ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 10 (437)

УДК 515.17

В.Д. ГОЛОВИН

О ГОЛОМОРФНО ПОЛНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Разработан новый подход к исследованию голоморфно полных комплексных пространств, основанный на теории гомологий аналитических пучков [1]. В частности, дано короткое новое доказательство фундаментальных теорем Картана [2].

1. Пусть X — комплексное пространство, счетное в бесконечности; O_X — его структурный пучок локальных комплексных алгебр.

Открытое множество $U \subset X$ называется голоморфно выпуклым в X, если для каждого компактного множества $K \subset U$ множество

$$\widehat{K} = \{x \in X : |f(x)| \leq \sup_{y \in K} |fd(y)| \; \forall f \in \Gamma(X; O_X)\}$$

также компактно содержится в U.

Аналитический пучок F над X будем называть *гомологически тривиальным*, если для каждого голоморфно выпуклого открытого множества U в X выполняются следующие условия:

а) $H_k^c(U; F) = 0$ при $k \neq 0$;

б) каноническое отображение $H_0^c(U; F) \to H_0^c(X; F)$ инъективно.

Полицилиндром будем называть открытый полицилиндр в комплексном числовом пространстве C^n. Аналитическим полиэдром в открытом множестве $G \subset C^n$ будем называть всякое множество вида

$$\Delta = \{z \in G : |\varphi_j(z)| < 1 \; (1 \leq j \leq m)\},$$

где $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ — голоморфные функции в G.

Лемма 1. *Аналитический пучок F над полицилиндром $P \subset C^n$ тогда и только тогда гомологически тривиален, когда для каждого аналитического полиэдра Δ в P выполняются условия*

а) $H_k^c(\Delta; F) = 0$ *при* $k \neq 0$;

б) *каноническое отображение* $H_0^c(\Delta; F) \to H_0^c(P; F)$ *инъективно.*

Доказательство. Очевидно, всякий аналитический полиэдр Δ в P является голоморфно выпуклым открытым множеством в P. Поэтому любой гомологически тривиальный аналитический пучок F над P удовлетворяет условиям леммы. Обратно, пусть U — произвольное голоморфно выпуклое открытое множество в P. Тогда для любого компактного множества $K \subset U$ существует такой относительно компактный аналитический полиэдр Δ в P, что $K \subset \Delta$ и $\overline{\Delta} \subset U$ (ср. [3]). В частности, множество U можно представить в виде объединения возрастающей последовательности аналитических полиэдров $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \cdots$ в P. Для любого аналитического пучка F над P при каждом $k = 0, 1, \dots$ получаем канонический изоморфизм векторных пространств

$$H_k^c(U; F) = \lim_{\to} H_k^c(\Delta_i; F).$$

Следовательно, если пучок F удовлетворяет условиям леммы, то он гомологически тривиален. □

Теорема 1. *Пучок ростков голоморфных функций O над полицилиндром $P \subset C^n$ гомологически тривиален.*

Доказательство. Достаточно показать, что пучок O удовлетворяет условиям леммы 1. Пусть

$$\Delta = \{z \in P : |\varphi_j(z)| < 1 \ (1 \le j \le m)\},$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — голоморфные функции в P. Воспользуемся индукцией по m. При $m = 0$ условия леммы 1 выполняются, т. к. в этом случае Δ совпадает с P. Действительно, из теоремы Дольбо в силу локальной двойственности следует, что $H_k^c(P; O) = 0$ при $k \ne 0$, и топологическое векторное пространство $H_0^c(P; O)$ отделимо. Пусть теперь $m \ge 1$ произвольно. Положим

$$P_1 = \{(z, z_{n+1}) \in C^{n+1} : z \in P,\ |z_{n+1}| < 1\};$$
$$\Delta_1 = \{(z; z_{n+1}) \in P_1 : |\varphi_j(z)| < 1 \ (1 \le j \le m-1)\}.$$

