Известия вузов. Математика
2015, №4, с. 65–74

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

К.С. ФАЯЗОВ, И.О. ХАЖИЕВ

УСЛОВНАЯ КОРРЕКТНОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СОСТАВНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Аннотация. В данной работе исследованы единственность и условная устойчивость решения некорректной краевой задачи для уравнения смешанно-составного типа. Приведены доказательства единственности и условной устойчивости решения на множестве корректности.

Ключевые слова: некорректная краевая задача, смешанно-составной тип, условная устойчивость, множество корректности, априорная оценка.

УДК: 517.946

Работа посвящена изучению некорректной краевой задачи для уравнения смешанно-составного типа. Корректные краевые задачи для таких типов уравнений рассмотрены многими авторами (например, [1], [2]).

На сегодняшний день постановки некорректных задач для уравнений в частных производных смешанно-составного типа все более усложняются в связи с потребностями моделирования и управления процессами в теплофизике и механике сплошной среды. Некорректные задачи для уравнений первого и второго порядков изучены достаточно хорошо [3], [4]. В данной работе рассматриваются некорректные задачи для неоднородного уравнения в частных производных третьего порядка. Подобные уравнения имеют множество различных применений, например, описывают процессы распространения тепла в неоднородных средах, взаимодействия фильтрационных потоков, массопереноса вблизи поверхности летательного аппарата и сложных течений вязкой жидкости [5].

1. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L \equiv \left(\operatorname{sign} x \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right).$$

Исследуем функцию $u(x,t) \in C^{4,3}_{x,t}(\Omega) \cap C^{3,2}_{x,t}(\overline{\Omega})$ в области $\Omega = \{-1 < x < 1,\ 0 < t < T,\ x \neq 0\}$, удовлетворяющую уравнению

$$Lu(x,t) = g(x,t) \tag{1}$$

при начальных

$$u(x,0) = p(x), \quad u_t(x,0) = q(x), \quad u_{tt}(x,0) = r(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2}$$

граничных условиях

$$\begin{gathered} u(-1,t) = u(1,t) = 0, \\ u_{xx}(-1,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{gathered} \tag{3}$$

Поступила 10.12.2013

и условиях склеивания

$$\begin{aligned} u(-0,t) = u(+0,t), \qquad u_x(-0,t) = u_x(+0,t), \\ u_{xx}(-0,t) = u_{xx}(+0,t), \quad u_{xxx}(-0,t) = u_{xxx}(+0,t). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $p(x), q(x) \in W_2^4[-1;1]$, $r(x) \in W_2^2[-1;1]$, $g(x,t) \in W_{2,t}^1(\Omega)$ — заданные функции.

Определение. Под решением задачи (1)–(4) понимаем функцию, имеющую непрерывные производные, участвующие в уравнении, и удовлетворяющую (1) в области Ω при условиях (2)–(4).

2. Вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Если в области Ω функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению*

$$\operatorname{sign} x\, v_{tt} + v_{xx} = 0 \tag{5}$$

и условиям

$$v(-1,t) = v(1,t) = 0,$$
$$v(-0,t) = v(+0,t), \quad v_x(-0,t) = v_x(+0,t),$$

то для решения $v(x,t)$ $\forall (x,\, t) \in \Omega$ справедлива оценка

$$\int_{-1}^{1} v^2(x,t)dx \leqslant 4\left(\int_{-1}^{1} v_x^2(x,0)dx + |\alpha|\right)^{\frac{T-t}{T}} \left(\int_{-1}^{1} v_x^2(x,T)dx + |\alpha|\right)^{\frac{t}{T}} e^{2t(T-t)}, \tag{6}$$

где $\alpha = \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{-1}^{1} \operatorname{sign} x\, v_{xx}^2(x,0)dx - \int\limits_{-1}^{1} v_{xt}^2(x,0)dx\Big)$.

