Известия вузов. Математика
2008, № 7, с. 73–78

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Краткое сообщение

Н.А. КУЗЬМИНА

ДВОЙСТВЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАРТАНА

Аннотация. Работа посвящена изучению внутренней геометрии распределения Картана $\mathcal{M}$ в проективном пространстве P_{2m} с существенным привлечением ассоциированного внутренним образом с $\mathcal{M}$ гиперполосного распределения $\mathcal{H}$ в P_{2m}. С привлечением теории двойственности в 4-й дифференциальной окрестности внутренним инвариантным образом строится ряд нормализаций распределения Картана $\mathcal{M}$. Рассматриваются двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемые двойственной нормализацией распределения Картана.

Ключевые слова: распределение Картана, двойственность, двойственная нормализация, аффинная связность.

УДК: 514.756

Abstract. The paper is devoted to the study of intrinsic geometry of a Cartan distribution $\mathcal{M}$ in projective space P_{2m}. We essentially use the hyperband distribution $\mathcal{H}$ in P_{2m} associated with $\mathcal{M}$. Using the duality theory, we construct, in the 4th differential neighborhood, a series of normalizations of $\mathcal{M}$. We also consider dual affine connections $\overset{1}{\nabla}$ and $\overset{2}{\nabla}$ induced by the dual normalization of the Cartan distribution $\mathcal{M}$.

Keywords: Cartan distribution, dual normalization, affine connection.

В данной работе исследования проводятся с использованием метода внешних дифференциальных форм Э. Картана [1], метода продолжений и охватов Г.Ф. Лаптева [2] и метода нормализации А.П. Нордена [3].

Во всей работе индексы принимают следующие значения:

$$\overline{J}, \overline{K}, \overline{L} = \overline{0, 2m}; \quad J, K, L = \overline{1, 2m}; \quad i, j, k, l, p, s, t = \overline{1, m},$$
$$\alpha = \overline{m+1, 2m}; \quad u, v, w, z = \overline{m+1, 2m-1}.$$

В проективном пространстве P_{2m}, отнесенном к подвижному реперу $R = \{A_{\overline{J}}\}$, рассмотрим распределение касательных элементов (A_0, Π_m) (центр A_0 принадлежит соответствующей ему плоскости Π_m) [4]. В репере нулевого порядка система дифференциальных уравнений распределения m-мерных линейных элементов имеет вид [4]

$$\omega_i^\alpha = \Lambda_{iL}^\alpha \omega_0^L.$$

Поступила 13.07.2007

Продолжая уравнения этой системы, имеем

$$d\Lambda^{\alpha}_{ik} + \Lambda^{\beta}_{ik}\omega^{\alpha}_{\beta} - \Lambda^{\alpha}_{is}\omega^{s}_{k} - \Lambda^{\alpha}\omega^{s}_{i} + \Lambda^{\alpha}_{ik}\omega^{0}_{0} = \Lambda^{\alpha}_{ikK}\omega^{K}_{0},$$
$$d\Lambda^{\alpha}_{i\beta} + \Lambda^{\gamma}_{i\beta}\omega^{\alpha}_{\gamma} - \Lambda^{\alpha}_{i\gamma}\omega^{\gamma}_{\beta} - \Lambda^{\alpha}_{k\beta}\omega^{k}_{i} + \Lambda^{\alpha}_{i\beta}\omega^{0}_{0} - \Lambda^{\alpha}_{ik}\omega^{k}_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}\omega^{0}_{i} = \Lambda^{\alpha}_{i\beta K}\omega^{K}_{0}.$$

Совокупность функций $\{\Lambda^{\alpha}_{ik}\}$ есть тензор первого порядка, вообще говоря, не симметричный по индексам i, k. Компоненты тензора $a^{\alpha}_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\Lambda^{\alpha}_{ik} + \Lambda^{\alpha}_{ki})$ первого порядка, симметричного по индексам i, k, удовлетворяют уравнениям

$$da^{\alpha}_{ik} + a^{\beta}_{ik}\omega^{\alpha}_{\beta} - a^{\alpha}_{is}\omega^{s}_{k} - a^{\alpha}_{sk}\omega^{s}_{i} + a^{\alpha}_{ik}\omega^{0}_{0} = a^{\alpha}_{ikK}\omega^{K}_{0}.$$

Допустим, что 1) число линейно независимых квадратичных асимптотических форм $\Phi^{\alpha} = a^{\alpha}_{ik}\omega^{i}_{0}\omega^{k}_{0}$ на распределении равно m; 2) распределение M несет m-ткань сопряженных линий, т. е. направления касательных к линиям ткани $\Sigma \subset M$ попарно сопряжены относительно любого конуса направлений $\Phi^{\alpha} = 0$.

