ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 7 (518)

УДК 517.968:519.6

Ю.Р. АГАЧЕВ, А.И. ЛЕОНОВ

РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР

Работа посвящена приближенному решению методом механических квадратур линейных интегродифференциальных уравнений вида

$$x(t) + \int_0^1 h_0(t,s)x(s)ds + \int_0^1 h_1(t,s)x'(s)ds = y(t), \quad 0 \le t \le 1, \tag{1}$$

где $y(t)$ и $h_0(t,s), h_1(t,s)$ — известные функции на $[0,1]$ и $[0,1]^2$ соответственно, а $x(t)$ — искомая функция.

Известно (напр., [1]), что уравнение (1) при естественном выборе пространств искомых элементов и правых частей относится, вообще говоря, к классу некорректно поставленных задач. Однако при удачном выборе этих пространств задачу решения уравнения (1) удается поставить корректно. В последние годы для решения уравнения (1) в его корректной постановке предложен и обоснован ряд известных прямых методов (напр., [2]–[4]).

В данной работе дается теоретическое обоснование в смысле [5],[6] одного варианта метода механических квадратур для уравнения (1) в пространстве Соболева функций, имеющих в промежутке интегрирования суммируемую производную.

1. Вспомогательные результаты

На сегменте $[0,1]$ введем сетку узлов

$$\Delta_n : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1, \quad \|\Delta_n\| \equiv \max_{1\le k\le n}(t_k - t_{k-1}) \to 0, \quad n \to \infty, \tag{2}$$

и на ней систему фундаментальных сплайнов $\{\psi_k(t)\}_1^n$ и $\{\varphi_k(t)\}_0^n$ соответственно нулевой и первой степеней. Как хорошо известно (напр., [6]–[9]), эти функции с конечным носителем на $[0,1]$ определяются следующим образом:

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1, & t_{k-1} < t \le t_k; \\ 0, & t \notin (t_{k-1}, t_k], \end{cases}$$

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 0, & t \le t_{k-1}; \\ \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}, & t_{k-1} \le t \le t_k; \\ \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k}, & t_k \le t \le t_{k+1}; \\ 0, & t \ge t_{k+1}, \end{cases}$$

причем функция $\psi_1(t)$ непрерывна в нуле, а в определении $\varphi_k(t)$ при $k = 0$ и $k = n$ следует пренебречь соответственно первыми двумя и последними двумя звеньями.

Пусть $t_{k+1/2} = (t_k + t_{k+1})/2$, $k = \overline{0, n-1}$, $C \equiv C[0,1]$ и $L_1 \equiv L_1(0,1)$ — пространства непрерывных и соответственно суммируемых на сегменте $[0,1]$ функций с обычными нормами

$$\|x\|_C = \max_{0\le t\le 1} |x(t)|, \quad x \in C; \quad \|x\|_1 \equiv \|x\|_{L_1} = \int_0^1 |x(t)|dt, \quad x \in L_1,$$

а $W_1^1 \equiv W_1^1[0,1]$ — пространство Соболева функций, имеющих на сегменте $[0,1]$ первую производную из пространства L_1. Норму в W_1^1 введем следующим образом:

$$\|x\|_{1,1} \equiv \|x\|_{W_1^1} = \|x\|_C + \|x'\|_1, \quad x \in W_1^1.$$

Обозначим через $\omega(x;\delta)_C$ и $\omega(x;\delta)_1$ модули непрерывности с шагом $\delta > 0$ функции $x(t)$ в пространстве C и L_1 соответственно, а через $\omega_t(h;\delta)_{L_1\otimes C}$, $\omega_t(h;\delta)_C$ и $\omega_t(h;\delta)_1$ — частные модули непрерывности функции $h(t,s)$ по переменной t в пространствах соответственно $L_1 \times C$, $C([0,1]^2)$ и $L_1([0,1]^2)$. Аналогично вводятся частные модули непрерывности по переменной s.

Для произвольно фиксированной функции $x(s)$ на сетке (2) введем сплайны $S_n^1(x;s)$, $Q_n^\circ(x;s)$ и $U_n^\circ(x;s)$; здесь $S_n^1(x;s)$ — интерполяционный сплайн первой степени для $x(s)$ с узлами интерполяции (2), $Q_n^\circ(x;s)$ — сплайн нулевой степени, интерполирующий значения функции $x(s)$ в точках $\{t_{k+1/2}\}$, а $U_n^\circ(x;s)$ — сплайн нулевой степени, интерполирующий средние значения функции $x(s)$ на частичных промежутках (t_{k-1}, t_k), $k = \overline{1,n}$.

