ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 7 (434)

УДК 517.956.3

*А.Ю. СЕНИЦКИЙ*

# ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В данной работе изучаются различные случаи интегрируемости линейного дифференциального уравнения в частных производных, описывающего распространение осесимметричных волн в неоднородной анизотропной среде из цилиндрической или сферической полости. Для этой цели используется преобразование Фурье в сочетании со специальным представлением трансформанты в пространстве изображений. С помощью введенных при этом произвольных функций строятся различные варианты замкнутых решений и определяются соответствующие им законы неоднородной среды. Приводятся также альтернативные случаи интегрируемости исследуемого уравнения, не содержащего волновые функции. Построенные решения отсутствуют в известных справочных руководствах по дифференциальным уравнениям [1], [2]. Результаты, полученные для непрерывно-неоднородных анизотропных сред с цилиндрической или сферической симметрией при определенных соотношениях упругих констант материала, дополняют известные исследования волновых процессов в аналогичных средах [3]–[8]. Отметим, что более общими способами преобразования уравнений являются групповой анализ [2], [9] и метод факторизации [10], [11].

## 1. Постановка задачи

Дифференциальное уравнение движения непрерывно-неоднородной анизотропной упругой среды в случае ее осесимметричной деформации, а также уравнения состояния, связывающие компоненты тензора напряжений и вектора перемещений, записываются следующим образом [12]

$$\frac{\partial\sigma^*_{rr}}{\partial r^*}+\frac{n(\sigma^*_{rr}-\sigma^*_{\theta\theta})}{r^*}-\rho_*\frac{\partial^2 U^2}{\partial t^2_*}=0,\quad \sigma^*_{rr}=C^*_{11}=\frac{\partial U^*}{\partial r^*}+nC^*_{12}\frac{U^*}{r^*},\tag{1.1}$$

$$\sigma^*_{\theta\theta}=\sigma^*_{\varphi\varphi}=C^*_{12}\frac{\partial U^*}{\partial r^*}+[C^*_{22}+(n-1)C^*_{23}]\frac{U^*}{r^*}.\tag{1.2}$$

Здесь $\sigma^*_{rr}(r^*,t^*)$, $\sigma^*_{\varphi\varphi}(r^*,t^*)$, $\sigma^*_{\theta\theta}(r^*,t^*)$ — соответствующие компоненты нормальных напряжений; $U^*(r^*,t^*)$ — радиальная компонента вектора перемещений; $C^*_{ik}(r^*)$, $\rho_*(r^*)$ — соответственно упругие характеристики и плотность неоднородной анизотропной среды; $r^*$, $t^*$ — радиальная координата и время; $n=1,2$ — значение, соответствующее цилиндрической и сферической полостям.

После подстановки соотношений (1.2) в (1.1) и введения безразмерных величин по формулам

$$C_{ik}=\frac{C^*_{ik}}{a^*_{33}},\quad r=\frac{r^*}{a},\quad \rho=\frac{\rho_*}{\rho_0},\quad U=\frac{U^*}{a^*},\quad t=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^*_{33}}{\rho_0}}\,t^*,$$
$$\sigma_{rr}=\frac{\sigma^*_{rr}}{a^*_{33}},\quad \sigma_{\theta\theta}=\frac{\sigma^*_{\theta\theta}}{a^*_{33}},\quad \sigma_{\varphi\varphi}=\frac{\sigma^*_{\varphi\varphi}}{a^*_{33}}$$

уравнение (1.1) и соотношения (1.2) в $\Omega = \{t > 0,\ 1 < r < a\}$ определяются системой равенств

$$\frac{\partial^2 U(r,t)}{\partial r^2} + A(r)\frac{\partial U(r,t)}{\partial r} + B(r)u(r,t) - C(r)\frac{\partial^2 U(r,t)}{\partial t^2} = 0, \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r,t) &= C_{11}(r)\frac{\partial U(r,t)}{\partial r} + nC_{12}(r)\frac{U(r,t)}{r}, \\ \sigma_{\theta\theta}(r,t) = \sigma_{\varphi\varphi}(r,t) &= C_{12}(r)\frac{\partial U(r,t)}{\partial r} + [C_{22}(r) + (n-1)C_{23}(r)]\frac{U(r,t)}{r}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где

$$A(r) = \frac{1}{C_{11}}\left[\frac{dC_{11}(r)}{dr} + \frac{C_{11}(r)}{r}n\right] = \frac{d}{dr}[\ln(C_{11}r^n)], \tag{1.5}$$

$$B(r) = \frac{n}{C_{11}(r)r^2}\left[(n-1)(C_{12}(r) - C_{23}(r)) - C_{22}(r) + r\frac{dC_{12}(r)}{dr}\right], \quad C(r) = \frac{p(r)}{C_{11}(r)},$$

$a$ — радиус цилиндрической (сферической) полости, $\rho_0$ — плотность однородного анизотропного тела.