Такое распределение, по аналогии с поверхностью Картана [5], [6], назовем *распределением Картана M*.

В данной работе построен тензор второго порядка b_{α}, который удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$db_{\alpha} - b_{\gamma}\omega^{\gamma}_{\alpha} + b_{\alpha}\omega^{0}_{0} = b_{\alpha K}\omega^{K}_{0}.$$

Инвариантная гиперплоскость Π_{2m-1}, уравнение которой имеет вид $b_{\alpha}x^{\alpha} = 0$, содержит текущий элемент $\Pi_m(A_0)$ распределения Картана $\mathcal{M}$. Справедлива

Теорема 1. *Распределение Картана $\mathcal{M}$ в P_{2m} во второй дифференциальной окрестности порождает инвариантно присоединенное к нему гиперполосное распределение* ([7], с. 104), *для которого исходное распределение является базисным.*

Такое гиперполосное распределение назовем *гиперполосным распределением Картана $\mathcal{H}$, ассоциированным с распределением M*. Согласно работам [7], [8] гиперполосное распределение называют регулярным, если в каждом его центре текущий элемент $\Pi_m(A_0)$ базисного распределения и характеристика $\Pi_{m-1}(A_0)$ текущего элемента $\Pi_{2m-1}(A_0)$ оснащающего распределения имеют лишь одну общую точку — центр A_0 распределения.

В репере третьего порядка $\widetilde{R} = \{B_{\overline{K}}\}$, где $B_0 \equiv A_0$, $B_i \equiv A_i$, $B_u = A_u - \frac{b_u}{b_{2m}}A_{2m}$, $B_{2m} \equiv A_{2m}$, дифференциальные уравнения регулярного гиперполосного распределения Картана $\mathcal{H}$ в P_{2m} имеют вид

$$\Omega^{2m}_{i} = \mathrm{M}^{2m}_{iK}\Omega^{K}_{0}, \quad \Omega^{u}_{i} = \mathrm{M}^{u}_{iK}\Omega^{K}_{0}, \quad \Omega^{2m}_{\nu} = \mathrm{A}^{2m}_{\nu\alpha}\Omega^{\alpha}_{0}, \quad \Omega^{i}_{\nu} = \mathrm{N}^{i}_{\nu K}\Omega^{K}_{0}. \tag{1}$$

Доказаны следующие две теоремы.

Теорема 2. *Ассоциированное гиперполосное распределение Картана регулярно тогда и только тогда, когда тензор второго порядка $\mathrm{M}^{2m}_{ik} = \frac{1}{b_{2m}}b_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{ik}$ невырожден.*

Теорема 3. *Ассоциированное регулярное гиперполосное распределение Картана $\mathcal{H}$ в P_{2m} в 4-й дифференциальной окрестности индуцирует*

1) *проективное пространство $\overline{\mathrm{P}}_{2m}$, двойственное* ([7], с. 139) *исходному пространству P_{2m} относительно инволютивного преобразования $J : \Omega^{\overline{K}}_{\overline{J}} \to \overline{\Omega}^{\overline{K}}_{\overline{J}}$ структурных форм Пфаффа*;

2) *многообразие $\overline{\mathcal{H}}$ в $\overline{\mathrm{P}}_{2m}$, двойственное исходному $\mathcal{H}$, причем его дифференциальные уравнения в тангенциальном репере $\left\{\xi_{\overline{J}}\right\}$ имеют вид, аналогичный уравнениям* (1) *распределения $\mathcal{H}$.*

Таким образом, двойственность ассоциированного гиперполосного распределения $\mathcal{H}$ в P_{2m} влечет за собой двойственность геометрии исходного распределения Картана $\mathcal{M}$ в P_{2m}, которое является базисным для $\mathcal{H}$.