В следующих леммах приводятся некоторые аппроксимативные свойства (напр., [6]–[10]) этих сплайнов.

Лемма 1. *Для любой непрерывной на $[0,1]$ функции $x(s)$ интерполяционный сплайн $S_n^1(x;s)$, построенный по узлам (2), равномерно сходится к самой функции со скоростью*

$$\|x - S_n^1 x\|_C \le \omega(x; \|\Delta_n\|)_C.$$

В частности, если существует производная[1] *$x'(s)$, интегрируемая по Лебегу на $[0,1]$, то*

$$\|x - S_n^1 x\|_C \le \|\Delta_n\|\, \|x'\|_1, \quad n \ge 1.$$

Если сетка (2) удовлетворяет дополнительному условию

$$\|\Delta_n\| / \min_{1\le k\le n}(t_k - t_{k-1}) \le \beta < \infty \tag{3}$$

и функция $x(s)$ имеет производную, интегрируемую по Лебегу на $[0,1]$, то для погрешности интерполирования сплайном $S_n^1(x;s)$ по норме пространства L_1 справедлива оценка

$$\|x - S_n^1 x\|_{L_1} \le 7\beta \|\Delta_n\| \omega(x'; \|\Delta_n\|)_{L_1}.$$

Лемма 2. *Для любой непрерывной на $[0,1]$ функции $x(s)$ интерполяционный сплайн $Q_n^\circ(x;s)$, построенный по узлам (2), равномерно сходится к самой функции со скоростью*

$$|x(s) - Q_n^\circ(x;s)| \le \omega(x; \|\Delta_n\|/2)_C.$$

Лемма 3. *Для интегрируемой по Лебегу функции $x(s)$ сплайн нулевой степени $U_n^\circ(x;s)$, построенный на сетке Δ_n, удовлетворяющей условию (3), обладает свойством*

$$\|x - U_n^\circ x\|_1 \le 2\beta\omega(x; \|\Delta_n\|)_1, \quad n \ge 1.$$

2. Вычислительная схема метода

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде сплайна

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t), \tag{4}$$

коэффициенты которого определим из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{kj}\, c_k = y_j, \quad j = \overline{0,n}, \tag{5}$$

[1]Заметим, что если производная функции $x(s)$ равна тождественно постоянной, то $S_n^1(x;s) \equiv x(s)$.

где $y_j = y(t_j)$, $\alpha_{kj} = \frac{h_0(t_j,t_k)}{2}(t_{k+1}-t_{k-1}) + h_1(t_j,t_{k-1/2}) - h_1(t_j,t_{k+1/2}) \equiv \beta_{kj}$, $k = \overline{1,n-1}$ $(k \neq j)$, $\alpha_{jj} = 1 + \beta_{jj}$, $j = \overline{1,n-1}$, $\alpha_{0j} = \frac{h_0(t_j,0)}{2}t_1 - h_1(t_j,t_{1/2}) \equiv \beta_{0j}$, $j \neq 0$, $\alpha_{00} = 1 + \beta_{00}$, $\alpha_{nj} = \frac{h_0(t_j,1)}{2}(1-t_{n-1}) + h_1(t_j,t_{n-1/2}) \equiv \beta_{nj}$, $j \neq n$, $\alpha_{nn} = 1 + \beta_{nn}$.

Теорема. *Пусть выполнены следующие предположения*:

1) $y \in W_1^1[0,1]$, $h_0, h_1 \in W_1^1[0,1] \times C[0,1]$;
2) *однородное уравнение, соответствующее уравнению* (1), *имеет лишь тривиальное решение*;
3) *сетка* Δ_n *удовлетворяет условию* (3).

Тогда система (5) *имеет единственное решение при всех* n, *начиная хотя бы с некоторого натурального* n_0, *и приближенные решения* (4) *сходятся к точному решению уравнения* (1) *в пространстве* W_1^1 *со скоростью*

$$\|x - x_n\|_{1,1} = O\Big\{\omega\Big(y'; \frac{1}{n}\Big)_1 + \omega_t\Big((h_0)'_t; \frac{1}{n}\Big)_1 + \omega_s\Big(h_0; \frac{1}{n}\Big)_C + \\ + \omega_s\Big((h_0)'_t; \frac{1}{n}\Big)_{L_1\otimes C} + \omega_t\Big((h_1)'_t; \frac{1}{n}\Big)_1 + \omega_s\Big(h_1; \frac{1}{n}\Big)_C + \omega_s\Big((h_1)'_t; \frac{1}{n}\Big)_{L_1\otimes C} + \frac{1}{n}\Big\}.$$

