ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 7 (494)

УДК 512.55

А.Н. АБЫЗОВ

1-СТРОГО СЛАБО РЕГУЛЯРНЫЕ МОДУЛИ И КОЛЬЦА

В данной работе изучаются 1-строго слабо регулярные кольца. Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей. Напомним некоторые определения из [1]. Правый R-модуль M будем называть 1-строго слабо регулярным, если каждый его циклический подмодуль, который не содержится в радикале Джекобсона модуля M, является прямым слагаемым модуля M. Кольцо R будем называть 1-строго слабо регулярным, если оно 1-строго слабо регулярно как правый R-модуль. Кольцо R называется слабо регулярным, если каждый его правый идеал, который не содержится в радикале Джекобсона кольца R, содержит нетривиальный идемпотент.

Пусть R — некоторое кольцо, а M — правый унитарный модуль над R. Тогда через $J(R)$ и $J(M)$ будем обозначать соответственно радикалы Джекобсона кольца R и модуля M, а через $E(M)$ — инъективную оболочку модуля M.

1. 1-строго слабо регулярные кольца

Лемма 1.1 ([2], с. 368). *Кольцо слабо регулярно и не содержит бесконечного множества ненулевых ортогональных идемпотентов тогда и только тогда, когда оно полусовершенно.*

Выделим следующие две леммы, доказательства которых являются стандартными.

Лемма 1.2. *В слабо регулярном кольце R всякий локальный правый идеал, который не содержится в $J(R)$, является прямым слагаемым в R_R.*

Лемма 1.3. *Для кольца R следующие условия равносильны:*
1) *кольцо R является 1-строго слабо регулярным;*
2) *для каждого $a \notin J(R)$ найдется такой элемент x кольца R, что $axa = a$.*

Теорема 1.1. *Кольцо R является 1-строго слабо регулярным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет одному из следующих условий:*
1) *кольцо R регулярно;*
2) *кольцо R локально;*
3) *кольцо R является базисным полусовершенным кольцом, у которого $J^2(R) = 0$, и имеет следующее представление: $R = e_1R \oplus e_2R$, где e_1, e_2 — некоторые примитивные идемпотенты. Причем либо $J(e_1R) = 0$, $J(e_2R) \neq 0$ и каждый простой подмодуль модуля $J(e_2R)$ изоморфен e_1R, либо $J(e_1R) \neq 0$, $J(e_2R) \neq 0$ и каждый простой подмодуль $J(e_1R)$ изоморфен $e_2R/J(e_2R)$, а каждый простой подмодуль $J(e_2R)$ изоморфен $e_1R/J(e_1R)$.*

Доказательство. Необходимость. Если $J(R) = 0$, то кольцо R является, очевидно, регулярным. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $J(R) \neq 0$. Допустим $eJ(R)e \neq 0$ для некоторого нетривиального идемпотента e из R. Тогда для некоторого $j \in J$ элемент eje не равен нулю и $(eje+1-e)R$ выделяется в виде прямого слагаемого в R. Но $(eje+1-e)R = ejeR \oplus (1-e)R$ и, следовательно, $ejeR$ является прямым слагаемым в R, что противоречит его косущественности. Таким образом, $eJe = 0$ для всех нетривиальных идемпотентов e кольца R.

Если кольцо R содержит более двух ортогональных идемпотентов, то в кольце R найдется элемент вида $e_1je_2 + e_3$, где e_1, e_2, e_3 — нетривиальные попарно ортогональные идемпотенты и $e_1je_2 \neq 0$. Тогда $(e_1je_2 + e_3)R = e_1je_2R \oplus e_3R$ и $(e_1je_2 + e_3)R$ является прямым слагаемым в

R, что противоречит косущественности элемента $e_1 j e_2 R$. Таким образом, кольцо R содержит не более двух нетривиальных взаимно ортогональных идемпотентов.