Введем голоморфное отображение $\xi : \Delta \to \Delta_1$, действующее по формуле $\xi(z) = (z; \varphi_m(z))$ (ср. [3]). Оно биголоморфно отображает аналитический полиэдр Δ на комплексное подмногообразие $M \subset \Delta_1$, заданное уравнением $\psi(z; z_{n+1}) \equiv z_{n+1} - \varphi_m(z) = 0$. В частности, ξ определяет при каждом $k = 0, 1, \ldots$ изоморфизм векторных пространств $H_k^c(\Delta; O) \to H_k^c(M; O_M)$, где $O_M = O_1/\psi O_1$ над M, а O_1 — пучок ростков голоморфных функций над пространством C^{n+1}. Из точной последовательности аналитических пучков над Δ_1

$$0 \to O_1 \xrightarrow{(\psi)} O_1 \to O_M^{\Delta_1} \to 0$$

получаем точную последовательность групп гомологий

$$\cdots \to H_{k+1}^c(\Delta_1; O_1) \to H_k^c(M; O_M) \to H_k^c(\Delta_1; O_1) \xrightarrow{(\psi)} H_k^c(\Delta_1; O_1) \to \cdots .$$

По предположению индукции $H_k^c(\Delta_1; O_1) = 0$ при $k \ne 0$; следовательно, $H_k^c(M; O_M) = 0$ при $k \ne 0$, и каноническое отображение $H_0^c(M; O_M) \to H_0^c(\Delta_1; O_1)$ инъективно. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
H_0^c(\Delta; O) & \xrightarrow{(\xi)} & H_0^c(\Delta_1; O_1) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_0^c(P; O) & \xrightarrow{(\xi)} & H_0^c(C^{n+1}; O_1),
\end{array}$$

в которой верхняя горизонтальная стрелка инъективна по доказанному выше. Правая вертикальная стрелка также инъективна: каноническое отображение $H_0^c(\Delta_1; O_1) \to H_0^c(P_1; O_1)$ инъективно по предположению индукции, и каноническое отображение $H_0^c(P_1; O_1) \to H_0^c(C^{n+1}; O_1)$ инъективно, т. к. является сопряженным к отображению ограничения $\Gamma(C^{n+1}; O_1) \to \Gamma(P_1; O_1)$, имеющему всюду плотный образ. Из коммутативной диаграммы получаем, что левая вертикальная стрелка $H_0^c(\Delta; O) \to H_0^c(P; O)$ инъективна. □

Лемма 2. *Если F — когерентный аналитический пучок над открытым множеством $G \subset C^n$, то для каждой точки $\alpha \in G$ существует полицилиндр $P \subset G$ с центром в α, над которым пучок F гомологически тривиален.*

Доказательство. По теореме Гильберта о сизигиях и ввиду теоремы Ока существует точная последовательность аналитических пучков

$$0 \to O^{r_n} \to O^{r_{n-1}} \to \cdots \to O^{r_0} \to F \to 0$$

над некоторым полицилиндром $P \subset G$ с центром в точке α. Пусть B_i при каждом $i = 1, \ldots, n$ обозначает образ гомоморфизма $O^{r_i} \to O^{r_{i-1}}$, и $B_0 = F$. Достаточно доказать, что аналитические пучки B_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ над P гомологически тривиальны. Воспользуемся нисходящей индукцией по i. При $i = n$ утверждение следует из теоремы 1, т. к. аналитические пучки B_n и O^{r_n} изоморфны. При каждом $i = 0, 1, \ldots, n-1$ имеет место точная последовательность аналитических пучков

$$0 \to B_{i+1} \to O^{r_i} \to B_i \to 0,$$

которая для произвольного открытого множества $U \subset P$ порождает точную последовательность групп гомологий

$$\cdots \to H^c_{k+1}(U; B_{i+1}) \to H^c_k(U; B_i) \to H^c_k(U; O^{r_i}) \to H^c_k(U; B_{i+1}) \to \cdots .$$