Если при $t = 0$ упругая среда находилась в состоянии покоя, то

$$u(r,0) = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 1 \le r < \infty. \tag{1.6}$$

На границе полости могут действовать радиальные напряжения $P^*(t^*)$ или перемещения $V^*(t^*)$, т. е. при $r^* = a$ задаются граничные условия

$$\sigma_{rr}(1,t) = P(t) \quad \text{или} \quad u(1,t) = V(t). \tag{1.7}$$

Здесь $P = \frac{P^*}{a_{33}^*}$, $V = \frac{V^*}{a}$. Соотношения (1.3), (1.6), (1.7) совместно с условием на бесконечности представляют математическую формулировку исследуемой начально-краевой задачи.

**Замечание 1.** Из физических соображений следует $\rho > 0$; $C_{11} > 0 \Longrightarrow C(r) > 0$, т. е. дифференциальное уравнение (1.3) гиперболического типа моделирует волновые процессы, распространяющиеся к конечными скоростями.

## 2. Построение общего решения

Считая, что функция $U(r,t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, применим преобразование Фурье

$$\begin{aligned} \widetilde{U}(r,p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} U(r,t)e^{-ipt}dt, \\ U(r,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{U}(r,p)e^{ipt}dp. \end{aligned} \tag{2.1}$$

С учетом начальных условий (1.6) получим в пространстве изображений уравнение

$$\frac{d^2\widetilde{U}(r,p)}{dr^2} + A(r)\frac{d\widetilde{U}(r,p)}{dr} + [B(r) + P^2C(r)]\widetilde{U}(r,p) = 0. \tag{2.2}$$

Решение уравнения (2.2) представляется в форме

$$\widetilde{U}(r,p) = \varphi(r)G(S), \quad S = p\psi(r), \tag{2.3}$$

где $\varphi(r)$, $\psi(r)$ и $G(S)$ — дважды непрерывно-дифференцируемые функции своих аргументов. В результате подстановки (2.3) в (2.2) приходим к дифференциальному соотношению

$$S^2\left[\frac{d^2G}{dS^2} + \frac{C}{(\psi')^2}G\right] + S\left[\frac{\psi''\psi}{(\psi')^2} + \frac{2\varphi'\psi}{\varphi\psi'} + \frac{A\psi}{\psi'}\right]\frac{dG}{dS} + \frac{\psi^2}{\varphi(\psi')^2}[\varphi'' + A\varphi' + B\varphi]G = 0, \tag{2.4}$$

которое может быть удовлетворено различными способами.

**Случай 1.** Пусть

$$\frac{d^2G}{dS^2} + \frac{C(r)}{[\psi'(r)]^2}G(S) = 0, \tag{2.5}$$

$$\varphi(r)\psi''(r) + 2\varphi'(r)\psi'(r) + A(r)\varphi(r)\psi'(r) = 0, \tag{2.6}$$

$$\varphi''(r) + A(r)\varphi'(r) + B(r)\varphi(r) = 0. \tag{2.7}$$

Допуская, что

$$C(r) = [\psi'(r)]^2, \tag{2.8}$$

запишем общее решение уравнения (2.5) в виде

$$G(S) = C_1(p)e^{is} + C_2(p)e^{-is}. \tag{2.9}$$

После подстановки (2.9) в (2.3) и его обращения по формуле (2.1), получаем представление для оригинала [13]

$$u(r,t) = \frac{\varphi(r)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}[C_1(p)e^{ip\psi} + C_2(p)e^{-ipt}]e^{ipt}dp = \varphi(r)[f_1(t+\psi) + f_2(t-\psi)]. \tag{2.10}$$

Выражение в квадратных скобках представляет линейную комбинацию обратной и прямой волны.

