ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 5 (444)

УДК 517.958

Р.Р. ШАГИДУЛЛИН

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ СТАТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ МЯГКОЙ ОБОЛОЧКИ

1. *Введение.* Работа является продолжением исследований автора по математическим проблемам теории мягких оболочек, результаты которых изложены в [1], [2]. Она посвящена доказательству теорем существования решения уравнений равновесия мягких оболочек при физическом законе, отличном от степенного с целым показателем.

Уравнения статического состояния, когда кроме массовых сил присутствует нормальная следящая нагрузка, имеют вид

$$(g(|x'(s)|^2)x'(s))' + P(s)x'(s) + f(s) = 0, \quad s \in \Omega. \tag{1}$$

Здесь $x(s) = (x_1(s), x_2(s))$ — вектор координат частицы с дуговой координатой s, отсчитываемой по недеформированной направляющей. Полагаем, что полная длина направляющей равна 1: $\Omega = [0, 1]$. Штрихом обозначается взятие производной по s, $|x'(s)|^2 = (x_1'(s))^2 + (x_2'(s))^2$. Функция g определяет физический закон, связывающий касательные усилия T вдоль направляющей со степенью удлинения λ элемента оболочки

$$T(s) = g(\lambda^2(s))\lambda(s), \quad \lambda(s) = |x'(s)|.$$

Ее специфической особенностью является равенство $g(\lambda^2)\lambda = 0$ при $\lambda \le 1$. Матричная функция $P(s)$ имеет вид

$$P(s) = \begin{bmatrix} 0 & p(s) \\ -p(s) & 0 \end{bmatrix},$$

где $p(s)$ — плотность силы, действующей на деформированную поверхность оболочки по нормали к ней, так что на участок ds действует сила, равная $p(s)\lambda(s)ds\, n(s)$. Считается, что единичная нормаль $n(s)$ направлена вправо при движении по контуру оболочки в положительном направлении. В приложениях величина $p(s)$ чаще всего определяется задачей взаимодействия оболочки с газом или жидкостью. Кроме поверхностных сил на оболочку действуют массовые силы с плотностью $f(s) = (f_1(s), f_2(s))$; таким образом, на участок длины ds действует сила $f(s)ds$ (принято, что плотность массы недеформированной оболочки входит в выражение для f).

В статье рассматривается замкнутая оболочка без края; тогда дополнительными к (1) являются условия

$$x_1(0) = x_2(0) = x_1(1) = x_2(1) = 0. \tag{2}$$

Целью работы является получение теорем существования решения задачи (1), (2), когда $g(\lambda^2)\lambda$ представляет нелинейную функцию от λ, отличную от степенной (напр., $g(\lambda^2)\lambda = (\lambda - 1)\ln\lambda$, $\lambda \ge 1$), а также, когда показатель α в зависимости $g(\lambda^2)\lambda = \nu(\lambda - 1)^\alpha$, $\lambda \ge 1$, меньше единицы. Впредь коэффициент жесткости на растяжение-сжатие ν будем полагать за счет выбора масштаба сил равным единице. Теоремы существования при $\alpha > 1$ легко следуют из известных фактов [3] и теории монотонных операторов [4]. Эти факты ниже будут приведены. При

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 98-01-00260).

$\alpha = 1$ (линейный закон Гука) полученные автором теоремы содержатся в [2]. Все необъясненные общеупотребительные обозначения и термины соответствуют таковым из [4].

2. *Подготовительные результаты.* Рассмотрим задачу (1), (2) при следующих условиях на функцию $g(\lambda^2)\lambda$, $\lambda \geq 0$:

1) $g(\lambda^2)\lambda$ непрерывна и обладает кусочно-непрерывной ограниченной на ограниченных множествах изменения λ производной;
2) $(g(\lambda^2)\lambda)'_\lambda \geq 0$ для всех $\lambda \geq 0$;
3) $g(\lambda^2)\lambda = 0$ при $\lambda \leq 1$, $g(\lambda^2)\lambda > 0$ при $\lambda > 1$; существуют такие константы D, β, что $g(\lambda^2)\lambda = (\lambda - 1)^\beta$ при $\lambda \geq D$, $\beta > 1$;
4) $g(\lambda^2)\lambda \geq c_0(\lambda - 1)^\beta$ для всех $\lambda \geq 1$ с фиксированной константой $c_0 > 0$.