Если множество U голоморфно выпукло в P, то из теоремы 1 и предположения индукции получаем $H^c_k(U; B_i) = 0$ при $k \neq 0$ и последовательность

$$0 \to H^c_0(U; B_i) \to H^c_0(U; O^{r_i}) \to H^c_0(U; B_{i+1}) \to 0$$

точна. В коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} H^c_0(U; B_i) & \longrightarrow & H^c_0(U; O^{r_i}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^c_0(P; B_i) & \longrightarrow & H^c_0(P; O^{r_i}) \end{array}$$

верхняя горизонтальная и правая вертикальная стрелки инъективны. Следовательно, левая вертикальная стрелка $H^c_0(U; B_i) \to H^c_0(P; B_i)$ также инъективна. $\square$

Лемма 3. *Пусть F — когерентный аналитический пучок над открытым множеством $G \subset C^n$, и $\pi : O^p \to F$ — эпиморфизм аналитических пучков над окрестностью точки $\alpha \in G$. Тогда для всякого достаточно малого полицилиндра $P \subset G$ с центром в точке α π порождает мономорфизм топологических векторных пространств $H^c_0(P; F) \to H^c_0(P; O^p)$; в частности, пространство $H^c_0(P; F)$ отделимо.*

Доказательство. В обозначениях, использованных при доказательстве леммы 2, имеет место точная последовательность топологических векторных пространств

$$0 \to H^c_0(P; F) \xrightarrow{(\pi)} H^c_0(P; O^p) \to H^c_0(P; B_1) \to 0,$$

в которой стрелки — непрерывные линейные отображения. Очевидно, пространство $H^c_0(P; F)$ отделимо, и, т. к. B_1 — когерентный аналитический пучок над P, отделимо пространство $H^c_0(P; B_1)$. Следовательно, отображение (π) имеет замкнутый образ и потому является гомоморфизмом топологических векторных пространств. $\square$

Лемма 4. *Пусть X — комплексное пространство, и U — достаточно малая открытая окрестность произвольной точки $x \in X$, реализованная как аналитическое множество в некотором полицилиндре $P \subset C^n$. Тогда всякая голоморфная функция на U может быть поднята до голоморфной функции на P. В частности, любое голоморфно выпуклое открытое множество в U имеет вид $U \cap W$, где W — голоморфно выпуклое открытое множество в P.*

Доказательство. По лемме 3 имеет место мономорфизм топологических векторных пространств $H^c_0(P; O^p_X) \to H^c_0(P; O)$. Следовательно, ввиду локальной двойственности каноническое отображение $\Gamma(P; O) \to \Gamma(U; O_X)$ сюръективно. $\square$

Аналитический пучок F над комплексным пространством X будем называть локально гомологически тривиальным, если любая окрестность произвольной точки $x \in X$ содержит открытую окрестность, над которой пучок F гомологически тривиален. Полицилиндрической окрестностью произвольной точки $x \in X$ будем называть всякую ее открытую окрестность, которая может быть реализована как аналитическое множество в некотором полицилиндре пространства C^n. Аналитический пучок F над X тогда и только тогда локально гомологически тривиален, когда для каждой точки $x \in X$ существует полицилиндрическая окрестность, над которой F гомологически тривиален.

Теорема 2. *Всякий когерентный аналитический пучок F над комплексным пространством X локально гомологически тривиален.*

Доказательство. Аналитический пучок F над X когерентен тогда и только тогда, когда для каждой достаточно малой открытой окрестности U произвольной точки $x \in X$, реализованной как аналитическое множество в полицилиндре $P \subset C^n$, аналитический пучок $(F \mid U)^P$ над P когерентен. Ввиду лемм 2 и 4 утверждение следует отсюда непосредственно. $\square$

2. Вещественная функция φ на комплексном пространстве X называется строго плюрисубгармонической, если для каждой точки $x \in X$ существует открытая окрестность, реализованная как аналитическое множество в области G пространства C^n, в которой φ совпадает с ограничением некоторой бесконечно дифференцируемой строго плюрисубгармонической функции на G. Действительно, это определение не зависит от выбора реализации окрестности точки $x \in X$ как аналитического множества в области пространства C^n ([4], [5]).