Распоряжаясь функцией $C(r)$, из (2.8) и (2.6) определим $\psi(r)$ и $\varphi(r)$, а равенство (2.7) приводит к функциональному соотношению, связывающему $B(r)$ и $A(r)$. Потребуем, чтобы

$$C(r) = \frac{\rho(r)}{C_{11}(r)} = K^2 = \mathrm{const}\,. \tag{2.11}$$

Это соответствует постоянной скорости распространения упругих волн в анизотропной неоднородной среде. Из (2.8) следует $\psi(r) = Kr$, и (2.6) переходит в равенство $\varphi'(r) + \frac{1}{2}A(r)\varphi(r) = 0$. Из него, принимая во внимание (1.5), находим

$$\varphi(r) = [C_{11}(r)r^n]^{-1/2}. \tag{2.12}$$

В результате подстановки (2.12) в (2.7) получаем

$$4B(r) = 2A'(r) + A^2(r). \tag{2.13}$$

**Теорема 1.** *Для того чтобы замкнутое решение* (2.10) *описывало процесс распространения упругих волн в анизотропной неоднородной среде с постоянными скоростями* (2.11), *достаточно удовлетворения равенства, связывающего упругие характеристики материала* $C_{ik}(r)$ $(i,k = 1,2,3)$,

$$2\frac{d^2}{dr^2}[\ln(C_{11}(r)r^n)] + \left\{\frac{d}{dr}[\ln(C_{11}(r)r^n)]\right\}^2 = \\ = \frac{4n}{C_{11}(r)}\left[\frac{(n-1)(C_{12}(r) - C_{23}(r)) - C_{22}(r)}{r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dC_{12}(r)}{dr}\right]. \tag{2.14}$$

Доказательство этого утверждения основано на сопоставлении равенств (1.5) и (2.13).

**Замечание 2.** Если $B(r) = 0$, то из (2.13) следует $A(r) = \frac{2}{r}$, и (1.3) преобразуется в известное уравнение Дарбу. Соотношение (2.14) записывается в виде

$$C_{11}(r) = r^{2-n}, \quad (n-1)[C_{12}(r) - C_{23}(r)] - C_{22}(r) + r\frac{dC_{12}(r)}{dr} = 0. \tag{2.15}$$

Условия (2.14) и (2.15) представляют определенные ограничения, накладываемые на упругие характеристики $C_{ik}(r)$ неоднородной анизотропной среды. В качестве примеров рассмотрим ниже законы неоднородности, для которых выполняются условия теоремы 1.

а) Степенная зависимость $C_{ik}(r)$, т. е.

$$C_{11}(r) = a_{11}r^m, \quad C_{12}(r) = a_{12}r^m, \quad C_{23}(r) = a_{23}r^m, \quad C_{22}(r) = a_{22}r^m. \tag{2.16}$$

Здесь $m$ — показатель неоднородности анизотропной среды; $a_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3,$ — безразмерные константы анизотропного материала. После подстановки (2.16) в (2.14) получится критериальное соотношение для упругих констант

$$n[(n-1)(a_{12} - a_{23}) - a_{22} + ma_{12}] = (m+n)(m+n-2)\frac{a_{11}}{4}, \quad n = 1, 2. \tag{2.17}$$

б) Экспоненциальная зависимость

$$C_{11}(r) = a_{11}e^{imr}, \quad C_{12}(r) = a_{12}e^{imr}, \quad C_{23}(r) = a_{23}e^{imr}, \quad C_{22}(r) = a_{22}r^2e^{imr}. \tag{2.18}$$

Соотношения (2.18) описывают упругие свойства анизотропной неоднородной среды с диссипацией (внутренним трением) в материале, т. к. модули упругости в этом случае являются комплексными [14].

Равенство (2.14), связывающее упругие постоянные материала, записывается теперь в виде

$$\frac{1}{4}\left[\frac{n(n-2)}{r^2} - m^2\right]a_{11} + \frac{nm}{2r}a_{11}i = n\left[\frac{(n-1)(a_{12} - a_{23})}{r^2} - a_{22} + \frac{m}{r}a_{12}i\right],$$

откуда следует $a_{12} = \frac{a_{11}}{2}$, $a_{22} = \frac{m^2}{4n}a_{11}$, $a_{23} = \frac{n}{4(n-1)}a_{11}$. При этом упругая константа материала $a_{11}$ может выбираться произвольно. Поскольку при $n \to 1$ $a_{23} \to \infty$, то, очевидно, решение (2.10) описывает волновой процесс в неоднородной среде (2.18) только в случае распространения возмущений из сферической полости.