Если кольцо R не содержит нетривиальных идемпотентов, то оно, очевидно, является локальным. Пусть теперь кольцо R содержит нетривиальные идемпотенты, тогда $1 = e_1 + e_2$, где e_1 — некоторый нетривиальный идемпотент. Для радикала кольца R имеем следующее представление $J = e_1 J e_2 + e_2 J e_1$. Поскольку $e_1 J e_1 = e_2 J e_2 = 0$, то $J^2 = 0$.

Так как кольцо R является слабо регулярным и не содержит бесконечного множества ортогональных идемпотентов, то в силу леммы 1.1 оно является полусовершенным. Если $e_1 J \neq 0$, то все простые подмодули полупростого правого R-модуля $e_1 J$ изоморфны $e_2 R/e_2 J$. Действительно, если некоторый простой подмодуль модуля $e_1 J$ изоморфен $e_1 R/e_1 J$, то имеем ненулевой гомоморфизм f из $e_1 R$ в $e_1 J$, который является композицией канонического гомоморфизма из $e_1 R$ в $e_1 R/e_1 J$ и вложения модуля $e_1 R/e_1 J$ в модуль $e_1 J$. Отсюда $f(e_1) = f(e_1)e_1 = e_1 j = e_1 j e_1 \neq 0$, где $f(e_1) = e_1 j$ и $j \in J$, что противоречит равенству $e_1 J e_1 = 0$. А так как любой простой правый R-модуль изоморфен либо $e_1 R/e_1 J$, либо $e_2 R/e_2 J$, то всякий простой подмодуль модуля $e_1 J$ изоморфен $e_2 R/e_2 J$. Из этих рассуждений непосредственно следует, что нелокальное и нерегулярное 1-строго слабо регулярное кольцо удовлетворяет условию 3) теоремы.

Достаточность. Ясно, что кольца, удовлетворяющие условиям 1) и 2) теоремы, являются 1-строго слабо регулярными. Пусть кольцо R удовлетворяет условию 3) теоремы. Поскольку $R \cong \mathrm{End}(R_R)$, то R можно рассматривать как кольцо эндоморфизмов модуля R_R. Для того чтобы показать, что кольцо R является 1-строго слабо регулярным, достаточно показать согласно лемме 1.3 и ([3], с. 353), что для каждого гомоморфизма f, у которого $\mathrm{Im}(f) \not\subset J(R_R)$, образ и ядро являются прямыми слагаемыми в R_R. Пусть $f(e_1 R) = a_1 R$ и $f(e_2 R) = a_2 R$.

Условие $\mathrm{Im}(f) \not\subset J(R_R)$ имеет место только в следующих трех случаях: $a_1 R \not\subset J$ и $a_2 R \not\subset J$, $a_1 R \subset J$ и $a_2 R \not\subset J$, $a_1 R \not\subset J$ и $a_2 R \subset J$.

Рассмотрим первый случай. Поскольку $a_1 R$ является прямым слагаемым в R_R, то $a_1 R \cong e_1 R$. Аналогично $a_2 R \cong e_2 R$. Согласно условию 3) $e_2 J$ — ненулевой полупростой модуль, а $e_1 J$ является либо нулевым, либо полупростым, все простые подмодули которого неизоморфны простым подмодулям модуля $e_2 J$. Следовательно, $a_1 R \cap a_2 R = 0$. Если $a_1 r_1 + a_2 r_2 \in J$ и $a_1 R$ не прост, то $a_1 r_1 J = 0$, $a_2 r_2 J = 0$, и, следовательно, $a_1 r_1 \in a_1 J$, $a_2 r_2 \in a_2 J$. Когда $a_1 R$ прост, $a_2 r_2 \in a_2 J$, и $a_1 r_1 = 0$, поскольку $a_1 R \not\subset J$. Таким образом, $(a_1 R + a_2 R) \cap J = a_1 J + a_2 J$. Рассмотрим каноническое отображение φ из R_R в R_R/J. Имеем

$$\begin{aligned}\varphi(e_1 R \oplus e_2 R) &= (e_1 R \oplus e_2 R)/J \cong e_1 R/e_1 J \oplus e_2 R/e_2 J \cong a_1 R/a_1 J \oplus a_2 R/a_2 J \cong \\ &\cong (a_1 R \oplus a_2 R)/(a_1 J \oplus a_2 J) = (a_1 R \oplus a_2 R)/(a_1 R \oplus a_2 R) \cap J \cong \varphi(a_1 R \oplus a_2 R).\end{aligned}$$

Следовательно, $\varphi(e_1 R \oplus e_2 R) = \varphi(a_1 R \oplus a_2 R)$ и $a_1 R \oplus a_2 R + J = e_1 R \oplus e_2 R$, т. е. $a_1 R \oplus a_2 R = e_1 R \oplus e_2 R$, и f является расщепляющим эпиморфизмом.