Вещественная функция φ на X называется исчерпывающей, если при каждом $c \in R$ множество $B_c(\varphi) = \{x \in X : \varphi(x) < c\}$ относительно компактно в X. Если φ — непрерывная исчерпывающая функция на X, то при каждом $c \in R$ множество $\overline{B}_c(\varphi) = \{x \in X : \varphi(x) \leq c\}$ компактно и содержит замыкание $\overline{B_c(\varphi)}$. Множество $S_c(\varphi) = \{x \in X : \varphi(x) = c\}$ также компактно и содержит границу $\partial B_c(\varphi)$.

Комплексное пространство, на котором существует строго плюрисубгармоническая исчерпывающая функция, называется строго псевдовыпуклым.

Лемма 5. *Пусть X — строго псевдовыпуклое комплексное пространство, и φ — строго плюрисубгармоническая исчерпывающая функция на X. Тогда для любого $c \in R$ и любого конечного покрытия множества $S_c(\varphi)$ достаточно малыми полицилиндрическими окрестностями U_i $(i = 1, \dots, m)$ существуют относительно компактные открытые множества $A_j \subset X$ $(j = 0, 1, \dots, m)$ с условиями*

а) $A_0 = B_c(\varphi)$ *и* $\overline{B}_c(\varphi) \subset A_m$;

б) *при каждом $i = 1, \dots, m$ имеет место включение $A_{i-1} \subset A_i$, и разность $A_i \setminus A_{i-1}$ содержится и относительно компактна в U_i;*

в) *при каждом $i = 1, \dots, m$ и каждом $j = 0, 1, \dots, m$ пересечение $U_i \cap A_j$ голоморфно выпукло в U_i.*

Эта лемма в существенной своей части принадлежит Андреотти и Грауэрту; приведем здесь лишь краткий набросок доказательства для полноты изложения. Пусть $\theta_i \geq 0$ при каждом $i = 1, \dots, m$ — бесконечно дифференцируемая функция на X с компактным носителем, содержащимся в U_i, причем для каждой точки $x \in S_c(\varphi)$ найдется такой индекс i, что $\theta_i(x) > 0$. Положим $\varphi_0 = \varphi$ и $\varphi_i = \varphi - \varepsilon(\theta_1 + \cdots + \theta_i)$ при каждом $i = 1, \dots, m$ и некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$. Тогда множества $A_j = B_c(\varphi_j)$ $(j = 0, 1, \dots, m)$ удовлетворяют условиям леммы (ср. [6]).

Лемма 6. *Пусть I — непустое подмножество числовой прямой R, удовлетворяющее условиям*

а) *если $t \in I$ и $s < t$, то $s \in I$;*

б) *если $s \in I$, то $s + \varepsilon \in I$ при некотором $\varepsilon > 0$;*

в) *если при каждом $\varepsilon > 0$ существует $s \in I$, удовлетворяющее неравенству $t - \varepsilon < s < t$, то $t \in I$.*

Тогда $I = R$.

Теорема 3. *Пусть X — строго псевдовыпуклое комплексное пространство, и F — локально гомологически тривиальный аналитический пучок над X. Тогда для любой строго плюрисубгармонической исчерпывающей функции φ на X и любого $t \in R$ выполняются условия*

а) $H^c_k(B_t(\varphi); F) = 0$ *при* $k \neq 0$;

б) *каноническое отображение $H^c_0(B_t(\varphi); F) \to H^c_0(X; F)$ инъективно.*