Пусть V — банахово пространство $[\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)]^2$, $p = \beta + 1$, V^* — сопряженное пространство. Следующие факты доказаны в ([1], с. 47–50) и следуют из свойств 1)–3) функции g:

a) форма $a(u,v) = \int\limits_\Omega g(|u'(s)|^2)(u'(s), v'(s))ds$ определяет при любом $u \in V$ линейный ограниченный функционал над V, следовательно, может быть записана в виде $a(u,v) = \langle Au, v\rangle$, где A — нелинейный оператор, действующий из V в V^*; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — отношение двойственности между V и V^*;
b) оператор A монотонен и непрерывен.

С использованием свойства 4) доказывается

c) оператор A коэрцитивен.

Второму слагаемому уравнения (1) поставим в соответствие линейный оператор L, определяемый формой
$$\langle Lu, v\rangle = \int_\Omega (P(s)u'(s), v(s))ds.$$
Оператор L действует из V в V^* и вполне непрерывен [2]. Обобщенным решением задачи (1), (2) назовем функцию $u \in V$ такую, что
$$\int_\Omega [g(|u'|^2)(u', v') + (Pu', v)]ds = \int_\Omega (f, v)ds \quad \forall v \in V. \tag{3}$$
Основным инструментом исследования будут априорные оценки для регулярных решений задачи (1), (2). Всюду далее полагаем функции $f(s)$ и $p(s)$ непрерывными, и регулярность обобщенного решения уравнения (3) при этих условиях получим, следуя [1].

Лемма 1. *Существует такая постоянная c, что для функции $g(\lambda^2)\lambda$ имеет место неравенство*
$$[g(\lambda^2)\lambda - g(\mu^2)\mu]/(\lambda - \mu) \leq c(1 + \lambda + \mu)^{\beta - 1} \quad \forall \lambda, \mu > 0, \quad \lambda \neq \mu. \tag{4}$$

Доказательство. Утверждение легко следует из свойств 1), 3) функции $g(\lambda^2)\lambda$. $\square$

Лемма 1 позволяет применять так называемое неравенство подчинения ([3], с. 51) и с помощью результатов [5], следуя [4], установить, что решение $u(s)$ уравнения (3) почти всюду имеет необходимые производные в обычном смысле и почти всюду в Ω удовлетворяет уравнению (1). Именно в этом смысле будем понимать регулярность решения. Имеет место представление
$$g(\lambda^2(s))u'_s = -\int_0^s (f(\xi) + P(\xi)u'_\xi)d\xi + c. \tag{5}$$
Из (5) в свою очередь вытекает непрерывность функции $T(s) = g(|u'|^2)|u'(s)|$ и существование производной $T'(s)$ в каждой точке, где $\lambda(s) = |u'(s)| > 1$.

Для любой непрерывной функции $\psi(s)$ на интервале $[0,1]$ будем обозначать ее колебание через $\omega_\psi = \psi_M - \psi_m$, где $\psi_M = \max\limits_{0 \leq s \leq 1} \psi(s)$, $\psi_m = \min\limits_{0 \leq s \leq 1} \psi(s)$. Всюду далее индексы M и m будут соответствовать максимуму и соответственно минимуму функции.