Во втором случае $a_2 R$ является прямым слагаемым и изоморфен $e_2 R$, причем $a_2 J = J$, если $e_1 R$ прост, и $a_2 J$ является суммой всех простых модулей, изоморфных $e_1 R/e_1 J$, если $e_1 R$ не прост. Следовательно, в любом случае $a_1 R \subset a_2 J$. Таким образом, у f образ и ядро являются прямыми слагаемыми в R_R.

В третьем случае, если $e_1 R$ прост, то $a_2 R = 0$, поскольку в этом случае в R нет подмодулей, изоморфных $e_2 R/e_2 J$. Если $e_1 R$ не простой, то $a_1 J$ содержит все подмодули, изоморфные $e_2 R/e_2 J$. Таким образом, для всех $f \notin J(\mathrm{End}(R_R))$ выполняется условие регулярности в смысле фон Неймана.

Следствие 1.1. Следующие условия для полусовершенного кольца R, у которого $J(R) \neq 0$, эквивалентны:

1) каждый правый циклический идеал кольца R, не содержащийся в $J(R)$, является либо локальным, либо совпадает с кольцом R;
2) кольцо R является либо локальным, либо удовлетворяет условию 3) теоремы 1.1.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Из леммы 1.3 следует, что кольцо R 1-строго слабо регулярное. Поскольку по предположению радикал кольца R не равен нулю, то оно согласно теореме 1.1 является либо локальным, либо удовлетворяет условию 3 теоремы 1.1.

2) $\Rightarrow$ 1) Без ограничения общности можно считать, что кольцо R удовлетворяет условию 3) теоремы 1.1. Очевидно, тогда каждый нетривиальный идемпотент кольца R является примитивным. Поскольку согласно теореме 1.1 кольцо R 1-строго слабо регулярно, то каждый циклический правый идеал, не содержащийся в $J(R)$, либо порождается нетривиальным идемпотентом, либо совпадает с R. То есть каждый циклический правый идеал, не содержащийся в $J(R)$, является либо локальным, либо совпадает с R.

Кольца, удовлетворяющие условиям 1) и 2) теоремы 1.1, являются очевидными примерами 1-строго слабо регулярных колец. В следующем примере рассмотрим кольцо, удовлетворяющее условию 3).

Пример. Простейшим нетривиальным примером 1-строго слабо регулярного кольца согласно предыдущей теореме является кольцо верхнетреугольных матриц второго порядка над некоторым полем P. Действительно, пусть $R = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, a,b,c \in P \right\}$, $e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $e_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Тогда $J(R) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, a \in P \right\}$, $e_1R = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, a \in P \right\}$, $e_2R = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, a,b \in P \right\}$, $e_2J = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, a \in P \right\}$ и $e_2J \cong e_1R$ относительно гомоморфизма f, при котором $f\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$.

2. 1-строго слабо регулярные модули

Лемма 2.1. *Если над кольцом R всякий неразложимый и нерадикальный модуль является локальным, то над этим кольцом каждый однородный модуль является цепным.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда над кольцом R найдется однородный модуль M, который не является цепным. Мы можем выбрать в M два элемента a и b такие, что $aR \not\subset bR$ и $bR \not\subset aR$. Рассмотрим модуль $aR+bR$, который согласно условию леммы является локальным. Следовательно, либо $aR \subset bR$, либо $bR \subset aR$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2.2. *Если над кольцом R все правые R-модули 1-строго слабо регулярны, то инъективная оболочка каждого простого правого R-модуля над этим кольцом является цепным модулем длины не больше двух.*