Доказательство. Функция $\varphi(t)$, определенная интегралом

$$\varphi(t) = \int_{-1}^{1} v_x^2(x,t)dx,$$

непрерывна и имеет производные первого и второго порядков в виде

$$\varphi'(t) = 2\int_{-1}^{1} v_x v_{xt} dx, \quad \varphi''(t) = 2\int_{-1}^{1} v_{xt}^2 dx + 2\int_{-1}^{1} v_x v_{xtt} dx = 2\int_{-1}^{1} v_{xt}^2 dx - 2\int_{-1}^{1} v_{xx} v_{tt} dx.$$

Преобразуя второй член выражения для $\varphi''(t)$ и используя уравнение (5), получим

$$\varphi''(t) = 2\int_{-1}^{1} v_{xt}^2 dx + 2\int_{-1}^{1} \operatorname{sign} x\, v_{xx}^2 dx.$$

Учитывая граничные условия, имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{-1}^{1} \operatorname{sign} x\, v_{xx}^2 dx\right) = 2\int_{-1}^{1} \operatorname{sign} x\, v_{xx} v_{xxt} dx = -2\int_{-1}^{1} v_{tt} v_{xxt} dx =$$
$$= 2\int_{-1}^{1} v_{xtt} v_{xt} dx = \frac{d}{dt}\left(\int_{-1}^{1} v_{xt}^2 dx\right).$$

После интегрирования последнего равенства получим

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sign} x\, v_{xx}^2 dx = \int_{-1}^{1} v_{xt}^2 dx + 2\alpha,$$

где $\alpha = \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{-1}^{1} \operatorname{sign} x\, v_{xx}^2(x,0)dx - \int\limits_{-1}^{1} v_{xt}^2(x,0)dx\Big)$. Подставляя полученное выражение в $\varphi''(t)$, выводим

$$\varphi''(t) = 4\int_{-1}^{1} v_{xt}^2 dx + 4\alpha.$$

Обозначим $\phi(t) = \ln(\varphi(t) + |\alpha|)$. Тогда $\phi'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)+|\alpha|}$ и в силу неравенства Коши–Буняковского

$$\phi''(t) = \frac{\varphi''(t)(\varphi(t)+|\alpha|) - (\varphi'(t))^2}{(\varphi(t)+|\alpha|)^2} =$$

$$= \frac{\Big(4\int\limits_{-1}^{1} v_{xt}^2 dx + 4\alpha\Big)\Big(\int\limits_{-1}^{1} v_x^2 dx + |\alpha|\Big) - \Big(\int\limits_{-1}^{1} v_x v_{xt} dx\Big)^2}{\Big(\int\limits_{-1}^{1} v_x^2 dx + |\alpha|\Big)^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{4\alpha\int\limits_{-1}^{1} v_x^2 dx + 4\alpha|\alpha|}{\Big(\int\limits_{-1}^{1} v_x^2 dx + |\alpha|\Big)^2} = \frac{4\alpha}{\int\limits_{-1}^{1} v_x^2 dx + |\alpha|} \geqslant -4.$$

Из дифференциального неравенства $\phi''(t) \geqslant -4$ следует

$$\phi(t) \leqslant \phi(0)\frac{T-t}{T} + \phi(T)\frac{t}{T} + 2t(T-t)$$

или

$$\varphi(t) + |\alpha| \leqslant \big(\varphi(0)+|\alpha|\big)^{\frac{T-t}{T}}\big(\varphi(T)+|\alpha|\big)^{\frac{t}{T}} e^{2t(T-t)}.$$

Используя вид функции $\varphi(t)$, имеем

$$\int_{-1}^{1} v_x^2(x,t)dx \leqslant \left(\int_{-1}^{1} v_x^2(x,0)dx + |\alpha|\right)^{\frac{T-t}{T}}\left(\int_{-1}^{1} v_x^2(x,T)dx + |\alpha|\right)^{\frac{t}{T}} e^{2t(T-t)} - |\alpha|.$$

Таким образом, доказана оценка (6). □

Лемма 2. *Пусть $\omega(t)$ — решение уравнения*

$$\omega''(t) - \mu\omega(t) = f(t),$$

которое удовлетворяет условиям $\omega(0) = 0$, $\omega'(0) = 0$, где μ — некоторая константа, $f(t)$ — заданная функция. Тогда для решения данного уравнения имеет место следующая оценка:

$$\int_0^t \omega^2(\tau)d\tau \leqslant \left(\int_0^T f^2(\tau)d\tau + \int_0^T f'^2(\tau)d\tau\right)^{\frac{T-t}{T}}\left(\int_0^T \omega^2(\tau)d\tau + \int_0^T f^2(\tau)d\tau + \right.$$
$$\left. + \int_0^T f'^2(\tau)d\tau\right)^{\frac{t}{T}} e^{mt(T-t)/2} - \left(\int_0^T f^2(\tau)d\tau + \int_0^T f'^2(\tau)d\tau\right). \quad (7)$$