Лемма 2. *Для всех решений $x_1(s)$, $x_2(s)$ системы (1), (2) колебание соответствующей функции $T(s)$ ограничено одной и той же константой c_1, определяемой только функцией $f(s)$.*

Доказательство. Рассматривая (1) как систему скалярных уравнений, умножим первое уравнение (1) на $g(\lambda^2(s))x_1'(s)$, второе — на $g(\lambda^2(s))x_2'(s)$. Сложим полученные соотношения

$$|(T^2(s))_s'| = 2|(f_1x_1' + f_2x_2')g(\lambda^2(s))| \le 2|f(s)|T(s).$$

Если $T(s) > 0$, то отсюда следует

$$|T'(s)| \le |f(s)|. \tag{6}$$

Итак, относительно $T(s)$ можем утверждать, что это неотрицательная непрерывная функция на замкнутом промежутке $[0,1]$, в каждой точке s, где она строго положительна, у нее существует производная (см. (5)), удовлетворяющая неравенству (6). Несложные рассуждения показывают, что эти условия влекут оценку $\omega_T \le \max\limits_{0\le s\le 1}|f(s)| = c_1$. $\square$

Лемма 3. *Пусть решение $x_1(s)$, $x_2(s)$ системы (1), (2) таково, что для положительного числа c_2, значение которого определяется только функцией $p(s)$, выполняется соотношение*

$$g(\lambda^2(s)) \ge c_2 \tag{7}$$

для всех $s \in [0,1]$. Тогда существует константа c_3, зависящая только от функций $p(s)$, $f(s)$ (но не от g) такая, что в некоторой точке $s \in [0,1]$ $\lambda(s) \le c_3$.

Доказательство. Для упрощения записей обозначим $g(\lambda^2(s))$ через $\varphi(s)$. Из первого уравнения системы (1) получим

$$\int_\Omega (\varphi x_1')'x_1\,ds + \int_\Omega px_2'x_1\,ds = -\int_\Omega f_1x_1\,ds.$$

Интегрирование по частям с использованием краевых условий (2) в первом интеграле этого равенства приводит к соотношению

$$\int_\Omega \varphi(x_1')^2\,ds = \int_\Omega px_2'x_1\,ds + \int_\Omega f_1x_1\,ds.$$

Аналогично из второго уравнения (1) получим

$$\int_\Omega \varphi(x_2')^2\,ds = -\int_\Omega px_1'x_2\,ds + \int_\Omega f_2x_2\,ds.$$

Сложив последние равенства, приходим к основной “рабочей” формуле

$$\int_\Omega \varphi(s)((x_1'(s))^2 + (x_2'(s))^2)\,ds = \int_\Omega (p(x_2'x_1 - x_1'x_2) + (f,x))\,ds. \tag{8}$$

Из (7) и (8), используя неравенства Коши–Буняковского и Юнга, получаем

$$c_2\int_\Omega ((x_1')^2 + (x_2')^2)\,ds \le \tfrac12|p|_M\int_\Omega ((x_1')^2 + (x_2')^2)\,ds + \\ + (\tfrac12 + \tfrac12|p|_M)\int_\Omega (x_1^2 + x_2^2)\,ds + \tfrac12\int_\Omega (f_1^2 + f_2^2)\,ds. \tag{9}$$

Пусть γ — константа из неравенства

$$\gamma\int_\Omega (x_1^2 + x_2^2)\,ds \le \int_\Omega ((x_1')^2 + (x_2')^2)\,ds, \tag{10}$$

которое имеет место в силу однородности краевых условий (2) и непрерывного вложения $[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)]^2$ в $[L_2(\Omega)]^2$.

Из (9) и (10) следует

$$[(c_2 - \tfrac{1}{2}|p|_M)\gamma - \tfrac{1}{2}|p|_M - \tfrac{1}{2}] \int_\Omega (x_1^2 + x_2^2)\,ds \le \tfrac{1}{2} \int_\Omega (f_1^2 + f_2^2)\,ds,$$

и, если выберем c_2 так, чтобы было

$$q = (c_2 - \tfrac{1}{2}|p|_M)\gamma - \tfrac{1}{2}|p|_M - \tfrac{1}{2} > 0,$$

то приходим к оценке

$$\int_\Omega (x_1^2 + x_2^2)\,ds \le \frac{1}{2q} \int_\Omega (f_1^2 + f_2^2)\,ds. \tag{11}$$

