Известия вузов. Математика
2008, № 7, с. 57–72

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

В.Б. ЧЕРЕПЕННИКОВ, П.Г. ЕРМОЛАЕВА

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ИССЛЕДОВАНИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ КВАЗИРЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. В работе рассматривается начальная задача с начальной точкой для скалярного линейного неоднородного дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа. При полиномиальных коэффициентах уравнения в исследование вводится формальное решение в виде полинома некоторой степени ("полиномиальное квазирешение"), при подстановке которого в исходное уравнение появляется невязка. Работа посвящена нахождению и анализу на основе численных экспериментов полиномиальных квазирешений решений изучаемой начальной задачи.

Ключевые слова: линейные дифференциально-разностные уравнения, метод полиномиальных квазирешений, численный эксперимент.

УДК: 517.929

Abstract. In this paper we consider the initial problem with an initial point for a scalar linear inhomogeneous differential-difference equation of neutral type. For polynomial coefficients in the equation we introduce a formal solution, representing a polynomial of a certain degree ("a polynomial quasisolution"); substituting it in the initial equation, one obtains a residual. The work is dedicated to the definition and the analysis (on the base of numerical experiments) of polynomial quasisolutions for the solutions of the initial problem under consideration.

Keywords: linear differential-difference equations, method of polynomial quasisolutions, numerical experiment.

1. Введение

Изучение математическими методами какого-либо явления во многих случаях сводится к исследованию дифференциальных уравнений различной структуры. Класс функционально-дифференциальных уравнений позволяет учитывать влияние предыдущего состояния на решения изучаемого явления. В этом классе наиболее исследованными являются дифференциально-разностные уравнения (ДРУ), когда отклонение аргумента постоянно ([1]–[3]).

В данной работе рассматривается скалярное неоднородное ДРУ нейтрального типа

$$\frac{dx(t)}{dt} + p(t)\frac{dx(t-1)}{dt} = a(t)x(t-1) + f(t), \quad t \in J = (-\infty, \infty). \tag{1.1}$$

Поступила 25.04.2006

Пусть в $t = 0$ задано начальное условие $x(0) = x_0$. Ставится задача исследования таких аналитических на J решений, которые при подстановке в исходное уравнение (1.1) обращают его в тождество.

Известно, что решение начальной задачи для уравнения (1.1) в том случае, когда на начальном множестве $t \in E_{t_0} = [t_0 - 1, t_0]$ задается начальная функция $\varphi(t)$, в точках кратных запаздыванию имеет разрывы производных. Однако при исследовании ряда прикладных задач, описываемых уравнением (1.1), наблюдаемая структура решения обладает достаточной гладкостью. Поэтому исследование начальной задачи с начальной точкой для уравнения (1.1) представляет собой актуальную задачу, имеющую важное прикладное значение. Авторам не известны условия разрешимости данной задачи в классе аналитических функций, если коэффициенты уравнения (1.1) переменные.

В том случае, когда коэффициенты уравнения представляются полиномами, в исследование вводится формальное решение в виде полинома некоторой степени N. Тогда термин "полиномиальное квазирешение" (ПК-решение) понимается в том смысле, что при подстановки его в исходную задачу появляется невязка $\Delta(t) = O(t^N)$.

Данная работа посвящена нахождению и анализу на основе численных экспериментов ПК-решений начальной задачи с начальной точкой для исследуемого уравнения.

2. Постановка задачи

Рассмотрим начальную задачу с начальной точкой для следующего ДРУ:

$$\dot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t-1) = a(t)x(t-1) + \overline{f}(t), \quad t \in J = (-\infty, \infty), \quad x(0) = x_0. \tag{2.1}$$

Здесь

$$a(t) = \sum_{n=0}^{G} a_n t^n, \quad p(t) = \sum_{n=0}^{G} p_n t^n, \quad \overline{f}(t) = \sum_{n=0}^{F} \overline{f}_n t^n, \quad F \geq G. \tag{2.2}$$

Введем полином

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} x_n t^n. \tag{2.3}$$

Для $x(t)$ имеем

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=0}^{N} n x_n t^{n-1}, \quad x(t-1) = \sum_{n=0}^{N} x_n (t-1)^n = \sum_{n=0}^{N} \widetilde{x}_n t^n, \tag{2.4}$$

где

$$\widetilde{x}_n = x_n + \sum_{i=n+1}^{N} \overline{C}^i_{n+i} x_{n+i}, \quad n = \overline{0, N-1}; \quad \widetilde{x}_N = x_N; \quad \overline{C}^m_n = (-1)^m \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{2.5}$$

При подстановке формул (2.2)–(2.4) в (2.1) и сравнения степеней при одинаковых степенях t следует: для того чтобы последний коэффициент x_N в (2.3) определялся последним, заданным формулой (2.2) коэффициентом $\overline{f}_F$, необходимо, чтобы $N = F + 1$.

Определим функцию $f(t)$ в виде

$$f(t) = \sum_{n=0}^{F+G+1} f_n t^n, \tag{2.6}$$

где $f_i = \overline{f_i}$, $i = \overline{0, F}$, f_{F+i}, $i = \overline{1, G+1}$ — некоторые неизвестные коэффициенты.