Доказательство. Оценим решение методом интегралов энергии. Рассмотрим функцию

$$\xi(t) = \int_0^t \omega^2(\tau)d\tau + \int_0^T (f^2(\tau) + f'^2(\tau))d\tau. \quad (8)$$

Вычислим производные

$$\xi'(t) = 2\int_0^t \omega(\tau)\omega'(\tau)d\tau,$$

$$\xi''(t) = 2\int_0^t \omega'^2(\tau)d\tau + 2\int_0^t \omega(\tau)\omega''(\tau)d\tau = 2\int_0^t \omega'^2(\tau)d\tau + 2\int_0^t \mu\omega^2(\tau)d\tau + 2\int_0^t \omega(\tau)f(\tau)d\tau$$

в силу уравнения для $\omega(t)$. Очевидно

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t \mu\omega^2(\tau)d\tau\right) = 2\int_0^t \mu\omega(\tau)\omega'(\tau)d\tau = 2\int_0^t \omega''(\tau)\omega'(\tau)d\tau - 2\int_0^t f(t)\omega'(\tau)d\tau =$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\int_0^t \omega'^2(\tau)d\tau\right) - \frac{d}{dt}\left(2\int_0^t f(t)\omega(\tau)d\tau\right) + 2\int_0^t f'(t)\omega(\tau)d\tau.$$

После интегрирования имеем

$$\int_0^t \mu\omega^2(\tau)d\tau = \int_0^t \omega'^2(\tau)d\tau - 2\int_0^t f(\tau)\omega(\tau)d\tau + 2\int_0^t\int_0^\tau f'(\tau_1)\omega(\tau_1)d\tau_1 d\tau.$$

Отсюда

$$\xi''(t) = 4\int_0^t \omega'^2(\tau)d\tau - 2\int_0^t \omega(\tau)f(\tau)d\tau + 4\int_0^t\int_0^\tau f'(\tau_1)\omega(\tau_1)d\tau_1 d\tau \geqslant$$
$$\geqslant 4\int_0^t \omega'^2(\tau)d\tau - \int_0^t \omega^2(\tau)d\tau - \int_0^t f^2(\tau)d\tau + 4\int_0^t (t-\tau)f'(\tau)\omega(\tau)d\tau \geqslant 4\int_0^t \omega'^2(\tau)d\tau -$$
$$-\int_0^t \omega^2(\tau)d\tau - \int_0^t f^2(\tau)d\tau - 2T\int_0^t f'^2(\tau)d\tau - 2T\int_0^t \omega^2(\tau)d\tau \geqslant 4\int_0^t \omega'^2(\tau)d\tau - (2T+1)\xi(t).$$

Пусть $\psi(t) = \ln\xi(t)$, тогда

$$\psi''(t) = \frac{\xi''(t)\xi(t) - \xi'^2(t)}{\xi^2(t)} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\left(4\int\limits_0^t \omega'^2(\tau)d\tau - (2T+1)\xi(t)\right)\left(\int\limits_0^t \omega^2(\tau)d\tau + \int\limits_0^T \left(f^2(t) + f'^2(t)\right)d\tau\right)}{\xi^2(t)} -$$
$$-\frac{\left(2\int\limits_0^t \omega(\tau)\omega'(\tau)d\tau\right)^2}{\xi^2(t)} \geqslant -(2T+1), \quad \psi''(t) \geqslant -(2T+1) = -m.$$

Нетрудно видеть, что

$$\psi(t) \leqslant \psi(0)\frac{T-t}{T} + \psi(T)\frac{t}{T} + mt(T-t)/2$$

или

$$\ln\xi(t) \leqslant \frac{T-t}{T}\ln\xi(0) + \frac{t}{T}\ln\xi(T) + mt(T-t)/2.$$

Заменяя $\xi(t)$ ее выражением (8), получим оценку (7). □

Лемма 3. *Пусть $\upsilon(x,t)$ удовлетворяет уравнению*

$$\operatorname{sign} x\, \upsilon_{tt}(x,t) + \upsilon_{xx}(x,t) = f(x,t) \tag{9}$$

и условиям

$$\upsilon(x,0) = 0, \quad \upsilon_t(x,0) = 0, \tag{10}$$

$$\upsilon(-1,t)=\upsilon(1,t)=0, \tag{11}$$

$$\upsilon(-0,t)=\upsilon(+0,t), \quad \upsilon_x(-0,t)=\upsilon_x(+0,t). \tag{12}$$