Из неравенств (9), (11) следует, что $\int\limits_\Omega \lambda^2(s)ds \le q_1$, где q_1 — априорно вычисляемая постоянная, значение которой определяется максимальным значением $|p|_M$ модуля $p(s)$, константой γ и интегралом $\int\limits_\Omega f^2 ds$. Следовательно, в некоторой точке $\lambda(s) \le q_1^{1/2} = c_3$. $\square$

Лемма 4. *Пусть функции $T(\sigma)$, $K(\sigma)$, $N(\sigma)$ определены, непрерывны на интервале $[a,b]$ и связаны соотношением $T(\sigma)K(\sigma) = N(\sigma)$; функция $T(\sigma)$ непрерывно дифференцируема всюду и положительна; положительные константы D_1, D_2, D_3 таковы, что $0 < N(\sigma) \le D_1$, $\int\limits_a^b K(\sigma)d\sigma \le D_2$, $\omega_T[a,b] \le D_3$; $\lambda(\sigma) = [T(\sigma)]^{1/\alpha} + 1$, где $0 < \alpha < 1$; переменная s как решение уравнения $ds/d\sigma = \lambda^{-1}(\sigma)$ меняется в интервале $[0,d]$, когда σ пробегает $[a,b]$. Тогда существует такая константа c_4 (вычисляемая по D_1, D_2, D_3, α), что справедлива импликация: если всюду на $[a,b]$ имеет место неравенство $\lambda(\sigma) \ge c_4$, то на $[a,b]$ найдется точка σ_0, для которой*

$$D_2(T(\sigma_0) + D_3) + (T(\sigma_0) + D_3)^{1/\alpha - 1} \ge \frac{1}{2} \int_0^d N(\sigma(s))\,ds\,[(T(\sigma_0))^{1/\alpha} + 1]. \tag{12}$$

Доказательство. Используем неравенство Грюсса для средних значений

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)\psi(x)\,dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b g(x)\,dx \int_a^b \psi(x)\,dx \right| \le \frac{1}{4}(g_M - g_m)(\psi_M - \psi_m),$$

где $g(x)$, $\psi(x)$ — непрерывные функции на интервале $[a,b]$, а $g_M - g_m$, $\psi_M - \psi_m$ — их колебания. Получаем из условий леммы

$$\frac{1}{l^2} \int_a^b T(\sigma)\,d\sigma \int_a^b K(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{4}\omega_T\omega_K \ge \frac{1}{l^2} \int_a^b \frac{N}{\lambda}\,d\sigma \int_a^b \lambda\,d\sigma - \frac{1}{4}\omega_{N/\lambda}\omega_\lambda. \tag{13}$$

Здесь для простоты записи положено $a - b = l$, будем предполагать, что $\lambda(\sigma) \ge c_4$, где c_4 определим ниже. Оценим отдельные слагаемые в неравенстве (13)

$$\begin{gathered}
\omega_T \le D_3; \\
\omega_K = \omega_{N/T} \le \omega_N/T_m + \omega_{1/T}N_M \le \\
\le N_M/T_m + (1/T_m - 1/T_M)N_M \le N_M/T_m + D_3/(T_mT_M); \\
\omega_T\omega_K \le D_3D_1/T_m + D_3^2/(T_mT_M) = \varepsilon_1; \\
\omega_\lambda = T_M^{1/\alpha} - T_m^{1/\alpha} = \tfrac{1}{\alpha}D_3T_1^{1/\alpha - 1},
\end{gathered} \tag{14}$$

где $T_1 = T(\sigma_1)$, $\sigma_1 \in [a,b]$;

$$\omega_{N/\lambda} = (N/\lambda)_M \le N_M/\lambda_m, \quad \omega_\lambda\omega_{N/\lambda} \le \frac{1}{\alpha}D_3D_1T_M^{1/\alpha - 1}/\lambda_m = \varepsilon_2.$$