Доказательство. Согласно лемме 2.1 инъективная оболочка любого простого модуля над кольцом R является цепным модулем. Допустим, mR — простой модуль над кольцом R, инъективная оболочка которого имеет длину больше двух. Тогда в $E(mR)$ найдется такой элемент a, что $aR \neq E(mR)$ и $aR \neq mR$. Рассмотрим внешнюю прямую сумму модулей $mR \oplus E(mR)$. Тогда $mR \oplus E(mR) = (m,a)R \oplus W$ для некоторого подмодуля W. Допустим, существует s такое, что $ms \neq 0$, $as = 0$. Тогда $(m,a)R = (m,0)R \oplus (0,a)R$ и, следовательно, $(0,a)R$ является прямым слагаемым в $mR \oplus E(mR)$, что противоречит его косущественности.

Предположим теперь, что в кольце R не найдется такого элемента s, для которого выполнены свойства $ms \neq 0$, $as = 0$. Тогда отображение f между $(m,a)R$ и aR, определяемое по правилу $f((m,a)r) = ar$, является изоморфизмом. Следовательно, согласно ([4], с. 39) aR изоморфно либо mR, либо $E(mR)$, что, очевидно, невозможно. Таким образом, во всех возможных случаях мы имеем противоречие, и, значит, $E(mR)$ является цепным модулем длины не больше двух.

Лемма 2.3. *Если над кольцом R все правые R-модули 1-строго слабо регулярны и $J(R) = 0$, то R является полупростым.*

Доказательство. Покажем сначала, что R является V-кольцом. Допустим противное. Тогда над кольцом R найдется простой правый R-модуль mR, у которого инъективная оболочка $E(mR)$ не является простой. Поскольку согласно предположению R не является V-кольцом, то правый идеал $\mathrm{Ann}(m)$ ненулевой и, следовательно, в нем найдется нетривиальный идемпотент e.

Рассмотрим внешнюю прямую сумму модулей $eR \oplus E(mR)$. Тогда $eR \oplus E(mR) = (e,m)R \oplus W$ для некоторого подмодуля W. Поскольку $(e,m)R = (e,0)R \oplus (0,m)R$, то $(0,m)R$ является прямым слагаемым в $eR \oplus E(mR)$, что противоречит его косущественности. Таким образом, R является V-кольцом и, следовательно, каждый циклический модуль является прямым слагаемым в своей инъективной оболочке и, значит, сам инъективен. Следовательно, согласно ([5], с. 1384) R — полупростое кольцо.

Лемма 2.4. *Если над кольцом R все правые R-модули 1-строго слабо регулярны, то $J^2(R)=0$.*

Доказательство. Согласно ([6], с. 136) модуль R_R можно рассматривать как подмодуль модуля вида $\prod\limits_{\alpha \in A} M_\alpha$, где $M_\alpha \cong \bigoplus\limits_{\beta \in B} E(C_\beta)$ для каждого α, а $\{C_\beta\}_{\beta \in B}$ — семейство представителей классов изоморфизма простых правых R-модулей. Таким образом, $J^2 \subset \Big(\prod\limits_{\alpha \in A} M_\alpha\Big) J^2 \subset \prod\limits_{\alpha \in A} (M_\alpha J^2)$, $\Big(\bigoplus\limits_{\beta \in B} E(C_\beta)\Big) J^2 \subset \bigoplus\limits_{\beta \in B} (E(C_\beta) J^2)$. Согласно лемме 2.2 $E(C_\beta)J^2 = 0$ для каждого β, следовательно, $J^2 = 0$.