Тогда для $\upsilon(x,t)$ *справедлива оценка*

$$\int_0^t \|\upsilon(x,\tau)\|^2 d\tau \leqslant 2(\gamma(T))^{\frac{T-t}{T}}\left(\int_0^T \|\upsilon(x,\tau)\|^2 d\tau+\gamma(T)\right)^{\frac{t}{T}}, \tag{13}$$

где

$$\gamma(t)=\int_0^t \|f(x,\tau)\|^2 d\tau+\int_0^t \|f_\tau(x,\tau)\|^2 d\tau.$$

Доказательство. Будем искать решение задачи (9)–(12) $\upsilon(x,t)$ в виде ряда Фурье по собственным функциям спектральной задачи:

$$\operatorname{sign} x\, X''(x)+\lambda X(x)=0,$$

$$X(-1)=0, \quad X(1)=0,$$

$$X(-0)=X(+0), \quad X'(-0)=X'(+0).$$

Нетрудно заметить, что

$$X_k^-(x)=\begin{cases}\sin\mu_k x+\operatorname{tg}\mu_k\cos\mu_k x, & -1\leqslant x\leqslant 0;\\ \operatorname{sh}\mu_k x+\operatorname{tg}\mu_k\operatorname{ch}\mu_k x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

$$X_k^+(x)=\begin{cases}\operatorname{sh}\mu_k x-\operatorname{tg}\mu_k\operatorname{ch}\mu_k x, & -1\leqslant x\leqslant 0;\\ \sin\mu_k x-\operatorname{tg}\mu_k\cos\mu_k x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

— собственные функции указанной задачи, соответствующие отрицательным λ_k^- и положительным λ_k^+ значениям соответственно. При этом $\mu_k=\sqrt{-\lambda_k^-}$ и $\mu_k=\sqrt{\lambda_k^+}$ являются решениями трансцедентного уравнения $\operatorname{tg}\mu_k+\operatorname{th}\mu_k=0$, причем $\mu_1\approx 2.36502037243114$, $\mu_k\approx\mu_1+k\pi$, $k=2,3,\dots$.

Пусть решение уравнения (9) существует и имеет вид

$$\upsilon(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\upsilon_k^+(t)X_k^+ +\sum_{k=1}^{\infty}\upsilon_k^-(t)X_k^-,$$

где $\upsilon_k^\pm(t)=\int\limits_{-1}^{1}\operatorname{sign} x\,\upsilon(x,t)X_k^\pm(x)dx$. Представим функцию $f(x,t)$ в виде ряда

$$f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k^+(t)X_k^+ +\sum_{k=1}^{\infty}f_k^-(t)X_k^-,$$

где $f_k^\pm(t)=\int\limits_{-1}^{1}\operatorname{sign} x\, f(x,t)X_k^\pm(x)dx$. Подставляя производные функции $\upsilon(x,t)$ по t, x и функцию $f(x,t)$ в (9), имеем

$$\{\upsilon_k^+(t)\}_{tt}-\mu_k^2\upsilon_k^+(t)=f_k^+(t), \quad \upsilon_k^+(0)=0, \quad \{\upsilon_k^+(0)\}_t=0, \tag{14}$$

$$\{\upsilon_k^-(t)\}_{tt}+\mu_k^2\upsilon_k^-(t)=f_k^-(t), \quad \upsilon_k^-(0)=0, \quad \{\upsilon_k^-(0)\}_t=0, \quad k=1,2,\dots . \tag{15}$$

При каждом фиксированном k решение задачи можно представить в виде

$$\upsilon_k^+(t)=\frac{1}{\mu_k}\int_0^t sh(\mu_k(t-\tau))f_k^+(\tau)d\tau,$$

$$\upsilon_k^-(t) = \frac{1}{\mu_k}\int_0^t \sin(\mu_k(t-\tau))f_k^-(\tau)d\tau.$$

Учитывая результат леммы 2 для решений задачи (14) и (15), можем записать

$$\int_0^t \upsilon_k^{+2}(\tau)d\tau \leqslant (\gamma_k^+)^{\frac{T-t}{T}}\left(\int_0^T \upsilon_k^{+2}(t)dt + \gamma_k^+\right)^{\frac{t}{T}} e^{mt(T-t)/2},$$

$$\int_0^t \upsilon_k^{-2}(\tau)d\tau \leqslant (\gamma_k^-)^{\frac{T-t}{T}}\left(\int_0^T \upsilon_k^{-2}(t)dt + \gamma_k^-\right)^{\frac{t}{T}} e^{mt(T-t)/2},$$