Пусть T_2 и λ_3, λ_4 — значения функций T и λ соответственно в точках s_2 и s_3, s_4 таких, что выполняются равенства

$$\int_a^b T(\sigma)\,d\sigma = T_2 l, \quad \int_a^b \lambda(\sigma)\,d\sigma = \lambda_3 l, \quad l = \int_0^d \lambda\,ds = \lambda_4 d.$$

С помощью оценок (14) получаем из (13)

$$D_2T_2 \geq \int_0^d N(\sigma(s))\,ds\,\lambda_3 - \frac{d}{4}\varepsilon_1\lambda_4 - \frac{d}{4}\varepsilon_2\lambda_4. \tag{15}$$

Дальнейшее преобразование фомулы (15) состоит в приведении значений функций T и λ к значениям этих функций в одной точке s_3

$$D_2T_2 \geq \lambda_3\Big[\int_0^d N(\sigma(s))\,ds - \varepsilon_1 d/4 - \varepsilon_2 d/4\Big] + \frac{1}{4}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)d(\lambda_3-\lambda_4) \geq$$
$$\geq \frac{\lambda_3}{2}\int_0^d N(\sigma(s))\,ds - \frac{d}{4}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\omega_\lambda \geq \frac{\lambda_3}{2}\int_0^d N(\sigma(s))\,ds - T_M^{1/\alpha-1}. \tag{16}$$

Выберем теперь c_4 так, чтобы выполнялись условия

$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)d/4 \leq \frac{1}{2}\int_0^d N(\sigma(s))\,ds \quad \text{и} \quad D_3(\varepsilon_1+\varepsilon_2)d/4\alpha \leq 1.$$

Это возможно, поскольку

$$T_M^{1/\alpha-1}/\lambda_m \leq \big[(T_m+D_3)/(\lambda_m-1)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\big]^{\frac{1}{\alpha}-1} \leq \big[((\lambda_m-1)^\alpha+D_3)/(\lambda_m-1)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\big]^{\frac{1}{\alpha}-1} \to 0, \quad \lambda_m\to\infty.$$

Продолжая преобразование формулы (16) по намеченному пути, с использованием оценок $T_2 \leq T(s_3)+D_3$ и $T_M \leq T(s_3)+D_3$ получаем требуемое неравенство (12) с $s_0 = s_3$. $\square$

Следствие. При выполнении условий леммы 4 и условия $N(\sigma) \geq h > 0$ справедлива оценка $T(\sigma_0) \leq c_5(d,h)$. Константа c_5 зависит от D_1, D_2, D_3, α, d, h, и выбирается так, чтобы выполнялось неравенство (12) с заменой N на $h/2$.

3. *Нестепенная зависимость.* Доказательство теоремы существования проведем для функции усилия $T = T(\lambda)$ при условиях 1), 2), 4) п. 2 и условии

$$\lim T(\lambda)/\lambda = \infty, \quad \lambda\to\infty. \tag{17}$$

Выберем константу $c > 1$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$(T(\lambda)-c_1)/\lambda \geq c_2 \qquad \forall\lambda \geq c, \tag{18}$$
$$T(c_3)+c_1 < T(\lambda) \quad \forall\lambda\geq c, \tag{19}$$

где c_1, c_2, c_3 — константы, фигурирующие в леммах 2, 3. Построим функцию $g(\lambda^2)\lambda$, полагая

$$g(\lambda^2)\lambda = \begin{cases} T(\lambda), & \text{если } 0\leq\lambda\leq c;\\ \overline{g}(\lambda^2)\lambda, & \text{если } \lambda \geq c.\end{cases} \tag{20}$$

При этом продолжение $-\overline{g}$ строим так, чтобы выполнялись условия 1)–4) п. 2. В силу свойств a)–c) соответствующего g оператора A и леммы 1 задача (1), (2) с физическим соотношением (20) имеет регулярное решение $x(s)$. Рассмотрим следующую альтернативу для полученного решения: либо для всех $s\in[0,1]$ $g(\lambda^2(s)) \geq c_2$, либо существует точка $s_0\in[0,1]$ такая, что $g(\lambda^2(s_0)) < c_2$.