Под двойственной нормализацией ([7], с. 119) ассоциированного регулярного гиперполосного распределения Картана $\mathcal{H}$ понимают нормализацию его базисного распределения $\mathcal{M}$ в смысле А.П. Нордена ([3], с. 197), причем в каждом центре B_0 нормаль первого рода N_m содержит характеристику $\Pi_{m-1} \equiv [B_0 B_u]$ текущего элемента оснащающего распределения гиперплоскостных элементов.

Согласно работе [7] требование инвариантности полей нормалей первого $N_m \equiv [B_0, B_{2m} + \nu^i_{2m} B_i + a^u_{2m} B_u, B_u]$ и второго $N_{m-1} \equiv [B_i + \nu^0_i B_0]$ родов накладывает на функции ν^i_{2m}, ν^0_i следующие условия:

$$d\nu^i_{2m} + \nu^i_{2m}(\Omega^i_i - \Omega^{2m}_{2m}) + \Omega^i_{2m} = \nu^i_{2m,K}\Omega^K_0, \tag{2}$$

$$d\nu^0_i + \nu^0_i(\Omega^0_0 - \Omega^i_i) + \Omega^0_i = \nu^0_{iK}\Omega^K_0. \tag{3}$$

Пусть ассоциированное распределение $\mathcal{H}$ в P_{2m} (следовательно, и исходное распределение Картана $\mathcal{M}$) нормализовано полями квазитензоров ν^i_{2m}, ν^0_i (см. (2), (3)). Функции

$$\overline{\nu}^i_{2m} = -\mathrm{M}^{ik}_{2m}\nu^0_k, \quad \overline{\nu}^0_i = \mathrm{M}^{2m}_{ki}\nu^k_{2m} \tag{4}$$

удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\overline{\nu}^i_{2m} + \overline{\nu}^i_{2m}(\overline{\Omega}^i_i - \overline{\Omega}^{2m}_{2m}) + \overline{\Omega}^i_{2m} = \overline{\nu}^i_{2m,K}\overline{\Omega}^K_0, \tag{5}$$

$$d\overline{\nu}^0_i + \overline{\nu}^0_i(\overline{\Omega}^0_0 - \overline{\Omega}^i_i) + \overline{\Omega}^0_i = \overline{\nu}^0_{iK}\overline{\Omega}^K_0. \tag{6}$$

Из уравнений (2), (3), (5), (6) следует

Теорема 4. *Нормализация одного из регулярных распределений Картана $\mathcal{H}$ в P_{2m} и $\overline{\mathcal{H}}$ в $\overline{P}_{2m}$ равносильна нормализации другого*; *при этом компоненты полей оснащающих объектов* $\{\nu^i_{2m}, \nu^0_i\}$, $\{\overline{\nu}^i_{2m}, \overline{\nu}^0_i\}$ *связаны соотношениями* (4).

С использованием теории двойственности ассоциированного распределения $\mathcal{H}$ в P_{2m} построены нормализации Михэйлеску, Вильчинского и Фубини на исходном распределении Картана $\mathcal{M}$. Имеют место два утверждения.

Теорема 5. *Двойственные поля квазитензоров*

$$\begin{aligned} M^i_{2m} &= -\frac{1}{2(m+2)}\mathrm{M}^{il}_{2m}\mathrm{M}^{kk}_{2m}(\mathrm{M}^{2m}_{lkk} + 2\mathrm{M}^{2m}_{lk}(\mathrm{M}^{2m}_{k,2m} + \mathrm{M}^{2m}_{kv}a^v_{2m}) + \mathrm{M}^{2m}_{kk}(\mathrm{M}^{2m}_{l,2m} + \mathrm{M}^{2m}_{lv}a^v_{2m})), \\ M^0_i &= \frac{1}{2(m+2)}\mathrm{M}^{kk}_{2m}\mathrm{M}^{2m}_{ikk} - \frac{1}{2}(\mathrm{M}^{2m}_{i,2m} - \mathrm{M}^{2m}_{iv}\mathrm{A}^{vu}_{2m}\mathrm{A}^{2m}_{u,2m} + \mathrm{M}^{2m}_{iv}\mathrm{A}^{vu}_{2m}a^0_u) \end{aligned} \tag{7}$$

в четвертой дифференциальной окрестности определяют инвариантную нормализацию Михэйлеску распределения Картана $\mathcal{M}$.