Доказательство. Пусть выбрано конечное покрытие множества $S_t(\varphi)$ достаточно малыми полицилиндрическими окрестностями U_i $(i = 1, \ldots, m)$, над каждой из которых аналитический пучок F гомологически тривиален. Тогда существуют относительно компактные открытые множества $A_j \subset X$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$, удовлетворяющие условиям леммы 5. При каждом фиксированном $i = 1, \ldots, m$ имеет место точная последовательность Майера–Вьеториса

$$\cdots \to H_k^c(U_i \cap A_{i-1}; F) \to H_k^c(A_{i-1}; F) \oplus H_k^c(U_i \cap A_i; F) \to H_k^c(A_i; F) \to H_{k-1}^c(U_i \cap A_{i-1}; F) \to \cdots .$$

С другой стороны, для каждого $j = 0, 1, \ldots, m$ имеем $H_k^c(U_i \cap A_j; F) = 0$ при $k \neq 0$, и каноническое отображение $H_0^c(U_i \cap A_j; F) \to H_0^c(U_i; F)$ инъективно. Поэтому каноническое отображение $H_k^c(A_{i-1}; F) \to H_k^c(A_i; F)$ биективно при $k \neq 0$ и инъективно при $k = 0$. По индукции получаем, что каноническое отображение $H_k^c(A_0; F) \to H_k^c(A_m; F)$ биективно при $k \neq 0$ и инъективно при $k = 0$. Следовательно, если число $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то имеет место включение $B_{t+\varepsilon}(\varphi) \subset A_m$, и каноническое отображение $H_k^c(B_t(\varphi); F) \to H_k^c(B_{t+\varepsilon}(\varphi); F)$ биективно при $k \neq 0$ и инъективно при $k = 0$. Рассмотрим множество I тех $t \in R$, для которых все канонические отображения $H_k^c(B_s(\varphi); F) \to H_k^c(B_t(\varphi); F)$ $(s < t)$ биективны при $k \neq 0$ и инъективны при $k = 0$. Из доказанного выше следует, что I удовлетворяет условиям леммы 6 и потому совпадает с R. Таким образом, для любого $t \in R$ каноническое отображение $H_k^c(B_t(\varphi); F) \to H_k^c(X; F)$ биективно при $k \neq 0$ и инъективно при $k = 0$. Кроме того, при достаточно малом $t \in R$ множество $B_t(\varphi)$ пусто и, значит, $H_k^c(B_t(\varphi); F) = 0$. $\square$

Лемма 7. *Пусть X — строго псевдовыпуклое комплексное пространство, и F — когерентный аналитический пучок над X. Тогда $H_k^c(X; F) = 0$ при $k = 0$, и топологическое векторное пространство $H_0^c(X; F)$ отделимо.*

Доказательство. Так как когерентный аналитический пучок F над X локально гомологически тривиален, то по теореме 3 для любой строго плюрисубгармонической исчерпывающей функции φ на X и любого $t \in R$ получим $H_k^c(B_t(\varphi); F) = 0$ при $k \neq 0$, и каноническое отображение $H_0^c(B_t(\varphi); F) \to H_0^c(X; F)$ инъективно. Утверждения следуют отсюда ввиду известных свойств групп гомологий ([1], сс. 124, 131–132). $\square$

3. Комплексное пространство X называется голоморфно регулярным, если для каждой точки $x \in X$ существует голоморфное отображение $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to C^n$, удовлетворяющее одному из равносильных условий

а) f определяет изоморфизм некоторой открытой окрестности точки x, как кольцованного пространства, на аналитическое множество в области пространства C^n;
б) ростки $f_{ix} - f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ порождают максимальный идеал m_x локального кольца $O_{X,x}$;
в) классы эквивалентности ростков $f_{ix} - f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ порождают комплексное векторное пространство m_x/m_x^2.

Комплексное пространство X будем называть *голоморфно полным*, если оно голоморфно выпукло и голоморфно регулярно. Можно легко показать, что это определение равносильно другим известным определениям голоморфно полного комплексного пространства и, в частности, тому, которое дано в ([7], с. 169–170).