где

$$\gamma_k^+ = \int_0^T f_k^{+2}(t)dt + \int_0^T f_k^{+'2}(t)dt, \quad \gamma_k^- = \int_0^T f_k^{-2}(t)dt + \int_0^T f_k^{-'2}(t)dt.$$

Складывая эти два неравенства, после несложных выкладок получим

$$\int_0^t (\upsilon_k^{+2}(\tau) + \upsilon_k^{-2}(\tau))d\tau \leqslant 2(\gamma_k^+ + \gamma_k^-)^{\frac{T-t}{T}}\left(\int_0^T (\upsilon_k^{+2}(t) + \upsilon_k^{-2}(t))dt + \gamma_k^+ + \gamma_k^-\right)^{\frac{t}{T}} e^{mt(T-t)/2}.$$

Далее суммируя по k, $k = 1, 2, \ldots$, с помощью неравенства Гёльдера имеем (13). □

Лемма 4 ([6]). *Для решения уравнения*

$$\vartheta_t(x,t) + \vartheta_{xx}(x,t) = h(x,t), \quad (x,t) \in \Omega,$$

удовлетворяющего условиям

$$\vartheta(-1,t) = \vartheta(1,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

справедлива оценка

$$\int_0^T\int_{-1}^1 \vartheta^2 dx\,dt \leqslant \frac{e^{2sT^2}}{2s}\int_0^T\int_{-1}^1 h^2(x,t)dx\,dt + \frac{1}{2s}\int_{-1}^1 |\vartheta(x,T)\cdot\vartheta_{xx}(x,T)|dx +$$
$$+ Te^{2sT^2}\int_{-1}^1 \vartheta^2(x,0)dx + \frac{e^{2sT^2}}{2s}\int_{-1}^1 |\vartheta(x,0)\cdot\vartheta_{xx}(x,0)|dx \quad \forall s > 0.$$

3. Теорема единственности и условной устойчивости. Введем обозначение

$$M = \left\{u : \int_{-1}^1 (u^2(x,T) + u_{xx}^2(x,T) + u_{xxx}^2(x,T) + u_{xt}^2(x,T))dx \leqslant m^2\right\}. \tag{16}$$

Теорема 1. *Если решение задачи* (1)–(4) $u(x,t) \in C_{x,t}^{4,3}(\Omega) \cap C_{x,t}^{3,2}(\overline{\Omega})$ *существует и* $u(x,t) \in M$*, то решение задачи единственно.*

Доказательство. Допустим, что существуют два решения $u_1(x,t)$, , $u_2(x,t)$ рассматриваемой задачи (1)–(4). Видим, что их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ представляет решение задачи

$$Lu(x,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_{tt}(x,0) = 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

а также удовлетворяет условиям (3), (4). Докажем, что функция $u(x,t)$ тождественно равна нулю. С помощью обозначения $\sigma(x,t) = u_t(x,t) + u_{xx}(x,t)$ последняя задача сводится к системе

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t) = \sigma(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{17}$$

$$u(x,0) = 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{18}$$

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{19}$$
$$u(-0,t) = u(+0,t), \quad u_x(-0,t) = u_x(+0,t). \tag{20}$$
$$\left(\operatorname{sign} x \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega, \tag{21}$$
$$\sigma(x,0) = 0, \quad \sigma_t(x,0) = 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{22}$$
$$\sigma(-1,t) = \sigma(1,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{23}$$
$$\sigma(-0,t) = \sigma(+0,t), \quad \sigma_x(-0,t) = \sigma_x(+0,t). \tag{24}$$

Для решения задачи (21)–(24) согласно лемме 2 имеем

$$\int_{-1}^{1} \sigma^2(x,t)dx \leqslant 4\left(\int_{-1}^{1} \sigma_x^2(x,0)dx + |\alpha|\right)^{\frac{T-t}{T}} \left(\int_{-1}^{1} \sigma_x^2(x,T)dx + |\alpha|\right)^{\frac{t}{T}} e^{2t(T-t)},$$

где $\alpha = \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{-1}^{1} \operatorname{sign} x\, \sigma_{xx}^2(x,0)dx - \int\limits_{-1}^{1} \sigma_{xt}^2(x,0)dx\Big)$. В силу начальных условий (22) следует $\alpha = 0$ и $\int\limits_{-1}^{1} \sigma^2(x,t)dx \leqslant 0$. Отсюда $\sigma(x,t) = 0$.