Теорема 6. *В случае ассоциированного гиперполосного распределения Картана $\mathcal{H}$ с полем симметричного тензора M^{2m}_{ik} в четвертой дифференциальной окрестности следующие характерные поля нормалей ν^i_{2m}, ν^0_i внутренним образом определяют инвариантную нормализацию исходного распределения Картана $\mathcal{M}$*:

а) *поля нормалей Вильчинского*

$$W^i_{2m} = B^{ik}W_{2m,k}, \quad W^0_i = -\mathrm{M}^{2m}_{il}\mathrm{B}^{lk}W_{2m,k} + \frac{b_i}{m+2}; \tag{8}$$

б) *поля нормалей Фубини*

$$F^i_{2m} = \frac{1}{2}\mathrm{M}^{ik}_{2m}\left(C_k - \frac{b_k}{m+2}\right), \quad F^0_i = \frac{1}{2}\left(C_i + \frac{b_i}{m+2}\right). \tag{9}$$

Согласно работе [7] гиперквадрику Q^2_{2m-1}, касающуюся гиперплоскости Π_{2m-1} оснащающего распределения в каждом его центре B_0, назовем *соприкасающейся* с ассоциированным регулярным гиперполосным распределением Картана $\mathcal{H}$ в P_{2m} (следовательно, с исходным распределением $\mathcal{M}$ в P_{2m}), если с любой кривой l, принадлежащей распределению Картана $\mathcal{M}$, она имеет касание второго порядка.

Кривая, принадлежащая [4] распределению Картана, задается уравнениями

$$l : \begin{cases} \Omega^\alpha_0 = 0; \\ \Omega^i_0 = \mu^i\theta, \quad D\theta = \theta \wedge \theta^0_0. \end{cases} \tag{10}$$

Доказано, что распределение $\mathcal{M}$ в P_{2m} в четвертой дифференциальной окрестности порождает поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик Q^2_{2m-1}, уравнения которых в репере третьего порядка $\widetilde{R} = \left\{B_{\overline{K}}\right\}$ имеют вид

$$g^{2m}_{ik}x^ix^k + \frac{2b_i}{m+2}x^ix^{2m} + \mathrm{B}^{2m}_{uv}x^ux^v + 2\widetilde{b}_vx^vx^{2m} + \mathrm{S}_{2m}\left(x^{2m}\right)^2 = 2x^0x^{2m}, \tag{11}$$

причем плоскости Π_m и Π_{m-1} в каждом центре B_0 полярно сопряжены (взаимны) относительно соответствующей локальной гиперквадрики (11).

Относительно этого поля гиперквадрик в случае симметрии тензора M^{2m}_{ik} взаимны

1) двойственные поля нормалей Вильчинского $(-W^i_{2m})$ и W^0_i (см. (8));

2) двойственные поля нормалей Фубини F^i_{2m} и F^0_i (см. (9));

3) двойственные поля нормалей Михэйлеску M^i_{2m}, M^0_i (см. (7)), если ассоциированное гиперполосное распределение $\mathcal{H}$ является взаимным [7] ($\mathrm{M}^{2m}_{iv} = 0$).

Доказано, что обращение в нуль тензора Дарбу

$$D^{2m}_{iks} \stackrel{\text{def}}{=} (m+2)G^{2m}_{iks} - g^{2m}_{(ik}b_{s)}$$

есть условие соприкосновения 3-го порядка гиперквадрик поля (11) с исходным распределением Картана $\mathcal{M}$.

Пусть ассоциированное распределение $\mathcal{H}$ в P_{2m} (следовательно, и исходное распределение Картана $\mathcal{M}$) нормализовано полями квазитензоров ν^i_{2m}, ν^0_i.

Возьмем систему форм Пфаффа $\left\{\Omega^J_0,\ \overset{1}{\Theta}{}^i_0,\ \overset{1}{\Theta}{}^i_k\right\}$, где

$$\begin{aligned} &\overset{1}{\Theta}{}^i_0 = \Omega^i_0 - \nu^i_{2m}\Omega^{2m}_0, \\ &\overset{1}{\Theta}{}^i_k = \Omega^i_k - \nu^i_{2m}\Omega^{2m}_k - \delta^i_k\left(\Omega^0_0 - \overset{1}{\Theta}{}^s_0\nu^0_s\right) - \mathrm{N}^i_{vk}\Omega^v_0 - \left(\nu^i_{2m,k} - M^{2m}_{sk}\nu^s_{2m}\nu^i_{2m}\right)\Omega^{2m}_0 + \nu^0_k\overset{1}{\Theta}{}^i_0, \end{aligned} \tag{12}$$