Лемма 8. *Комплексное пространство X голоморфно полно, если для любого когерентного подпучка идеалов $I \subset O_X$, множество нулей которого дискретно и замкнуто в X, топологическое векторное пространство $H_0^c(X; I)$ отделимо, и топологическое векторное пространство $H_1^c(X; I)$ имеет тривиальную топологию.*

Доказательство. В силу теоремы двойственности условие леммы означает, что $H^1(X; I) = 0$ (см. [1], с. 91–92). Отсюда следует, что каноническое отображение $\Gamma(X; O_X) \to \Gamma(X; O_X/I)$ сюръективно, и поэтому пространство X голоморфно полно [2]. $\square$

По существу известным результатом Грауэрта [6] и Нарасимхана [4], [5] по проблеме Леви на комплексных пространствах является

Следствие. Для комплексного пространства X равносильны следующие утверждения:

а) X голоморфно полно;
б) X строго псевдовыпукло;
в) если F — когерентный аналитический пучок над X, то $H_k^c(X;F) = 0$ при $k \neq 0$, и топологическое векторное пространство $H_0^c(X;F)$ отделимо.

Доказательство. Пусть пространство X голоморфно полно. Тогда его можно покрыть открытыми множествами U_n $(n = 1, 2, \dots)$ так, чтобы при каждом n существовало голоморфное отображение $f_n = (f_{n1}, \dots, f_{nk}) : X \to C^k$ (k зависит от n), определяющее изоморфизм множества U_n, как кольцованного пространства, на аналитическое множество в области пространства C^k. Пусть при каждом $n = 1, 2, \dots$

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{k} |f_{ni}(x)|^2.$$

Выберем такие компактные множества $K_n \subset X$ $(n = 1, 2, \dots)$, что $\widehat{K}_n = K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ при каждом $n = 1, 2, \dots$, и $\cup K_n = X$. Можно считать, что для каждого $n = 1, 2, \dots$ $\varphi_n(x) < 1/2^n$ при $x \in K_n$ и $\varphi_n(x) > n$ при $x \in K_{n+2} \setminus K_{n+1}$. Тогда

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$$

— строго плюрисубгармоническая исчерпывающая функция на X (ср. [4], [5]). Другими словами, а) влечет б). По лемме 7 б) влечет в). По лемме 8 в) влечет а). $\square$

Лемма 9. *Если K — непустое компактное множество в голоморфно полном комплексном пространстве X, то для любой окрестности U множества $\widehat{K}$ существует такая строго плюрисубгармоническая исчерпывающая функция φ на X и такое $c \in R$, что $\widehat{K} \subset B_c(\varphi) \subset U$.*

Доказательство. По следствию из леммы 8 на X существует строго плюрисубгармоническая исчерпывающая функция $\varphi_0 \geq 0$. Пусть $\varphi_0(x) < c_0$ при каждом $x \in \widehat{K}$, и U — относительно компактная открытая окрестность множества $\widehat{K}$. Выберем конечное число голоморфных функций $f_1, \dots, f_k \in \Gamma(X; O_X)$ так, чтобы для функции

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{k} |f_i(x)|^2$$

выполнялись неравенства $\psi(x) < c_0$ при $x \in \widehat{K}$, и $\psi(x) > c$ при $x \in B_c(\varphi_0) \setminus U$, где $c = 2c_0$. Положим $\varphi = \varphi_0 + \psi$. Тогда φ — строго плюрисубгармоническая исчерпывающая функция на X, и $\varphi(x) < c$ при $x \in \widehat{K}$, т. е. $\widehat{K} \subset B_c(\varphi)$. Если же $\varphi(x) < c$, то $x \in B_c(\varphi)$ и $\psi(x) < c$, т. е. $x \in U$; другими словами, $B_c(\varphi) \subset U$. $\square$

Теорема 4. *Всякий локально гомологически тривиальный аналитический пучок F над голоморфно полным комплексным пространством X гомологически тривиален.*

