ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 1 (524)

УДК 517.958

С.А. БАЕВА, А.В. ГЛУШКО

О НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКИХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Введение

Данная работа посвящена построению решений нескольких начально-краевых задач в полупространстве $x \in R_2^+ = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 \in R,\ 0 < x_2 < \infty\}$ (время $t > 0$), описывающих малые колебания вязкой стратифицированной жидкости и изучению гладкости этих решений. Особое внимание уделено анализу динамики разрывов в начальных или граничных условиях.

Рассмотрим начально-краевую задачу для линеаризированной системы уравнений плоского движения вязкой стратифицированной жидкости

$$A\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial t}\Big)U = 0, \tag{1}$$

где $A = \{a_{kl}\}$, $1 \le k, l \le 4$; $a_{11} = a_{22} = \frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta$, $a_{m4} = a_{4m} = \frac{\partial}{\partial x_m}$, $m = 1, 2$; $a_{33} = \frac{\partial}{\partial t}$; $a_{23} = g$; $a_{32} = -\frac{w_0^2}{g}$; $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = a_{34} = a_{43} = a_{44} = 0$, $U(x,t) = \{U_1(x,t), U_2(x,t), U_3(x,t), U_4(x,t)\}^\top$; $x \in R_2^+$, $t > 0$, где U_1, U_2 — компоненты вектора скорости движения жидкости в вертикальной плоскости, U_3 — отклонение плотности от стационарной, U_4 — давление в точке x в момент t; ν — коэффициент вязкости жидкости, ω_0 — частота Вейселя–Брента, g — ускорение свободного падения.

Ранее для системы (1) изучены асимптотика решения задачи Коши при $t \to \infty$ и динамика разрыва начального условия [1]. Основной задачей этой работы является изучение динамики разрыва решения начально-краевой задачи в полупространстве, порожденного разрывами граничных либо начальных функций.

Система (1) изучается при начальных условиях

$$U_k(x,t)|_{t=+0} = 0, \quad k = 1, 2; \quad U_3(x,t)|_{t=+0} = \begin{cases} 1 & \text{при } x_1^2 + (x_2 - 2R)^2 < R^2, \\ 0 & \text{при } x_1^2 + (x_2 - 2R)^2 \le R^2 \end{cases} \tag{2}$$

и граничных

$$U_1|_{x_2=+0} = 0, \quad U_4|_{x_2=+0} = 0. \tag{3}$$

При помощи “метода отражения” задача (1)–(3) может быть сведена к задаче в $S'(\mathbb{R})$ [2]

$$AV = F = \{0; 0; V_{0,3}(x)\delta(t); 0\}^\top, \tag{4}$$

где $\top$ — знак транспонирования, $V_{0,3}$ — четное продолжение на $x_2 < 0$ функции из начального условия (2) для $U_3(x,t)$.

Решение задачи (4) можно записать в виде

$$V(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-i(x,s)}\left[\frac{gs_1s_2}{|s|^2},\frac{-gs_1^2}{|s|^2},\gamma_2+\nu|s|^2,\gamma_2+\nu|s|^2\right]^\top\frac{e^{\gamma_1t}-e^{\gamma_2t}}{\gamma_1-\gamma_2}f_0(s)ds+$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-i(x,s)}e^{\gamma_1t}\left[0,0,1,\frac{gis_2}{|s|^2}\right]^\top f_0(s)ds.$$

Теорема 1. *Компоненты $V_1(x,t)$, $V_2(x,t)$, $V_4(x,t)$ решения задачи (4) являются непрерывными ограниченными функциями своих аргументов. Компонента $V_3(x,t)$ решения представима в виде $V_3(x,t)=V_{0,3}(x)+V^*(x,t)$, где $V^*(x,t)$ — непрерывная ограниченная функция, а $V_{0,3}(x)$ — нечетное продолжение на $x_2<0$ начальной функции из (2) для компоненты $U_3(x,t)$.*

Замечание. Чтобы перейти от функций $V_i(x,t)$ к компонентам решения исходной задачи U_i, нужно V_i с пространства $L_2(\mathbb{R}^3)$ сузить на пространство $L_2(\mathbb{R}\times(0,\infty)\times(0,\infty))$. Все свойства, доказанные для $V_i(x,t)$, очевидно, справедливы и для $U_i(x,t)$.

Далее изучим систему (1) при начальных условиях

$$U_k|_{t=+0}=0,\quad k=1,2,3;\quad U_1|_{x_2=+0}=v_0(x_1,t),\quad U_4|_{x_2=+0}=p_0(x_1,t). \tag{5}$$

С помощью четного/нечетного продолжения на $x_2<0$ задача (1), (5) сводится к обобщенной задаче Коши

$$AV=F\equiv\left\{-2\nu v_0(x_1,t)\frac{\partial}{\partial x_2}\delta(x_2),-2\nu w_0(x_1,t)\delta(x_2),0,0\right\}^\top. \tag{6}$$