которая удовлетворяет структурным уравнениям Картана–Лаптева [2]:

$$\begin{aligned} &D\Omega^J_0 = \Omega^K_0 \wedge \left(\Omega^J_K - \delta^J_K\Omega^0_0\right), \\ &D\overset{1}{\Theta}{}^i_0 = \overset{1}{\Theta}{}^k_0 \wedge \overset{1}{\Theta}{}^i_k + \frac{1}{2}\overset{1}{r}{}^i_{PQ}\Omega^P_0 \wedge \Omega^Q_0, \\ &D\overset{1}{\Theta}{}^i_k = \overset{1}{\Theta}{}^l_k \wedge \overset{1}{\Theta}{}^i_l + \frac{1}{2}\overset{1}{r}{}^i_{kPQ}\Omega^P_0 \wedge \Omega^Q_0. \end{aligned} \tag{13}$$

Из соотношений (13) следует, что система форм (12) определяет аффинную связность $\overset{1}{\nabla}$; соответствующее пространство аффинной связности обозначим через $\overset{1}{\mathrm{A}}_{2m,m}$. В структурных уравнениях (13) каждая из систем функций $\overset{1}{r}{}^i_{PQ}$ и $\overset{1}{r}{}^i_{kPQ}$ образует соответственно тензор кручения и тензор кривизны пространства $\overset{1}{\mathrm{A}}_{2m,m}$.

В силу двойственности нормализованного ассоциированного регулярного гиперполосного распределения Картана $\mathcal{H}$ система форм $\{\overline{\Omega}{}^J_0, \overset{2}{\Theta}{}^i_0, \overset{2}{\Theta}{}^i_k\}$ вида (12), где входящие в них формы Ω и функции пишутся с черточкой сверху, определяет вторую аффинную связность $\overset{2}{\nabla}$; соответствующее пространство аффинной связности обозначим через $\overset{2}{\mathrm{A}}_{2m,m}$.

Заметим, что пространства $\overset{1}{\mathrm{A}}_{2m,m}$ и $\overset{2}{\mathrm{A}}_{2m,m}$ являются двойственными по отношению друг к другу относительно инволютивного преобразования J их структурных форм.

Формы $\overset{2}{\Theta}{}^i_0$, $\overset{2}{\Theta}{}^i_k$ имеют следующее строение:

$$\begin{aligned}
\overset{2}{\Theta}{}^i_0 &= \overset{1}{\Theta}{}^i_0 + \mathrm{M}^{2m}_{kv}\mathrm{M}^{ik}_{2m}\Omega^v_0 + \left(\nu^i_{2m} + \mathrm{M}^{2m}_{k,2m}\mathrm{M}^{ik}_{2m} + \nu^0_k\mathrm{M}^{ik}_{2m}\right)\Omega^{2m}_0,\\
\overset{2}{\Theta}{}^i_k &= \overset{1}{\Theta}{}^i_k + \nu^i_{2m}\Omega^{2m}_k + \mathrm{M}^{it}_{2m}\mathrm{M}^{2m}_{tkK}\Omega^K_0 + \\
&\quad + \left(\delta^i_k\mathrm{M}^{2m}_{st}\nu^s_{2m} - \mathrm{M}^{il}_{2m}\mathrm{M}^{2m}_{tk}\nu^0_l - \delta^i_k\nu^0_t - \delta^i_t\nu^0_k\right)\Omega^t_0 + \\
&\quad + \left(\mathrm{N}^i_{vk} + \delta^i_k\mathrm{M}^{2m}_{sv}\nu^s_{2m} + \mathrm{A}^{2m}_{uv}\mathrm{M}^{il}_{2m}\mathrm{M}^u_{lk} + \mathrm{M}^{2m}_{lk}\nu^l_{2m}\mathrm{M}^{2m}_{sv}\mathrm{M}^{is}_{2m}\right)\Omega^v_0 + \\
&\quad + (\nu^i_{2m,k} - \mathrm{M}^{2m}_{lk}\nu^l_{2m}\nu^i_{2m} + \nu^0_k\nu^i_{2m} + \delta^i_k\mathrm{M}^{2m}_{s,2m}\nu^s_{2m} + 2\delta^i_k\nu^0_s\nu^s_{2m} + \mathrm{A}^{2m}_{u,2m}\mathrm{M}^{il}_{2m}\mathrm{M}^u_{lk} + \\
&\quad + \mathrm{M}^{il}_{2m}\nu^0_{lk} - \mathrm{M}^{il}_{2m}\nu^0_l\nu^0_k + \mathrm{M}^{2m}_{lk}\nu^l_{2m}\nu^0_s\mathrm{M}^{is}_{2m} + M^{2m}_{lk}\nu^l_{2m}\mathrm{M}^{2m}_{s,2m}\mathrm{M}^{is}_{2m})\Omega^{2m}_0.
\end{aligned}$$