**Случай 2.** Пусть в рамках представлений (2.5)–(2.7) вместо (2.8) справедливо равенство $\frac{C(r)}{[\psi'(r)]^2} = \frac{1}{\psi^2(r)}$. Тогда (2.5) является уравнением Эйлера, и его общее решение записывается в элементарных функциях, именно,

$$G(S) = C_1(p)M_1(\psi) + C_2(p)M_2(\psi). \tag{2.19}$$

Причем

$$\begin{gathered} M_{1,2}^2 = [\psi(r)]^{1\pm(1-4p^2)}, \quad |p| < \frac{1}{2}; \quad M_{1,2}^2(\psi) = [\psi(r)]^{1\pm(4p^2-1)i}, \quad |p| > \frac{1}{2}; \\ M_1^2(\psi) = \psi(r), \quad |p| = \frac{1}{2}; \quad M_2^2(\psi) = \psi(r)\ln^2\psi(r), \quad |p| = \frac{1}{2}. \end{gathered} \tag{2.20}$$

Следовательно,

$$U(r,t) = \frac{\varphi(r)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}[C_1(p)M_1(\psi) + C_2(p)M_2(\psi)]e^{ipt}dp. \tag{2.21}$$

Пусть, как и в случае 1, выполняется равенство (2.11). Тогда справедливы соотношения

$$\psi(r) = e^{kr}, \quad \varphi^2(r) = e^{-kr}e^{-\int A(r)dr}, \quad 4B(r) = 2A'(r) + A^2(r) - K^2. \tag{2.22}$$

**Теорема 2.** *Для того чтобы имело место решение* (2.21) *при условии* (2.11), *достаточно удовлетворения равенства, связывающего упругие характеристики материала анизотропной неоднородной среды,*

$$2\frac{d^2}{dr^2}[\ln(C_{11}r^n)] + \left\{\frac{d}{dr}[\ln(C_{11}r^n)]\right\}^2 - K^2 = \frac{4n}{C_{11}r^2}\left[(n-1)(C_{12} - C_{23}) - C_{22} + r\frac{dC_{12}}{dr}\right]. \tag{2.23}$$

Доказательство этого факта основано на сопоставлении (1.5) и последнего равенства из (2.22).

Критериальное соотношение (2.23) позволяет расширить законы неоднородности анизотропного материала, для которых могут быть построены замкнутые решения. Например, если $C_{ik}(r)$ и $\rho(r)$ изменяются по экспоненциально-степенному закону,

$$C_{11}(r) = a_{11}r^{-n}e^{mr},\ \ C_{12}(r) = a_{12}r^{2-n}e^{mr},\ \ C_{23}(r) = a_{23}r^{2-n}e^{mr},\ \ C_{22}(r) = a_{22}r^{3-n}e^{mr}, \tag{2.24}$$

то при удовлетворении равенствами (2.24) соотношения (2.23) получаем связи между константами

$$a_{22} = ma_{12}, \quad (m^2 - k^2)a_{11} = 4n[a_{12} - (n-1)a_{23}]. \tag{2.25}$$

Как уже отмечалось, достоинством представления (2.3) является то, что полученное на его основе уравнение (2.4) может быть удовлетворено различными способами. Рассмотрим теперь альтернативный (2.5)–(2.7) вариант его решения.