Введем обозначения

$$u_1(s,t)=\frac{is_2^3}{|s|^2}\frac{\partial h}{\partial t}\underset{(t)}{*}\widehat{v}_0-\frac{s_1s_2}{|s|^2}\underset{(t)}{*}\widehat{w}_0;\quad u_2(s,t)=-\frac{is_1s_2^2}{|s|^2}\frac{\partial h}{\partial t}\underset{(t)}{*}\widehat{v}_0+\frac{s_1s_2}{|s|^2}\frac{\partial h}{\partial t}\underset{(t)}{*}\widehat{w}_0;$$
$$u_3(s,t)=\frac{w_0^2}{g}\Big(-\frac{is_1s_2^2}{|s|^2}h\underset{(t)}{*}\widehat{v}_0+\frac{s_1^2}{|s|^2}h\underset{(t)}{*}\widehat{w}_0\Big);$$
$$u_4(s,t)=w_0^2\Big(-\frac{s_1^3s_2}{|s|^4}h\underset{(t)}{*}\widehat{v}_0-\frac{s_1s_2}{|s|^2}h\underset{(t)}{*}\widehat{v}_0+\frac{is_1^2}{|s|^4}h\underset{(t)}{*}\widehat{w}_0\Big),$$

где $h(x,t)=\frac{e^{\gamma_1t}-e^{\gamma_2t}}{\gamma_1-\gamma_2}$, $\widehat{g}(s_1,t)=F^{-1}_{x_1\to s_1}[g(x_1,t)]$,

$$V_k(x,t)=-2\nu F^{-1}_{s\to x}[u_k(s,t)],\quad k=1,2,3,4. \tag{7}$$

Теорема 2. *Справедливы следующие оценки компонент* (7) *решения задачи* (6):

$$\|V_m(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0,\infty))}\le ct\sum_{k=0}^{1}\left[\left\|\frac{\partial^kv_0}{\partial t^k}\right\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0,\infty))}+\left\|\frac{\partial^kw_0}{\partial t}\right\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0,\infty))}\right],$$
$$\|V_3(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0,\infty))}+\sum_{k=1}^{2}\left\|\frac{\partial v_4}{\partial x_k}(\cdot,t)\right\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0,\infty))}\le c\sqrt{t(1+t)}[\|v_0\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0,\infty))}+\|w_0\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0,\infty))}].$$

Имеют место и оценки норм компонент решения по совокупности переменных (x,t). Приведем, например, оценку

$$\sum_{p=0}^{2}\left\|\frac{\partial^pV_m}{\partial x_n^p}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^2\times(0,\infty))}\le c\Big[\Big\langle\Big\langle\frac{\partial v_0}{\partial t}\Big\rangle\Big\rangle_{3/2}+\Big\langle\Big\langle\frac{\partial w_0}{\partial t}\Big\rangle\Big\rangle_{1/2}\Big],\quad m,p,n=1,2.$$

Здесь использована норма в пространстве $W_2^\rho(R)$ Соболева–Слободецкого с индексом $\rho\in\mathbb{R}$

$$\langle\langle f\rangle\rangle_\rho=\left\{\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty(1+t)^2|F_{x_1\to s_1}[f(x,t)]|^2(1+s_1^2)^\rho ds_1dt\right\}^{1/2}.$$

Рассмотрим еще начально-краевую задачу для системы уравнений (1) при начальных условиях

$$U_1(x,t)|_{t=+0} = 0, \quad U_2(x,t)|_t = +0, \quad U_3(x,t)|_{t=+0} = 0, \tag{8}$$

и условиях на границе

$$U_4|_{x_2=+0} = g(t)1_{[-1,1]}(x_1), \ \ U_1|_{x_2=+0} = 0; \ \ \text{здесь} \ \ 1_{[-1,1]}(x_1) = \begin{cases} 1, & x_1 \in [-1;1]; \\ 0, & x_1 \notin [-1;1]. \end{cases} \tag{9}$$

С помощью "метода отражения" продолжаем решение задачи (1), (8), (9) на $x_2 < 0$ и переходим к обобщенной задаче Коши

$$AV = F\{0, -2\nu g(t)1_{[-1,1]}(x_1)\delta(x_2), 0, 0\}^\top. \tag{10}$$

Решение задачи (10) может быть построено в явном виде с помощью преобразования Фурье.

Теорема 3. *Если* $g(t), \frac{\partial g}{\partial t} \in L_2(0,\infty)$*, то решение задачи* (10) $\{V_1(x,t), V_2(x,t), V_3(x,t), V_4(x,t))\}^\top$ *существует, и справедливы следующие оценки*:

$$\|V_1(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0,\infty))} + \|V_2(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0,\infty))} \le c\sqrt{t}\left(\|g\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0,\infty))} + \left\|\frac{\partial g}{\partial t}\right\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0,\infty))}\right),$$

$$\|V(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0,\infty))} + \|V_4(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0,\infty))} \le c\sqrt{t}\|g\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0,\infty))}.$$

Компоненты $V_k(x,t)$ *решения являются непрерывными, ограниченными функциями своих аргументов.*

Таким образом, в отличие от разрыва в начальных условиях (2), разрыв на границе $x_2 = 0$ в условиях (9) сглаживается при $x_2 > 0$.

Литература

1. Глушко А.В. *Асимптотические колебания и интрузия в вязкой сжимаемой стратифицированной жидкости* // Докл. РАН. – 1999. – Т. 365. – № 1. – С. 26–30.
2. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1981. – 512 с.

Воронежский государственный университет

Поступила 12.11.2004