(x). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Система (4.14) будет иметь достаточно гладкие решения, если произвольные постоянные взять в виде

$$g^0_{1(r-2)} = \frac{-{\omega_{1(r-3)}}'(0)}{\varphi'(0)\widetilde{g}_{1(r-2)}(0)}, \quad g^0_{1(r-2)} = 0, \quad r \geq 3.$$

Тогда при $r \geq 3$ получим гладкие решения

$$\omega_{1r}(x) = \frac{\varphi'(x)g_{2(r-2)}(x) + {\omega_{2(r-3)}}'(x)}{a_{21}(x)}, \quad \omega_{2r}(x) = \frac{\varphi'(x)g_{1(r-2)}(x) + {\omega_{1(r-3)}}'(x)}{a_{12}(x)}.$$

Замечание 4. Если при интегрировании дифференциальных уравнений (4.9) взять в интеграле нижний предел равным нулю, то решениями однородных дифференциальных уравнений (4.9) при однородных начальных условиях будут тождественные нули. В этом случае решения (4.4) упростятся, а именно

$$Y_r^{\text{частн.}}(x) = \operatorname{colon}\left(0, \frac{a_{21}(x)}{\varphi'(x)}g_{1r}(x), g_{1r}(x), 0\right), \quad r = \overline{-2; 0}.$$

Таким образом, при постепенном решении серии систем дифференциальных уравнений (2.4) и (2.5) будут однозначно определены все коэффициенты рядов (4.2) и (4.11).

Вывод 8. Построено решение расширенного уравнения (2.1) в виде формального ряда (см. (2.2))

$$\begin{aligned} \widetilde{y}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \left[\sum_{k=1}^{2} [\alpha_{kr}(x)U_k(t) + \varepsilon^{-1/3}\beta_k(x)U'_k(t)]\right] + \\ + \sum_{r=-2}^{+\infty} \mu^r [f_r(x)\Psi(t) + \varepsilon^{1/3}g_r(x)\Psi'(t)] + \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \omega_r(x). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Сужение этого решения при $t = \varepsilon^{-1}\varphi(x)$, т. е. ряд

$$y(x,\varepsilon^{-1}\varphi(x),\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^{r}\left[\sum_{k=1}^{2}\left[\alpha_{kr}(x)U_k(\varepsilon^{-1}\varphi(x)) + \varepsilon^{-1/3}\beta_{kr}(x)\frac{dU_k(\varepsilon^{-1}\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-1}\varphi(x))}\right]\right] + \\ + \sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^{r/3}\left[f_r(x)\Psi(\varepsilon^{-1}\varphi(x)) + \varepsilon^{1/3}g_r(x)\frac{d\Psi(\varepsilon^{-1}\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-1}\varphi(x))}\right] + \sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^{r/3}\omega_r(x), \quad (4.16)$$

является формальным решением изучаемой системы СВДУ (0.1).

5. Оценка остаточных членов асимптотики решения

Для того чтобы утверждать об асимптотическом характере построенных решений (4.15) и (4.16), необходимо дать оценку остаточных членов этих решений. Поскольку СОФ входят в построенные решения как множители, то для получения соответствующих оценок решений достаточно дать оценки остаточных членов формальных рядов (3.1), (4.2) и (4.11).

Формальные ряды (3.1) запишем в виде тождеств $\alpha_k(x,\varepsilon) \equiv \alpha_{kq}(x,\varepsilon) + \varepsilon^{q+1}\xi_{\alpha k(q+1)}(x,\varepsilon)$, $\beta_k(x,\varepsilon) \equiv \beta_{kq}(x,\varepsilon) + \varepsilon^{q+1}\xi_{\beta k(q+1)}(x,\varepsilon)$, где $\alpha_{kq}(x,\varepsilon)$ и $\beta_{kq}(x,\varepsilon)$ — частичные q-суммы рядов (3.1), а $\varepsilon^{q+1}\xi_{\alpha k(q+1)}(x,\varepsilon)$ и $\varepsilon^{q+1}\xi_{\beta k(q+1)}(x,\varepsilon)$ — остаточные члены этих рядов.