Если реализуется первый случай, то для некоторого s по лемме 3 $\lambda(s)\leq c_3$, следовательно, $T(\lambda(s)) \leq T(c_3)$; тогда по (19) для всех s $\lambda(s)\leq c$. Поэтому решение $x(s)$ подчиняется физическому закону, определяемому функцией $T(\lambda)$.

Пусть реализуется вторая возможность альтернативы. Тогда в силу леммы 2 имеем $T(\lambda(s)) \leq T(\lambda(s_0)+c_1)$ $\forall s$. Пусть $\lambda(s)\geq c$ для некоторого s. В силу (18) выполняется неравенство $(T(\lambda(s))-c_1)/\lambda(s) \geq c_2$, его можно усилить, используя предыдущую оценку $T(\lambda(s))$,

$$(T(\lambda(s_0))+c_1-c_1)/\lambda(s_0) \geq c_2.$$

Полученное противоречие показывает, что для всех $s \in [0,1]$ $\lambda(s) \leq c$, и потому решение $x(s)$ опять оказывается целиком в зоне действия закона, определяемого функцией $T(\lambda)$. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Задача* (1), (2) *имеет решение, принадлежащее пространству* $[\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)]^2$, $p > 2$, *если* $f(s)$ *и* $p(s)$ *— непрерывные функции, а* $g(\lambda^2)\lambda$ *удовлетворяет условиям* 1), 2), 4) *п.* 2 *и условию* (17).

Замечание. Изложенное выше доказательство проходит даже при более слабом условии $\lim T(\lambda)/\lambda \geq c$, где c — константа, определяемая условиями задачи. При этом необходимо, чтобы условия 1)–4) выполнялись (исключая зависимость $g(\lambda^2)\lambda = (\lambda-1)^\beta$ при $\lambda \geq D$).

4. *Степенная зависимость с показателем, меньшим единицы.* Рассматривается физическое соотношение $(0 < \alpha < 1)$

$$T(\lambda) = [(\lambda-1)^\alpha]_+, \quad \lambda \in [0,\infty). \tag{21}$$

Чтобы обеспечить условия 1)–4) п. 2, изменим зависимость на интервале $[1, 1+\delta]$ и рассмотрим функцию

$$T_\delta(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq \lambda \leq 1; \\ (\lambda-1)^\alpha, & \text{если } \lambda \geq 1+\delta. \end{cases} \tag{22}$$

Функция T_δ продолжается на интервал $[1, 1+\delta]$ таким образом, чтобы была непрерывно-дифференцируемой и монотонной на всем интервале изменения λ.

Теорема 2. *Задача* (1), (2), (21) *имеет решение, принадлежащее пространству* $[\overset{\circ}{W}{}^1_p(0,1)]^2$, $p > 2$, *если* $f(s)$ *и* $p(s)$ *— непрерывные функции,* $p(s) \geq r > 0$ *для всех* $s \in [0,1]$.

Доказательство. Выберем константу c, исходя из условий

$$\begin{aligned} c > 1, \quad c > c_3 + 1, \quad ((\lambda-1)^\beta - c_1)/\lambda \geq c_2 \quad & \text{для всех } \lambda \geq c, \\ T_\delta(\lambda) > \max\{T_\delta(c_3) + c_1,\ T_\delta(c_4) + c_1,\ c_5(d,h) + c_1\} \quad & \text{для всех } \lambda \geq c - 1, \\ |f(s)|/\lambda \leq h/2 \quad & \text{для } \lambda \geq c/2 \text{ и всех } s \in [0,1], \end{aligned} \tag{23}$$

где c_1, c_2, c_3, c_4, $c_5(d,h)$ — константы из лемм 2, 3, 4, в лемме 4 и следствии берем фиксированное $d < 1$, $h = \frac{2}{3}r$, $D_1 = p_M + \frac{1}{3}r$, $D_2 = 4\pi$, $D_3 = c_1$.