**Случай 3.** Пусть имеет место (2.8), а также равенства

$$\frac{\psi''(r)\varphi(r)}{[\psi'(r)]^2} + 2\frac{\varphi'(r)\psi(r)}{\varphi(r)\psi'(r)} + \frac{A(r)\psi(r)}{\psi'(r)} = 0, \tag{2.26}$$

$$\frac{\psi^2(r)}{\varphi(r)[\psi'(r)]^2}[A(r)\varphi'(r) + B(r)\varphi(r) + \varphi''(r)] = -6. \tag{2.27}$$

В этом случае уравнение (2.4) принимает вид $S^2\frac{d^2G(S)}{dS^2} + (S^2-6)G(s) = 0$. Его общее решение представлено таким образом [1]:

$$G(s) = C_1(p)\left\{\frac{3}{S}\cos[S + C_2(p)] + \left(1 - \frac{3}{S^2}\right)\sin[S + C_2(p)]\right\}. \tag{2.28}$$

Выполняя обращение равенств (2.3), (2.28), находим

$$U(r,t) = \frac{\varphi(r)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_1(p)\left\{\frac{3}{S}\cos[S + C_2(p)] + \left(1 - \frac{3}{S^2}\right)\sin[S + C_2(p)]\right\}e^{ipt}dp. \tag{2.29}$$

В рамках представления (2.11) из соотношений (2.8), (2.26) последовательно определяем $\psi(r) = kr$, $\varphi(r) = \exp\left[-\frac{1}{2}\int A(r)dr\right]$. Наконец, из уравнения (2.27) получаем

$$B(r) = \frac{1}{4}\left[2A'(r) + A^2(r) - \frac{24}{r^2}\right]. \tag{2.30}$$

Из сопоставления соответствующих равенств (1.5) и (2.30) следует

**Теорема 3.** *Выражение* (2.29) *определяет динамические перемещения, а по формулам* (1.4) *— и напряжения неоднородной анизотропной среды, если ее упругие характеристики* $C_{ik}(r)$ *удовлетворяют функциональному уравнению*

$$2\frac{d^2}{dr^2}[\ln(C_{11}r^n)] + \left\{\frac{d}{dr}[\ln(C_{11}r^n)]\right\}^2 - \frac{24}{r^2} = \frac{4n}{C_{11}r^2}\left[(n-1)(C_{12} - C_{23}) - C_{22} + r\frac{dC_{12}}{dr}\right]. \tag{2.31}$$

Рассмотрим в качестве примера неоднородную анизотропную среду, упругие характеристики которой являются периодическими функциями радиальной координаты, т. е.

$$\begin{aligned} &C_{11}(r) = a_{11}\sin mr, \quad C_{12}(r) = a_{12}\sin mr, \\ &C_{23}(r) = a_{23}\sin mr, \quad C_{22}(r) = a_{22}r^2(\sin mr + \tfrac{1}{\sin mr}). \end{aligned} \tag{2.32}$$

После подстановки равенств (2.32) в критериальное соотношение (2.31) и несложных алгебраических преобразований получаем соотношения, связывающие упругие константы материала

$$a_{12} = \frac{a_{11}}{2}, \quad a_{22} = \frac{m^2}{4n} a_{11}, \quad a_{23} = \frac{n^2 + 24}{4n(n-1)} a_{11}. \tag{2.33}$$

Таким образом, в случае синусоидального закона неоднородности упругих и инерционных характеристик анизотропного материала (2.32), (2.11) решение (2.29) справедливо лишь для сферической полости ($n = 2$). При этом упругая постоянная $a_{11}$ в (2.33) выбирается произвольно.

**Случай 4.** Пусть выполняется равенство (2.8) и справедливы соотношения

$$\frac{\psi''(r)\psi(r)}{[\psi'(r)]^2} + A(r)\frac{\psi(r)}{\psi'(r)} + 2\frac{\varphi'(r)\psi(r)}{\varphi(r)\psi'(r)} = 1, \tag{2.34}$$

$$\frac{\psi^2(r)}{[\psi'(r)]^2\varphi(r)}[\varphi''(r) + A(r)\varphi'(r) + B(r)\varphi(r)] = -\nu^2, \quad \nu \in R. \tag{2.35}$$

Тогда (2.4) приводится к уравнению Бесселя

$$S^2 \frac{d^2G(s)}{dS^2} + S\frac{dG(s)}{dS} + (S^2 - \nu^2)G(s) = 0.$$

Его решение записывается в виде

$$G(s) = C_1(p)J_\nu(s) + C_2(p)I_\nu(s). \tag{2.36}$$

Здесь $J_\nu(s)$, $I_\nu(s)$ — функции Бесселя $\nu$-го порядка I-го и II-го рода.