Учитывая лемму 4, для решения задачи (17)–(20) находим

$$\int_0^T \int_{-1}^{1} u^2 dx\, dt \leqslant \frac{e^{2sT^2}}{2s} \int_0^T \int_{-1}^{1} \sigma^2(x,t)dx\, dt + \frac{1}{2s}\int_{-1}^{1} |u(x,T)\cdot u_{xx}(x,T)|dx +$$
$$+ Te^{2sT^2}\int_{-1}^{1} u^2(x,0)dx + \frac{e^{2sT^2}}{2s}\int_{-1}^{1} |u(x,0)\cdot u_{xx}(x,0)|dx.$$

На основе (18) и $\sigma(x,t) = 0$, а также в силу произвольности s при $s \to \infty$ имеем $\int\limits_0^T \int\limits_{-1}^{1} u^2 dx\, dt \leqslant 0$. Отсюда $u(x,t) = 0$, т. е. $u_1(x,t) = u_2(x,t)$. Значит, решение задачи (1)–(4) единственно. □

Теорема 2. *Пусть* $u(x,t) \in M$, $g(x,t) = 0$ *и* $\|p(x) - p_\varepsilon(x)\|_{W_2^4} \leqslant \varepsilon$, $\|q(x) - q_\varepsilon(x)\|_{W_2^4} \leqslant \varepsilon$, $\|r(x) - r_\varepsilon(x)\|_{W_2^2} \leqslant \varepsilon$. *Тогда для решения задачи* (1)–(4) *имеет место оценка*

$$\int_0^T \int_{-1}^{1} u^2 dx\, dt \leqslant \frac{2e^{2sT^2}}{s} \int_0^T (8\varepsilon^2)^{\frac{T-t}{T}} (2m^2 + 4\varepsilon^2)^{\frac{t}{T}} e^{2t(T-t)} dt +$$
$$+ \frac{m^2}{4s} + Te^{2sT^2}\varepsilon^2 + \frac{e^{2sT^2}}{2s}\varepsilon^2 \quad \forall\, s > 0. \tag{25}$$

Доказательство. Пусть u_1 удовлетворяет уравнению (1) с условиями

$$u|_{t=0} = p(x), \quad u_t|_{t=0} = q(x), \quad u_{tt}|_{t=0} = r(x),$$

а также удовлетворяет условиям (3), (4); u_2 удовлетворяет уравнению (1) с условиями

$$u|_{t=0} = p_\varepsilon(x), \quad u_t|_{t=0} = q_\varepsilon(x), \quad u_{tt}|_{t=0} = r_\varepsilon(x),$$

а также условиям (3), (4). Тогда $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению (1), условиям

$$u|_{t=0} = p(x) - p_\varepsilon(x), \quad u_t|_{t=0} = q(x) - q_\varepsilon(x), \quad u_{tt}|_{t=0} = r(x) - r_\varepsilon(x) \tag{26}$$

и условиям (3), (4). Обозначим через $\sigma(x,t)$ выражение $u_t(x,t) + u_{xx}(x,t)$. Приходим к системе, эквивалентной уравнению (1),

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t) = \sigma(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{27}$$

$$\left(\operatorname{sign} x\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma(x,t)=0,\quad (x,t)\in\Omega, \tag{28}$$

с соответствующими условиями (26), (3), (4), которые принимают вид

$$u(x,0)=p(x)-p_\varepsilon(x),\quad -1\leqslant x\leqslant 1, \tag{29}$$

$$u(-1,t)=u(1,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{30}$$

$$u(-0,t)=u(+0,t),\quad u_x(-0,t)=u_x(+0,t), \tag{31}$$

$$\sigma(x,0)=a(x),\quad \sigma_t(x,0)=b(x),\quad -1\leqslant x\leqslant 1, \tag{32}$$

$$\sigma(-1,t)=\sigma(1,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{33}$$

$$\sigma(-0,t)=\sigma(+0,t),\quad \sigma_x(-0,t)=\sigma_x(+0,t), \tag{34}$$

где $a(x)=q(x)-q_\varepsilon(x)+p''(x)-p''_\varepsilon(x)$, $b(x)=r(x)-r_\varepsilon(x)+q''(x)-q''_\varepsilon(x)$.