Построим функцию $g_c(\lambda^2)\lambda$, полагая

$$g_c(\lambda^2)\lambda = \begin{cases} T_\delta(\lambda), & 0 \leq \lambda \leq c-1; \\ (\lambda-1)^\beta, & c \leq \lambda < \infty. \end{cases}$$

На интервале $\Delta = [c-1, c]$ функция $g_c(\lambda^2)\lambda$ продолжается таким образом, что выполняются условия 1)–4) п. 2.

Решение соответствующей задачи обозначим через $u_c(s)$. Рассуждая так же, как в доказательстве предыдущей теоремы, убеждаемся, что значения соответствующей решению функции $\lambda_c(s)$ лежат в интервале $(0, c)$. Рассмотрим измеримое множество $A_c = \{s : |u_c'(s)| \in \Delta\}$ и в вариационном равенстве (3), определяющем u_c, положим $v = u_c$. Получим

$$\int_{A_c} g_c(|u_c'(s)|^2)|u_c'(s)|^2\, ds \leq \int_\Omega (f, u_c)\, ds.$$

Мы воспользовались кососимметричностью оператора $L : (Pu', u) = 0$. Правая часть последнего неравенства оценивается сверху величиной $\|f\|_{L_2} c$, левая оценивается снизу величиной $(c-1)^\alpha c\mu(A_c)$. Следовательно, лебегова мера $\mu(A_c)$ множества A_c стремится к нулю с ростом c. Фиксируем c таким образом, что соответствующее множество $B = \Omega \setminus A_c$ имеет $\mu(B) > d$, где d — наперед заданное число из условий (23).

Если бы множество B (открытое) содержало интервал длины, не меньшей d, мы применили бы к этому интервалу лемму 4, где $T(s)$, $N(s)$, $K(s)$ имеют соответствующий решению физический смысл, т. е.

$$N(s) = p(s) + (f(s),\ (u_2'(s),\ -u_1'(s)))/\lambda^2(s), \quad T(s) = (\lambda(s) - 1)^\alpha. \tag{24}$$

Тодга на этом интервале существовала бы точка s_0, для которой либо $T(s_0) \le c_5(d, h)$, либо $\lambda(s_0) \le c_4$. Соответствующее решение $u_c(s)$ для всех s подчинялось бы закону (21) в силу выбора (23) константы c.

В случае отсутствия интервала длины d в множестве B выбираем точки $s_1, s_2 \in B$ такие, что $s_1 - s_2 \ge d$. Полагаем

$$T_H(s) = \begin{cases} T(s), & s \in \overline{B} \cap [s_1, s_2]; \\ (T(\gamma_1)(\gamma_2 - s) + T(\gamma_2)(s - \gamma_1))/(\gamma_2 - \gamma_1) & \end{cases}$$

для каждого составляющего открытое множество $(s_1, s_2) \setminus \overline{B}$ интервала (γ_1, γ_2). При этой линейной интерполяции сохраняется оценка ω_{T_M}. Функцию $N(s)$ на интервале $[s_1, s_2]$ сохраняем такой, какой она получается из $u_c(s)$ по формуле (24). По $T_H(s)$ определяем функцию $\lambda_H(s)$ через зависимость (24) и соответственно лемме 4 определяем функции $s_H(\sigma)$ и $K_H(s) = N/T_H$. Константы D_1, D_3 леммы 4 сохраняются такими, как если бы использовали на $[s_1, s_2]$ функции $T_c(s)$, $K_c(s)$, $N(s)$, соответствующие решению $u_c(s)$. Оценим интеграл

$$\int_a^b K_H(\sigma)\, d\sigma = \int_{s_1}^{s_2} K_H(s)\lambda_H(s)\, ds.$$

Подинтегральное выражение допускает оценку (в силу выбора c)

$$\lambda_H(s) \le \lambda_c(s); \quad K_H(s) = \frac{N(s)}{T_H(s)} \le \frac{N(s)}{T_c(s)}\,\frac{T_c(s)}{T_c(s) - 2D_3} \le 2K_c(s) \ \text{ при } \ T_c(s) \ge T_0.$$