Доказательство. В пространстве $X = W_1^1$ уравнение (1) запишем в операторной форме

$$Kx \equiv x + H_0 x + H_1 x = y \quad (x, y \in X), \tag{1'}$$

где операторы H_0 и H_1 определяются формулами

$$(H_0 x)(t) = \int_0^1 h_0(t,s)x(s)ds, \quad (H_1 x)(t) = \int_0^1 h_1(t,s)x'(s)ds.$$

Пусть $X_n \subset X$ — подпространство сплайнов вида (4), $P_n : X \to X_n$ – оператор, который любой функции $x(t) \in W_1^1$ ставит в соответствие интерполяционный сплайн $S_n^1(x;t)$. Тогда нетрудно показать, что СЛАУ (5) эквивалентна следующему заданному в подпространстве X_n операторному уравнению:

$$K_n x_n \equiv x_n + P_n H_{0,n} x_n + P_n H_{1,n} x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n), \tag{6}$$

где операторы $H_{0,n}$ и $H_{1,n}$ задаются соотношениями

$$(H_{0,n}x)(t) = \int_0^1 P_n^s(h_0(t,s)x(s))ds,$$
$$(H_{1,n}x)(t) = \int_0^1 Q_n^{\circ\, s}(h_1(t,s))x'(s)ds,$$

а P_n^s и $Q_n^{\circ\, s}$ означают применение операторов P_n и Q_n° по переменной s.

Используя леммы 1, 3 и замечание к лемме 1, для правых частей уравнений (1′) и (6) имеем[1]

$$\|y - P_n y\|_X = \|y - P_n y\|_C + \|y' - U_n^\circ y'\|_1 \le c_1 \omega(y'; \|\Delta_n\|)_1,$$

что доказывает близость правых частей указанных уравнений

$$\|y - P_n y\|_X = O\Big\{\omega\Big(y'; \frac{1}{n}\Big)_1\Big\} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{7}$$

В частности, из (7) вытекает справедливость асимптотической оценки

$$\|P_n\|_{W_1^1 \to W_1^1} \sim 1, \quad n \to \infty. \tag{8}$$

[1]Здесь и далее $c_1, c_2, \ldots$ обозначают вполне определенные положительные постоянные, не зависящие от n.

Покажем теперь близость операторов K и K_n уравнений ($1'$) и (6) на подпространстве X_n. С этой целью для произвольного элемента $x_n \in X_n$ получим оценки

$$\|Kx_n - K_n x_n\|_X \le \|H_0 x_n - P_n H_{0,n} x_n\|_X + \|H_1 x_n - P_n H_{1,n} x_n\|_X \equiv I_1 + I_2. \tag{9}$$

Первое слагаемое в (9) с помощью полученных неравенств (7) и (8) можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned}
I_1 &\le \|H_0 x_n - P_n H_0 x_n\|_X + \|P_n (H_0 - H_{0,n}) x_n\|_X \le \\
&\le \|h_0 - P_n^t h_0\|_{X \otimes L_1} \|x_n\|_C + \|h_0 x_n - P_n^s (h_0 x_n)\|_{X \otimes L_1} \le \\
&\le c_2 \omega_t((h_0)'_t; \|\Delta_n\|)_1 \|x_n\|_C + \omega_s(h_0 x_n; \|\Delta_n\|)_{X \otimes C} \le \\
&\le c_2 \omega_t((h_0)'_t; \|\Delta_n\|)_1 \|x_n\|_X + \omega_s(h_0; \|\Delta_n\|)_C \|x_n\|_C + \omega_s((h_0)'_t; \|\Delta_n\|)_{L_1 \otimes C} \|x_n\|_C + \\
&\qquad + \|h_0\|_C \omega(x_n; \|\Delta_n\|)_C + \|(h_0)'_t\|_{L_1 \otimes C} \omega(x_n; \|\Delta_n\|)_C \le \\
&\le c_3 \omega_t((h_0)'_t; 1/n)_1 \|x_n\|_X + c_4 \omega_s(h_0; 1/n)_C \|x_n\|_C + \\
&\qquad + c_5 \omega_s((h_0)'_t; 1/n)_{L_1 \otimes C} \|x_n\|_C + c_6 \big(\|h_0\|_C + \|(h_0)'_t\|_{L_1 \otimes C}\big) \|x'_n\|_1 / n.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$I_1 = O\{\omega_t((h_0)'_t; 1/n)_1 + \omega_s(h_0; 1/n)_C + \omega_s((h_0)'_t; 1/n)_{L_1 \otimes C} + (\|h_0\|_C + \|(h_0)'_t\|_{L_1 \otimes C})/n\} \|x_n\|_X. \tag{10}$$