Доказательство. Пусть U — произвольное голоморфно выпуклое открытое множество в X. Тогда по лемме 9 существуют строго плюрисубгармонические исчерпывающие функции φ_i на X и числа $c_i \in R$ $(i = 1, 2, \dots)$ такие, что для множеств $B_i = B_{c_i}(\varphi_i)$ выполняются включения $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$, и $\cup B_i = U$. Следовательно, при каждом $k = 0, 1, \dots$ каноническое отображение

$$\varinjlim H_k^c(B_i; F) \to H_k^c(U; F)$$

является изоморфизмом векторных пространств. Ввиду теоремы 3 утверждение следует отсюда непосредственно. □

Следствие 1. Всякий когерентный аналитический пучок F над голоморфно полным комплексным пространством X гомологически тривиален.

В качестве другого следствия из теоремы 4 получаем фундаментальные теоремы (A) и (B) Картана [2] и теорему Рунге об аппроксимации для сечений когерентных аналитических пучков.

Следствие 2. Пусть X — голоморфно полное комплексное пространство, и F — когерентный аналитический пучок над X. Тогда справедливы утверждения

а) $H^k(X;F) = 0$ при $k \neq 0$;
б) для каждого голоморфно выпуклого открытого множества U в X отображение ограничения $\Gamma(X;F) \to \Gamma(U;F)$ имеет всюду плотный образ;
в) при каждом $x \in X$ образ канонического отображения $\Gamma(X;F) \to F_x$ порождает слой F_x как $O_{X,x}$-модуль.

Доказательство. По следствию 1 для каждого голоморфно выпуклого открытого множества U в X имеем $H_k^c(U;F) = 0$ при $k \neq 0$, и каноническое отображение $H_0^c(U;F) \to H_0^c(X;F)$ инъективно. По критерию отделимости ([1], с. 131–132) топологическое векторное пространство $H_0^c(X;F)$ отделимо. Ввиду теоремы двойственности ([1], с. 91–92) отсюда следуют утверждения а) и б) (ср. более длинное стандартное доказательство в [7], с. 125–178). В частности, при каждом $x \in X$ каноническое отображение $\Gamma(X;F) \to F_x$ имеет всюду плотный образ. С другой стороны, по теореме о замкнутости модуля всякий подмодуль $O_{X,x}$-модуля F_x замкнут. Отсюда следует утверждение в). □

Лемма 10. *Пусть X — голоморфно полное комплексное пространство. Тогда открытое множество $U \subset X$ в том и только том случае голоморфно выпукло в X, если выполняются условия*

а) *U голоморфно полно*;
а) *каноническое отображение $H_0^c(U;O_X) \to H_0^c(X;O_X)$ инъективно.*

Доказательство. Ввиду следствия 1 из теоремы 4 необходимость условий очевидна. Докажем достаточность. Пусть K — непустое компактное множество в U, и

$$K_1 = \{x \in U : |f(x)| \leq \sup_{y \in K} |f(y)| \ \forall f \in \Gamma(U;O_X)\}.$$

Тогда $K_1 = \widehat{K}$. Действительно, из условий леммы и теоремы двойственности ([1], с. 91–92) следует, что множество K_1 компактно, и отображение ограничения $\Gamma(X;O_X) \to \Gamma(U;O_X)$ имеет всюду плотный образ. Поэтому для каждой точки $x_0 \in U \setminus K_1$ существует такая голоморфная функция $f \in \Gamma(X;O_X)$, что $|f(x)| < 1$ при $x \in K$, и $|f(x_0)| > 1$; другими словами, $K_1 = \widehat{K} \cap U$. Предположим, что $K_1 \neq \widehat{K}$. Тогда $\widehat{K} = K_1 \cup K_2$, где K_2 — непустое компактное множество, содержащееся в $X \setminus U$. Пусть U_1, U_2 — такие открытые окрестности соответственно множеств K_1 и K_2, что $U_1 \cap U_1 = \emptyset$. Тогда по лемме 9 существует такая строго плюрисубгармоническая исчерпывающая функция φ на X и такое $c \in R$, что $\widehat{K} \subset B_c(\varphi) \subset U_1 \cup U_2$. По теореме 3 ввиду теоремы двойственности ([1], с. 91–92) и леммы 7 отображение ограничения $\Gamma(X;O_X) \to \Gamma(B_c(\varphi);O_X)$ имеет всюду плотный образ. Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая голоморфная функция $f \in \Gamma(X;O_X)$, что $|f(x)| < \varepsilon$ при $x \in K_1$, и $|f(x)| > 1 - \varepsilon$ при $x \in K_2$; получилось противоречие. □