Выполняя обращение выражения (2.3), с учетом (2.36) определяем динамические перемещения

$$u(r,t) = \frac{\varphi(r)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [C_1(p)J_\nu(s) + C_2(p)I_\nu(s)]e^{ipt} dp. \tag{2.37}$$

В случае (2.11) из (2.8) имеем $\psi(r) = kr$. Принимая это во внимание, из (2.34) находим $\varphi(r) = r^{1/2}e^{-\frac{1}{2}\int A(r)dr}$, а из (2.35) следует $B(r) = \frac{1}{4}\left[2A'(r) + A^2(r) + \frac{1-4\nu^2}{r^2}\right]$.

**Теорема 4.** *Для того чтобы выражение* (2.37) *представляло замкнутое решение рассматриваемой динамической задачи для анизотропной неоднородной среды, достаточно удовлетворения функционального соотношения, связывающего характеристики* $C_{ik}(r)$,

$$2\frac{d^2}{dr^2}[\ln(C_{11}r^n)] + \left\{\frac{d}{dr}[\ln(C_{11}r^n)]\right\}^2 + \frac{1-4\nu^2}{r^2} =$$
$$= \frac{4n}{c_{11}r^2}\left[(n-1)(C_{12} - C_{23}) - C_{22} + r\frac{dC_{12}}{dr}\right]. \tag{2.38}$$

В случае, когда характеристики материала $C_{ik}(r)$ изменяются по степенному закону (2.6), критериальное соотношение (2.38) примет вид

$$\nu^2 a_{11} = n[(n-1)a_{23} + a_{22}] - [n(n-1) + m]a_{12}. \tag{2.39}$$

Из (2.39) следует, что три параметра $a_{ik}$ из четырех могут выбираться произвольно. Если упругие характеристики материала изменяются по косинусоидальному закону

$$\begin{aligned} &C_{11}(r) = a_{11}\cos mr, \quad C_{12}(r) = a_{12}\cos mr, \\ &C_{23}(r) = a_{23}\cos mr, \quad C_{22}(r) = a_{22}r^2\left(\cos mr + \tfrac{1}{\cos mr}\right), \end{aligned} \tag{2.40}$$

то упругие константы $a_{ik}$ материала удовлетворяют соотношениям

$$a_{12} = \frac{a_{11}}{2}, \quad a_{22} = \frac{m^2}{4n}a_{11}, \quad a_{23} = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1-4\nu^2}{n(n-1)}\right]a_{11}.$$

Таким образом, в этом случае остается произвольной лишь одна упругая константа анизотропного материала.

## 3. Краевая задача о распространении волн

Рассмотрим два важных для практики случая распространения волн напряжений в анизотропной неоднородной среде (2.16), соответствующей действию на границе цилиндрической (сферической) полости радиальных перемещений или скачка давлений. При этом воспользуемся решением (2.10) и граничными условиями (1.7).

Пусть на границе полости ($r = 1$) внезапно в момент времени $t = 0$ приложены распределенные по ее поверхности радиально-симметричные перемещения $V_0 = \mathrm{const}$. Тогда в соответствии с (1.7) можно записать

$$U(1,t) = V_0 H(t), \tag{3.1}$$

где $H(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$ Поскольку рассматривается бесконечная среда, то физический смысл имеет лишь прямая волна, т. е. в (2.10) следует принять

$$f_1(t + \psi) = 0, \tag{3.2}$$

что представляет недостающее второе условие. Если теперь учесть (3.1), (3.2) и выражения (2.12), (2.16), то формулы для перемещений (2.10) и кольцевых напряжений (1.4) можно представить следующим образом:

$$U(r,t) = V_0 r^{-(n+m)/2} H(\eta), \tag{3.3}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r,t) = V_0 r^{-(n-m+2)/2} \left[ a_{22} + (n-1)a_{23} - \frac{m+n}{2} a_{12} \right] H(\eta), \tag{3.4}$$

где $\eta = t - k(r-1)$. При $\eta = 0$ выражения (3.3), (3.4) характеризуют радиальные перемещения и кольцевые напряжения на фронте распространяющейся со скоростью $c = 1/k$ соответствующей волны, причем $U(r,t)$ и $\sigma_{\theta\theta}(r,t)$ пропорциональны интенсивности перемещений $V_0$, приложенных на границе полости.