Лемма 2.5. *Если над локальным кольцом R все правые R-модули 1-строго слабо регулярны, то R является цепным кольцом длины два.*

Доказательство. Покажем, что модуль R_R является цепным длины два. Допустим противное. Согласно лемме 2.4 $J(R_R)$ полупрост и, следовательно, над кольцом R найдется локальный правый модуль M, у которого $MJ = M_1 \oplus M_2$ (M_1 и M_2 — простые модули). Рассмотрим каноническое вложение f модуля M в модуль $M/M_1 \oplus M/M_2$. Поскольку $f(M) \not\subset J(M/M_1 \oplus M/M_2)$, то $f(M)$ является прямым слагаемым в $M/M_1 \oplus M/M_2$. Поскольку согласно ([6], с. 176) у модулей M/M_1 и M/M_2 кольца эндоморфизмов локальны, то согласно ([6], с. 181) модуль M изоморфен либо M/M_1, либо M/M_2, что, очевидно, невозможно. Таким образом, кольцо R является цепным справа длины два, и из ([7], с. 96) следует, что над ним всякий конечно порожденный правый модуль является прямой суммой неразложимых модулей, которые локальные и, следовательно, цепные. Тогда согласно ([8], с. 366) кольцо R цепное длины два.

Теорема 2.1. *Для кольца R следующие условия равносильны:*

1) *над кольцом R все правые R-модули 1-строго слабо регулярны;*
2) *кольцо R является либо полупростым, либо локальным цепным и $J^2(R) = 0$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Если $J = 0$, то согласно лемме 2.3 R — полупростое кольцо. Теорема 1.1 показывает, что если $J \neq 0$, то кольцо R либо локальное, либо удовлетворяет условию 3) теоремы 1.1. Из локальности кольца R согласно лемме 2.5 следует, что оно артиново цепное длины два. Покажем, что кольцо R не может удовлетворять условию 3) теоремы 1.1. Допустим противное. Тогда $J = e_1 J e_2 + e_2 J e_1 \neq 0$ и, следовательно, $ei(1-e) \neq 0$ для некоторого примитивного идемпотента e кольца R и элемента $i \in J$. Рассмотрим внешнюю прямую сумму модулей $eR \oplus eR$. Подмодуль $(e, ei(1-e))R$ является прямым слагаемым в $eR \oplus eR$. Поскольку $(e, ei(1-e))R = (e,0)R \oplus (0, ei(1-e))R$, то $(0, ei(1-e))R$ является прямым слагаемым в $eR \oplus eR$, что противоречит его косущественности.

2) $\Rightarrow$ 1). Для полупростого кольца утверждение очевидно. Если R — локальное цепное кольцо длины два, то каждый циклический правый модуль над ним является либо простым, либо инъективным и изоморфным R_R. Отсюда непосредственно следует, что над ним каждый правый модуль является 1-строго слабо регулярным.

Поскольку согласно ([9], с. 300) над локальным кольцом все проективные модули свободны, то из критерия эквивалентности колец в смысле Мориты ([9], с. 265) и предыдущей теоремы непосредственно вытекает

Следствие. Для кольца R следующие условия равносильны:

1) кольцо R эквивалентно в смысле Мориты кольцу, над которым все модули 1-строго слабо регулярны;
2) кольцо R либо является полупростым, либо изоморфно кольцу матриц над локальным цепным кольцом длины два.

Литература

1. Сахаев И.И., Хакми Х.И. *О сильно регулярных модулях и кольцах* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 2. – С. 60–63.
2. Nicholson W.K. *I-rings* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1975. – V. 207. – P. 361–373.
3. Shanny R.F. *Regular endomorphism rings of free modules* // J. London Math. Soc. – 1971. – V. 4. – № 2. – P. 353–354.
4. Fucchini A. *Module theory*: *endomorphism rings and direct sum decompositions in some classes of modules* // Birchauser, Progr. Math. – 1998. – V. 167. – 285 p.
5. Osofsky B.L. *Noninjective cyclic modules* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1968. – V. 19. – P. 1383–1384.
6. Каш Ф. *Модули и кольца.* – М.: Мир, 1981. – 368 с.
7. Пирс Р. *Ассоциативные алгебры.* – М.: Мир, 1968. - 540 с.
8. Фейс К. *Алгебра*: *кольца, модули и категории.* – Т.2. – М.: Мир, 1977. – 688 с.
9. Anderson F.W., Fuller K.R. *Rings and categories of modules.* New York: Springer-Verlag, 1991. - 376 p.

Казанский государственный
педагогический университет

Поступила
03.10.2002