Согласно лемме 1 для функции $\sigma(x,t)$, удовлетворяющей уравнению (28) и условиям (32)–(34), верно неравенство

$$\int_{-1}^{1}\sigma^2(x,t)dx\leqslant 4\left(\int_{-1}^{1}(a'(x))^2dx+|\alpha|\right)^{\frac{T-t}{T}}\left(\int_{-1}^{1}\sigma_x^2(x,T)dx+|\alpha|\right)^{\frac{t}{T}}e^{2t(T-t)},$$

где $\alpha=\frac{1}{2}\Big(\int\limits_{-1}^{1}\operatorname{sign} x(a''(x))^2dx-\int\limits_{-1}^{1}(b'(x))^2dx\Big)$. Легко видеть, что

$$|\alpha|\leqslant\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(q''(x)-q''_\varepsilon(x)+p^{IV}(x)-p_\varepsilon^{IV}(x))^2dx+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(r'(x)-r'_\varepsilon(x)+q'''(x)-q'''_\varepsilon(x))^2dx\leqslant 4\varepsilon^2,$$

$$\int_{-1}^{1}(a'(x))^2dx=\int_{-1}^{1}(q'(x)-q'_\varepsilon(x)+p'''(x)-p'''_\varepsilon(x))^2dx\leqslant 4\varepsilon^2,$$

$$\int_{-1}^{1}\sigma_x^2(x,T)dx=\int_{-1}^{1}(u_{xt}(x,T)+u_{xxx}(x,T))^2dx\leqslant 2\int_{-1}^{1}(u_{xt}^2(x,T)+u_{xxx}^2(x,T))dx\leqslant 2m^2.$$

При выводе последнего неравенства использовали условия (15). Учитывая вышеуказанные неравенства, получим

$$\int_{-1}^{1}\sigma^2(x,t)dx\leqslant 4(8\varepsilon^2)^{\frac{T-t}{T}}(2m^2+4\varepsilon^2)^{\frac{t}{T}}e^{2t(T-t)}.$$

Согласно лемме 4 для решения задачи (27), (29)–(31) справедлива оценка

$$\int_0^T\int_{-1}^{1}u^2dx\,dt\leqslant\frac{e^{2sT^2}}{2s}\int_0^T\int_{-1}^{1}\sigma^2(x,t)dx\,dt+\frac{1}{2s}\int_{-1}^{1}|u(x,T)\cdot u_{xx}(x,T)|dx+$$
$$+Te^{2sT^2}\int_{-1}^{1}u^2(x,0)dx+\frac{e^{2sT^2}}{2s}\int_{-1}^{1}|u(x,0)\cdot u_{xx}(x,0)|dx\quad\forall\, s>0. \tag{35}$$

Покажем, что из (15), (29) легко вытекает

$$\int_{-1}^{1}|u(x,T)\cdot u_{xx}(x,T)|dx\leqslant\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(u^2(x,T)+u_{xx}^2(x,T))dx\leqslant\frac{m^2}{2},$$

$$\int_{-1}^{1}|u(x,0)\cdot u_{xx}(x,0)|dx=\int_{-1}^{1}|(p(x)-p_\varepsilon(x))\cdot(p''(x)-p''_\varepsilon(x))|dx\leqslant\varepsilon^2. \tag{36}$$

Подставляя (36) в (35), выводим неравенство (25) теоремы 2. □

Теорема 3. *Пусть* $u(x,t) \in M$, $\|g(x,t) - g_\varepsilon(x,t)\|_{W^1_{2,t}} \leqslant \varepsilon$, $p(x) = 0$, $q(x) = 0$, $r(x) = 0$ $\forall s > 0$. *Тогда для решения задачи* (1)–(4) *имеет место оценка*

$$\int_0^T \int_{-1}^1 u^2 dx\, dt \leqslant \frac{2e^{2sT^2} T}{s} \left((\varepsilon^2)^{\frac{T-t}{T}} (10m^2 + 2\varepsilon^2)^{\frac{t}{T}} \right) + \frac{m^2}{4s}. \tag{37}$$

Доказательство. Пусть $\eta(x,t) = u_t(x,t) + u_{xx}(x,t)$.