Пусть теперь на границе полости ($r = 1$) в момент времени $t = 0$ внезапно приложены радиально-симметричные напряжения постоянной интенсивности $P = \mathrm{const}$. Тогда в соответствии с граничным условием (1.7) такое воздействие можно представить в виде

$$\sigma_{rr}(1,t) = -PH(t). \tag{3.5}$$

В силу (3.2) выражение для радиальных перемещений $U(r,t)$ определится равенством $U(r,t) = r^{-(m+n)/2} f_2(t - kr)$. Далее из условия (3.5) вычисляем функцию

$$f_2(t-kr) = -\frac{P}{a_{11}k} \exp[-\Omega(t-kr)] H(t-kr), \quad \Omega = \frac{1}{a_{11}k} \left( \frac{n+m}{2} a_{11} - n a_{12} \right). \tag{3.6}$$

Располагая выражением (3.6), находим кольцевые напряжения

$$\sigma_{\theta\theta}(r,t) = \frac{P}{a_{11}k\Omega} (t-kr)^{-(n+m+2)/2} \Bigg\{ \left[ \left( \frac{n+m}{2} + k(t-kr) \right) a_{12} - a_{22} - (n-1)a_{23} \right] \times$$
$$\times \exp[-\Omega(t-kr)] H(t-kr) + \left[ a_{22} + (n-1)a_{23} - \frac{n+m}{2} a_{12} \right] \Bigg\}. \tag{3.7}$$

Из равенства (3.7) следует соотношение на фронте волны напряжений $\sigma_{\theta\theta}(r,0) = P\frac{a_{12}}{a_{11}} r^{-(n+m+2)/2}$ при $t = k(r-1)$.

Интересно отметить, что при $m < n+2$ кольцевые напряжения на фронте волны убывают по мере удаления от границы полости (с ростом $r$). Поскольку для цилиндрической и сферической полостей соответственно $n = 1$ и 2, то показатель $m$ неоднородности анизотропной среды должен быть меньше 3 и 4. В заключение отметим, что построенные в работе замкнутые решения (2.10), (2.16), (2.18) и (2.19)–(2.21), (2.24), а также (2.28), (2.29), (2.32) и (2.36), (2.37), (2.40) существенно расширяют результаты [6], [8], [15].

## Литература


1. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1965. – 703 с.
2. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям.* – М.: Наука, 1993. – 462 с.
3. Петрашень Г.И. *Распространение волн в анизотропных упругих средах.* – Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1980. – 280 с.
4. Селезов И.Т. *Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах.* – Киев: Наук. думка, 1989. – 204 с.
5. Вестяк А.В., Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. *Нестационарное взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой* // Итоги науки и техн. МДТТ ВИНИТИ. – 1983. – Т. 15. – С. 69–148.
6. Chowdhury B., Chakraborty S. *Dynamic expansion of a spherical cavity in a non-homogeneous medium* // Indian J. Pure and Appl. Math. – 1980. – V. 11. – № 9. – P. 1242–1248.
7. Green W. *Wave propagation in strongly anisotropic elastic materials* // Arch. Mech. Stosow. – 1978. – V. 30. – № 3. – P. 297–307.
8. Wond K., Buchanan G. *Cylindrical anisotropic waves in a non-homogeneous material* // Trans. ASME J. Appl. Mec. – 1978. – V. 45. – № 3. –P. 687–689.
9. Зайцев В.Ф. *Дискретно-групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 3. – С. 379–387.
10. Беркович Л.М. *Факторизация и преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений* / Под ред. Н.Х. Розова. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1989. – 192 с.
11. Сеницкий Ю.Э., Сеницкий А.Ю. *О решении одного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, имеющего приложение в динамической теории упругости* // Матем. физика и нелинейная механика. – 1990. – Вып. 13. – С. 22-25.
12. Ляв А. *Математическая теория упругости.* – М.: ОНТИ, 1935. – 674 с.
13. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Таблицы интегральных преобразований.* Т. 1. – М.: Наука, 1969. – 343 с.
14. Сорокин Е.С. *К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем.* – М.: Госстройиздат, 1960. – 132 с.
15. Eason G. *Propagation of wave from spherical and cylindrical cavities* // Z. angew. Math. and Phys. – 1963. – V. 14. – № 1. – P. 12-23.



*Самарский государственный технический университет*



*Поступила* 18.04.1996