Подставим эти ряды в систему (2.3) и учтем, что коэффициенты $\alpha_{kr}(x)$ и $\beta_{kr}(x)$ являются решениями систем (3.6) и (3.7), т. е. каждая из вектор-функций $\alpha_{kr}(x)$ и $\beta_{kr}(x)$ при $r = \overline{0; q-1}$ определяется с точностью до двух произвольных скалярных множителей β_{ikr}^0, которые образуют произвольный вектор $\beta_{kr}^0 = \mathrm{colon}\,(\beta_{1kr}^0, \beta_{2kr}^0)$. Решение систем (3.6) и (3.7) при $r = q$ зависит от двух произвольных достаточно гладких функций $\beta_{ikq}(x)$, $i = 1, 2$.

Для определения остаточных членов получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon\xi'_{\alpha(q+1)}(x,\varepsilon) - \varphi(x)\varphi'(x)\xi_{\beta(q+1)}(x,\varepsilon) - A(x)\xi_{\alpha(q+1)}(x,\varepsilon) + {\alpha_{kq}}'(x) = 0,\\ \varepsilon\xi'_{\beta(q+1)}(x,\varepsilon) + \varphi'(x)\xi_{\alpha(q+1)}(x,\varepsilon) - A(x)\xi_{\beta(q+1)}(x,\varepsilon) + {\beta_{kq}}'(x) = 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

которая по структуре аналогична системе (2.3).

По аналогии с предыдущим (см. (3.6) и (3.7)), для определения координат неизвестных вектор-функций

$$\xi_{\alpha k(q+1)}(x,\varepsilon) = \left(\xi_{1\alpha k(q+1)}(x,\varepsilon); \xi_{2\alpha k(q+1)}(x,\varepsilon)\right) \quad \text{и} \quad \xi_{\beta k(q+1)}(x,\varepsilon) = \left(\xi_{1\beta k(q+1)}(x,\varepsilon); \xi_{2\beta k(q+1)}(x,\varepsilon)\right)$$

систему (5.1) разобем на две независимых системы

$$\begin{aligned} \varepsilon\xi'_{1\alpha(q+1)}(x,\varepsilon) + \varphi'(x)\xi_{1\alpha(q+1)}(x,\varepsilon) - a_{12}(x)\xi_{2\beta(q+1)}(x,\varepsilon) = -{\alpha_{1kq}}'(x),\\ \varepsilon\xi'_{2\beta(q+1)}(x,\varepsilon) + a_{21}(x)\xi_{1\alpha(q+1)}(x,\varepsilon) - \varphi'(x)\varphi(x)\xi_{2\beta(q+1)}(x,\varepsilon) = {\beta_{2kq}}'(x) \end{aligned} \quad (5.2)$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon\xi'_{2\alpha(q+1)}(x,\varepsilon) + \varphi'(x)\xi_{2\alpha(q+1)}(x,\varepsilon) - a_{21}(x)\xi_{1\beta(q+1)}(x,\varepsilon) = -{\alpha_{2kq}}'(x),\\ \varepsilon\xi'_{2\beta(q+1)}(x,\varepsilon) + a_{12}(x)\xi_{2\alpha(q+1)}(x,\varepsilon) - \varphi'(x)\varphi(x)\xi_{1\beta(q+1)}(x,\varepsilon) = {\beta_{1kq}}'(x). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Решения систем (3.6) и (3.7) построены в виде рядов относительно малого параметра (см. (3.1)). Системы (5.2) и (5.3) решать нет необходимости, а только достаточно оценить их решения. На первый взгляд кажется, что полученные системы (5.2) и (5.3) не проще исследуемой системы (0.1).

Однако легко проверить, что характеристические уравнения для этих систем имеют вид $\lambda^2(x) + \varphi'(x)(1+\varphi(x))\lambda(x) = 0$, т. е. $\lambda_1(x) \equiv 0$ и $\lambda_2(x) = -\varphi'(x)\,(1+\varphi(x))$.