Для второго слагаемого в (9), с учетом лемм 1–3 и оценки (7), аналогично имеем

$$\begin{aligned}
I_2 &= \|H_1 x_n - P_n H_{1,n} x_n\|_X \le \|H_1 x_n - P_n H_1 x_n\|_X + \|P_n (H_1 - H_{1,n}) x_n\|_X \le \\
&\le \|h_1 - P_n^t h_1\|_{X \otimes C} \|x'_n\|_1 + \|(h_1 - Q_n^{\circ s}(h_1)) x'_n\|_{X \otimes L_1} \le \\
&\le c_7 \omega_t((h_1)'_t; \|\Delta_n\|)_{L_1 \otimes C} \|x'_n\|_1 + \omega_s(h_1; \|\Delta_n\|)_{X \otimes C} \|x'_n\|_1 \le \\
&\le c_7 \omega_t((h_1)'_t; \|\Delta_n\|)_{L_1 \otimes C} \|x_n\|_X + \omega_s(h_1; \|\Delta_n\|)_C \|x'_n\|_1 + \omega_s((h_1)'_t; \|\Delta_n\|)_{L_1 \otimes C} \|x'_n\|_1 \le \\
&\le c_8 \omega_t((h_1)'_t; 1/n)_{L_1 \otimes C} \|x_n\|_X + c_9 \omega_s(h_1; 1/n)_C \|x'_n\|_1 + c_{10} \omega_s((h_1)'_t; 1/n)_{L_1 \otimes C} \|x'_n\|_1.
\end{aligned}$$

Отсюда следует

$$I_2 = O\{\omega_t((h_1)'_t; 1/n)_{L_1 \otimes C} + \omega_s(h_1; 1/n)_C + \omega_s((h_1)'_t; 1/n)_{L_1 \otimes C}\} \|x_n\|_X. \tag{11}$$

Из порядковых оценок (10) и (11) вытекает справедливость оценки

$$\begin{aligned}
\|K - K_n\|_{X_n \to X} = O\{&\omega_t((h_0)'_t; 1/n)_1 + \omega_s(h_0; 1/n)_C + \\
&+ \omega_s((h_0)'_t; 1/n)_{L_1 \otimes C} + \omega_t((h_1)'_t; 1/n)_{L_1 \otimes C} + \omega_s(h_1; 1/n)_C + \omega_s((h_1)'_t; 1/n)_{L_1 \otimes C} + 1/n\}.
\end{aligned}$$

Используя результаты гл. 1 из [6], отсюда выводим, что операторы $K_n : X_n \to X_n$ непрерывно обратимы хотя бы при всех n, начиная с некоторого, при этом обратные операторы K_n^{-1} ограничены по норме в совокупности. Последнее означает, что СЛАУ (5) при таких n имеет единственное решение c_k^*, $k = \overline{0, n}$. Приближенные решения $x_n^*(s)$, построенные по формуле (4) при $c_k = c_k^*$, сходятся по норме пространства X к точному решению $x^*(s)$ уравнения (1) со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{\|y - P_n y\|_X + \|K - K_n\|_{X_n \to X}\}. \quad \square$$

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. *Некоторые вопросы теории приближенных методов.* II // Изв. вузов. Математика. – 1968. – № 10. – С. 21–29.
2. Агачев Ю.Р., Леонов А.И. *О сходимости метода коллокации и одного варианта метода механических квадратур для интегродифференциальных уравнений* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 8. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. – Казань: Изд-во ДАС, 2001. – С. 7–9.

3. Габдулхаев Б.Г., Ермолаева Л.Б. *Оптимальные методы решения одного класса интегро-дифференциальных уравнений* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 8. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. – Казань: Изд-во ДАС, 2001. – С. 61–63.
4. Габдулхаев Б.Г., Рахимов И.К. *Об одном оптимальном методе решения операторных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 2. – С. 23–36.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* 2-е изд. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
6. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
7. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. *Методы сплайн-функций.* – М.: Наука, 1980. – 352 с.
8. Корнейчук Н.П. *Сплайны в теории приближения.* – М.: Наука, 1984. – 352 с.
9. Марчук Г.И., Агошков В.И. *Введение в проекционно-сеточные методы.* – М.: Наука, 1981. – 416 с.
10. Агачев Ю.Р. *Сходимость метода подобластей и одного "смешанного" метода для интегральных и дифференциальных уравнений* / Казанск. ун-т. – Казань, 1986. – 48 с. – Деп. в ВИНИТИ 30.12.86, № 9039–В86.

Казанский государственный университет

Казанская государственная архитектурно-строительная академия

Поступила
12.03.2004