Без ущерба для общности рассуждений можем принять предположение, что $T_0 \le T_c(s_1) \le T_c(s_2)$. В силу всего этого $\int\limits_a^b K_H(\sigma)\, d\sigma \le 4\pi$. Итак, для вновь построенных функций T, N, K лемма 4 применима с теми же константами как для функций, построенных по решению $u_c(s)$, и применяется она на интервале $[s_1, s_1 + d]$. Далее повторяем рассуждения, уже проведенные выше.

Решение задачи (1), (2), (22) при $\delta = 1/n$ обозначим через $u_n(s)$. В силу того, что все $u_n(s)$, $n = 1, 2, \ldots$, допускают равномерные по n оценки в норме пространства $V = [\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)]^2$, последовательность $\{u_n(s)\}$ слабо компактна. Пусть $u_n(s) \rightharpoonup u(s)$. Далее проводим стандартные рассуждения. Последовательность функций $g_n(|u'(s)|^2)u'(s)$ поточечно равномерно равностепенно ограничена и по построению функций g_n поточечно стремится к $g(|u'(s)|^2)u'(s)$ при $n \to \infty$; $g(\lambda^2)\lambda = (\lambda - 1)_+^\alpha$. Этих двух фактов достаточно, чтобы заключить, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (g_n(|u'(s)|^2)u',\ u_n' - u')\, ds = 0.$$

Отсюда, как обычно, пользуясь вариационным равенством (3) и монотонностью определяемого $g_n(\lambda^2)\lambda$ оператора A_n, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (g_n(|u_n'|^2)u_n' - g_n(|u'|^2)u',\ u_n' - u')\, ds = 0. \tag{25}$$

Переходя, если необходимо к подпоследовательности, из (25) имеем для почти всех $s \in [0, 1]$

$$\lim_{n\to\infty} (g_n(|u_n'|^2)u_n'(s) - g_n(|u'(s)|^2)u'(s),\ u_n'(s) - u'(s)) = 0. \tag{26}$$

Стандартными рассуждениями извлекаем из (26) факт, что $g_n(|u_n'(s)|^2)u_n'(s)$ почти всюду поточечно сходится к $g(|u'(s)|^2)u'(s)$ при $n \to \infty$. А поскольку члены последовательности поточечно равномерно и равностепенно ограничены, имеем сильную сходимость в $L^q(\Omega)$, $1/q + 1/p = 1$.

Полагая в вариационном равенстве (3) $u = u_n$, переходя к пределу по n, заключаем, что $u(s)$ является обобщенным решением задачи (1), (2), (21). $\square$

Замечание. Ограничения на функцию $p(s)$ в формулировке теоремы 2 во многом можно ослабить, применяя априорные оценки статьи [1].

Литература

1. Бадриев И.Б., Шагидуллин Р.Р. *Классические и обобщенные решения уравнений одноосного состояния мягкой оболочки.* I // Сеточ. методы решения дифференц. уравнений. – Казань, 1986. – С. 14–28.
2. Бадриев И.Б., Шагидуллин Р.Р. *Исследование одномерных уравнений статического состояния мягкой оболочки и алгоритма их решения* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 1. — С. 8–16.
3. Карчевский М.М. *Математические модели и разостные методы в нелинейной теории фильтрации и теории оболочек*: Дис. ... докт. физ.-матем. наук. Казань, 1987. – 308 с.
4. Showalter R.E. *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations* // Math. surveys and monographs AMS. – 1997. – V. 49. – 278 p.
5. Яковлев Г.Н. *Свойства решений одного класса квазилинейных уравнений второго порядка* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1974. – Т. 131. – С. 232–242.

Казанский государственный университет

Поступила 01.02.1999