Системы уравнений (5.2) и (5.3) не содержат точки поворота и имеют стабильный спектр. Поэтому для их решения применима классическая теория метода регуляризации (см. [3]). Следовательно, получим следующие оценки остаточных членов:

$$\left\|\xi_{\alpha k(q+1)}(x,\varepsilon)\right\| \le K_{(q+1)}, \quad \left\|\xi_{\beta k(q+1)}(x,\varepsilon)\right\| \le K_{(q+1)}, \quad q > 0, \quad (5.4)$$

где постоянная K_{q+1} не зависит от $x \in I$ и малого параметра $\varepsilon > 0$.

Аналогичным образом для формальных рядов (4.2) и (4.11) получим оценки

$$\|\xi_{f(q+1)}(x,\varepsilon)\| \le K_{(q+1)}, \quad \|\xi_{g(q+1)}(x,\varepsilon)\| \le K_{(q+1)}, \quad \|\xi_{\omega(q+1)}(x,\varepsilon)\| \le K_{(q+1)}, \quad q > 0. \quad (5.5)$$

Учитывая полученные оценки (5.4) и (5.5), асимптотику общего решения системы (0.1) можно записать в виде ряда

$$y(x,\varepsilon^{-1}\varphi(x),\varepsilon) = \sum_{k=1}^{2}\left\{\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^r\alpha_{kr}(x) + O(\varepsilon^{q+1})\right]U_k(\varepsilon^{-1}\varphi(x)) + \right.$$
$$\left. + \varepsilon^{1/3}\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^r\beta_{kr}(x) + O(\varepsilon^{q+1})\right]\frac{dU_k(\varepsilon^{-1}\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-1}\varphi(x))}\right\} + \sum_{r=0}^{q}\mu^r\omega_r(x) + O(\varepsilon^{q+1}) +$$
$$+\left[\sum_{r=-2}^{q}\mu^r f_r(x) + O(\varepsilon^{q+1})\right]\Psi(\varepsilon^{-1}\varphi(x)) + \varepsilon^{1/3}\left[\sum_{r=-2}^{q}\mu^r g_r(x) + O(\varepsilon^{q+1})\right]\frac{d\Psi(\varepsilon^{-1}\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-1}\varphi(x))}. \quad (5.6)$$

Сформулируем полученные результаты.

Теорема. *Пусть для системы СВДУ* (0.1): а) *имеют место условия* (1.8); б) $a_{12}(x), a_{21}(x) \in C^\infty[0;l]$. *Тогда при достаточно малых значениях параметра* $\varepsilon > 0$ *можно построить асимптотику общего решения системы* (0.1) *в виде асимптотического ряда* (5.6).

Литература

1. Вазов В. *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1968. – 464 с.
2. Wasow W. *Linear turning point theory.* – New York Ins.: Springer-Verlag, 1985. – 243 p.
3. Ломов С.А. *Введение в общую теорию сингулярных возмущений.* – М.: Наука, 1981. – 398 с.
4. Олвер Ф. *Асимптотика и специальные функции* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 226. – P. 227–241.
5. Бобочко В.М., Перестюк М.О. *Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту.* – Київ: Наук. думка, 2002. – 310 с.
6. Бобочко В.Н. *Внутренняя точка поворота в теории сингулярных возмущений* // Укр. матем. журн. – 1996. – Т. 48. – № 7. – С. 876–890.
7. Бобочко В.Н. *Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с точкой поворота* // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 9. – С. 1505–1515.
8. Бобочко В.Н. *Система дифференциальных уравнений с сильной точкой поворота* // Укр. матем. журн. – 1997. – Т. 49. – № 11. – С. 1543–1547.
9. Бобочко В.Н. *Система дифференциальных уравнений с точкой поворота в случае недиагонализируемого предельного оператора* // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34. – № 10. – С. 1304–1312.
10. Дородницын А.А. *Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка* // УМН. – 1952. – Т. 7. – Вып. 6. – С. 3–96.

Кировоградский государственный
педагогический университет

Поступила
10.03.2005