Задача I.

$$u_t(x,t) + u_{xx}(x,t) = \eta(x,t), \quad (x,t) \in \Omega,$$

$$u(x,0) = 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$u(-0,t) = u(+0,t), \quad u_x(-0,t) = u_x(+0,t).$$

Задача II.

$$\operatorname{sign} x\, \eta_{tt}(x,t) + \eta_{xx}(x,t) = g(x,t) - g_\varepsilon(x,t), \quad (x,t) \in \Omega,$$

$$\eta(x,0) = 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\eta(-1,t) = \eta(1,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$\eta(-0,t) = \eta(+0,t), \quad \eta_x(-0,t) = \eta_x(+0,t).$$

В силу леммы 2 для решения задачи II имеем

$$\int_0^t \|\eta(x,\tau)\|^2 d\tau \leqslant 2(\gamma)^{\frac{T-t}{T}} \left(\int_0^T \|\eta(x,t)\|^2 dt + \gamma \right)^{\frac{t}{T}},$$

где $\gamma = \int\limits_0^T \|g(x,t)\|^2 dt + \int\limits_0^T \|g_t(x,t)\|^2 dt$. Покажем, что $\gamma \leqslant 2\varepsilon^2 T$. Оценим

$$\int_0^T \|\eta(x,t)\|^2 dt = \int_0^T \int_{-1}^1 (u_t(x,t) + u_{xx}(x,t))^2 dx\, dt \leqslant 2T \int_{-1}^1 (u_t^2(x,T) + u_{xx}^2(x,T)) dx \leqslant 10m^2 T,$$

при этом воспользуемся условиями (14). Следовательно,

$$\int_0^t \|\eta(x,\tau)\|^2 d\tau \leqslant 4(\varepsilon^2 T)^{\frac{T-t}{T}} (10m^2 T + 2\varepsilon^2 T)^{\frac{t}{T}}.$$

Используя лемму 4, имеем

$$\int_0^T \int_{-1}^1 u^2 dx\, dt \leqslant \frac{e^{2sT^2}}{2s} \int_0^T \int_{-1}^1 \eta^2(x,t) dx\, dt + \frac{1}{2s} \int_{-1}^1 |u(x,T) \cdot u_{xx}(x,T)| dx \quad \forall\, s > 0.$$

Отсюда вытекает (37). □

Литература

[1] Pulkin I.S. *Gevrey problem for parabolic equations with changing time direction*, Electronic J. Diff. Equat., №50, 1–9 (2006).

[2] Кислов Н.В. *Неоднородные краевые задачи для дифференциально-операторных уравнений смешанного типа и их приложения*, Матем. сб. **125** (1), 19–37 (1984).

[3] Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. *Линейные операторы и некорректные задачи* (Наука М., 1991).

[4] Фаязов К.С. *Некорректная краевая задача для одного уравнения смешанного типа второго порядка*, Узбекск. матем. журн., №2 (1995).

[5] Яненко Н.Н., Новиков В.А. *Об одной модели жидкости с знакопеременным коэффициентом вязкости*, Численные методы механики сплошной среды (ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1973) **4** (2), 142–147.

[6] Бухгейм А.Л. *Введение в теорию обратных задач* (Наука, Новосибирск, 1988).

К.С. Фаязов

профессор, кафедра информатики и прикладного программирования,
Национальный университет Узбекистана,
ул. Университетская, д. 1, Вузгородок, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,

e-mail: kfayazov@yahoo.com

И.О. Хажиев

старший преподаватель, кафедра информатики и прикладного программирования,
Национальный университет Узбекистана,
ул. Университетская, д. 1, Вузгородок, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,

e-mail: h.ikrom@mail.ru

K.S. Fayazov and I.O. Khazhiev

Conditional correctness of boundary-value problem for composite fourth-order differential equation

Abstract. In this work we investigate uniqueness and conditional stability of a solution to ill-posed boundary-value problem for an equation of mixed-composite type. We give proofs of uniqueness and conditional stability of a solution on a set of correctness.

Keywords: ill-posed boundary value problem, mixed-composite type equation, conditional stability, set of correctness, a priori estimate.

K.S. Fayazov

Professor, Chair of Information Science and Applied Programming,
National University of Uzbekistan,
1 Universitetskaya str., Vuzgorodok, Tashkent, 100174 Republic of Uzbekistan,

e-mail: kfayazov@yahoo.com

I.O. Khazhiev

Senior Lecturer, Chair of Information Science and Applied Programming,
National University of Uzbekistan,
1 Universitetskaya str., Vuzgorodok, Tashkent, 100174 Republic of Uzbekistan,

e-mail: h.ikrom@mail.ru