Справедлива

Теорема 7. *На нормализованном распределении Картана $\mathcal{M}$ в P_{2m} индуцируются две двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, причем эти связности обобщенно сопряжены относительно поля тензора M^{2m}_{ik} вдоль любой кривой* (10), *принадлежащей распределению Картана. Пространство аффинной связности $\overset{1}{\mathrm{A}}_{2m,m}$ ($\overset{2}{\mathrm{A}}_{2m,m}$) имеет нулевое кручение тогда и только тогда, когда распределение нормалей первого рода $N_m(\nu)$ (второго рода $N_{m-1}(\nu)$) является голономным.*

Аналитическое условие параллельного перенесения допустимого направления B_0M, где $M = \lambda^i(\nu^0_i B_0 + B_i)$, в аффинных связностях $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ вдоль кривой (10), принадлежащей распределению Картана $\mathcal{M}$, записывается в виде

$$d\lambda^i + \lambda^k\overset{1}{\Theta}{}^i_k = \overset{1}{\theta}\lambda^i \ (\mathrm{mod} l), \tag{14а}$$

$$d\lambda^i + \lambda^k\overset{2}{\Theta}{}^i_k = \overset{2}{\theta}\lambda^i \ (\mathrm{mod} l). \tag{14б}$$

Аналогично нормализованной гиперповерхности [3] справедливы следующие утверждения:

1) условие (14а) эквивалентно тому, что при смещении центра B_0 вдоль кривой (10) смещение нормальной точки направления B_0M принадлежит плоскости $[MN_m(B_0)]$;

2) условие (14б) эквивалентно тому, что гиперплоскость η, нормальная направлению B_0M, "вращается" вокруг инцидентной ей $(m-2)$-мерной плоскости, принадлежащей нормали второго рода $N_{m-1}(\nu)$.

Найдено условие совпадения связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ пространств $\overset{1}{\mathrm{A}}_{2m,m}$ и $\overset{2}{\mathrm{A}}_{2m,m}$. Справедлива

Теорема 8. *На распределении Картана $\mathcal{M}$ в P_{2m} с полем симметричного тензора M^{2m}_{ik} аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ совпадают тогда и только тогда, когда ассоциированное распределение $\mathcal{H}$ является взаимным, нормализация $\mathcal{M}$ есть нормализация Михэйлеску и соприкасающиеся гиперквадрики поля* (11) *имеют касание* 3*-го порядка с распределением $\mathcal{M}$.*

Литература

[1] Фиников С.П. *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.

[2] Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований* // Тр. Московск. матем. о-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.

[3] Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.

[4] Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. *Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.* I // Тр. геом. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР. – 1971. – Т. 3. – С. 49–94.

[5] Cartan E. *Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non-euclidien* // Bull. Soc. Math. France. – 1919. – V. 47. – P. 125–160.

[6] Cartan E. *Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non-euclidien* // Bull. Soc. Math. France. – 1920 – V. 48. – P. 132-208.

[7] Столяров А.В. *Двойственная теория оснащенных многообразий.* – Чебоксары: Чувашск. гос. пед. ин-т, 1994. – 290 с.

[8] Вагнер В.В. *Теория поля локальных гиперполос* // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. – 1950. – Вып. 8. – С. 197–272.

Н.А. Кузьмина

аспирант, кафедра геометрии,
Чувашский государственный педагогический университет,
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, д. 38,

e-mail: caf_geom_chgpu@mail.ru

N.A. Kuz'mina

postgraduate, Chair of geometry,
Chuvash State pedagogical University,
38 K. Marksa str., Cheboksary, 428000 Russia,

e-mail: caf_geom_chgpu@mail.ru