Следствие. Если U — голоморфно выпуклое открытое множество в голоморфно полном комплексном пространстве X, и V — голоморфно выпуклое открытое множество в U, то V голоморфно выпукло в X.

Лемма 11. *Если X — голоморфно полное комплексное пространство, то для любой строго плюрисубгармонической исчерпывающей функции φ на X и любого $c \in R$ множество $B_c(\varphi)$ голоморфно выпукло в X.*

Доказательство. Так как множество $B_c(\varphi)$, очевидно, является строго псевдовыпуклым комплексным пространством, то по следствию из леммы 8 оно голоморфно полно. По теореме 3 каноническое отображение $H_0^c(B_c(\varphi); O_X) \to H_0^c(X; O_X)$ инъективно. Таким образом, утверждение следует из леммы 10. $\square$

Комплексное пространство X будем называть локально голоморфно выпуклым, если для каждой точки $x \in X$ существует фундаментальная система окрестностей, состоящая из голоморфно выпуклых открытых множеств в X.

Лемма 12. *Всякое голоморфно полное комплексное пространство X локально голоморфно выпукло.*

Доказательство. Так как пространство X голоморфно полно, то получаем, в частности, что $\widehat{\{x\}} = \{x\}$ для каждой точки $x \in X$. По лемме 9 для каждой окрестности U точки x существуют такая строго плюрисубгармоническая исчерпывающая функция φ на X и такое $c \in R$, что $x \in B_c(\varphi) \subset U$. По лемме 11 утверждение доказано. $\square$

Теорема 5. *Всякий гомологически тривиальный аналитический пучок F над голоморфно полным комплексным пространством X локально гомологически тривиален.*

Доказательство. Пусть U — открытая окрестность произвольной точки $x \in X$, реализованная как аналитическое множество в области G пространства C^n. По лемме 12 можно считать, что множество U голоморфно выпукло в X. Тогда для любого полицилиндра $P \subset G$ с центром в x пересечение $V = P \cap U$ есть полицилиндрическая окрестность точки x, голоморфно выпуклая в U, и всякое голоморфно выпуклое открытое множество в V по следствию леммы 10 голоморфно выпукло в X. Тем самым аналитический пучок F гомологически тривиален над V. $\square$

Литература

1. Головин В.Д. *Гомологии аналитических пучков и теоремы двойственности.* – М.: Наука, 1986. – 191 с.
2. Cartan H. *Variétés analytiques complexes et cohomologie* // Coll. sur les fonct. de plus. variabl. – Paris, 1953. – P. 41–55.
3. Oka K. *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables*, I. *Domaines convexes par rapport aux fonctions rationelles* // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A. – 1936. – V. 6. – № 3. – P. 245–255.
4. Narasimhan R. *The Levi problem for complex spaces* // Math. Ann. – 1961. – Bd. 142. – № 4. – S. 355–365.
5. Narasimhan R. *The Levi problem for complex spaces* // Math. Ann. – 1962. – Bd. 146. – № 3. – S. 195–216.
6. Grauert H. *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds* // Ann. Math. – 1958. – V. 68. – № 2. – P. 460–472.
7. Грауэрт Г., Реммерт Р. *Теория пространств Штейна.* – М.: Наука, 1989. – 335 с.

Харьковский государственный университет

Поступила 12.06.1996