Определение 2.1. Задачу

$$\dot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t-1) = a(t)x(t-1) + f(t), \quad t \in J, \quad x(0) = x_0, \tag{2.7}$$

будем называть *согласованной* по размерности полиномов относительно задачи (2.1).

Подставляя (2.2)–(2.4) и (2.6) в (2.7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, имеем

$$nx_n = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_{n-1-i}\widetilde{x}_i - \sum\limits_{i=1}^{n} ip_{n-i}\widetilde{x}_i + f_{n-1}, \quad 1 \le n \le G+1; \\ \sum\limits_{i=0}^{G} a_{G-i}\widetilde{x}_{n-(G+1)+i} - \sum\limits_{i=1}^{G+1} [n-(G+1)+i]p_{G+1-i}\widetilde{x}_{n-(G+1)+i} + f_{n-1}, \\ \qquad\qquad G+2 \le n \le N \ (N = F+1), \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} 0 = &\sum_{i=0}^{G-[n-(N+1)]} a_{G-i}\widetilde{x}_{n-(G+1)+i} - \\ &- \sum_{i=1}^{G-[n-(N+1)]} [n-(G+1)+i]p_{G+1-i}\widetilde{x}_{n-(G+1)+i} + f_{n-1}, \quad N+1 \le n \le G+N, \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$0 = a_G\widetilde{x}_N + f_{G+N}, \quad n = G+N+1.$$

Замечание 2.1. Поскольку степень полинома $x(t)$ равна $F+1$, это позволяет выбрать степень полинома $\overline{f}(t)$ в (2.6) в зависимости от желаемой степени полинома $x(t)$, добавляя к $\overline{f}(t)$ соответствующее число нулевых членов.

Определение 2.2. Если существует полином степени $N = F+1$,

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} x_n t^n, \quad t \in J,$$

тождественно удовлетворяющий задаче (2.7), то этот полином будем называть *полиномиальным квазирешением* задачи (2.1).

Исследуем вопросы, связанные с условиями существования ПК-решений и способами их нахождения.

3. Алгоритм вычисления ПК-решений

Процесс нахождения ПК-решений исходного уравнения (1.1) связан с определением неизвестных коэффициентов x_n. Как следует из формулы (2.5), каждый коэффициент $\widetilde{x}_n$ зависит в свою очередь от коэффициентов $x_n, x_{n+1}, \ldots, x_N$. Если бы в уравнении (1.1) запаздывание отсутствовало, то $x_n = \widetilde{x}_n$ и формула (2.8) трансформировалась бы в рекуррентную формулу, позволяющую последовательно вычислить коэффициенты x_i, $i = \overline{1, \infty}$, порождающие согласно теореме Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений единственное решение задачи (1.1) в виде степенного ряда. В случае наличия запаздывания анализ формулы (2.8) становится в общем случае затруднительным. Поэтому рассмотрим процесс нахождения ПК-решений для случая, когда в (1.1) коэффициенты $a(t)$ и $p(t)$ — линейные функции. Перепишем в этом случае задачу (2.7) в виде

$$\dot{x}(t) + (p_0 + p_1 t)\dot{x}(t-1) = (a_0 + a_1 t)x(t-1) + f(t), \quad t \in J, \quad x(0) = x_0. \tag{3.1}$$

Здесь функция $f(t)$ согласно (2.6) определится формулой

$$f(t) = \sum_{n=0}^{F} f_n t^n + \Delta(t), \tag{3.2}$$

где согласно (2.6) $f_i = \overline{f_i}$, $i = \overline{0, F}$, — известные коэффициенты, а невязка $\Delta(t) = f_N t^N + f_{N+1} t^{N+1}$, f_N и f_{N+1} — неизвестные коэффициенты.

Будем искать ПК-решение в виде

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} x_n t^n, \quad t \in J. \tag{3.3}$$

Для решения поставленной задачи выразим неизвестные коэффициенты x_n ПК-решения через неизвестные коэффициенты f_N и f_{N+1} полинома (3.2) и укажем условия, при которых последние могут быть определены.

Подставляя (3.2) и (3.3) в (3.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, имеем

$$\begin{aligned} nx_n &= \overline{a}_{n-1} - \overline{p}_{n-1} + f_{n-1}, \quad 1 \le n \le F+1, \\ 0 &= \overline{a}_{F+1} - \overline{p}_{F+1} + f_{F+1}, \quad n = F+2, \\ 0 &= \overline{a}_{F+2} + f_{F+2}, \quad n = F+3. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь

$$\overline{a}_n = \begin{cases} a_0 \widetilde{x}_0, & n = 0; \\ a_0 \widetilde{x}_n + a_1 \widetilde{x}_{n-1}, & 1 \le n \le N; \\ a_1 \widetilde{x}_N, & n = N+1, \end{cases}$$

$$\overline{p}_n = \begin{cases} p_0 \widetilde{x}_1, & n = 0; \\ (n+1) p_0 \widetilde{x}(n+1) + n p_1 \widetilde{x}_n, & 1 \le n \le N-1; \\ p_1 N \widetilde{x}_N, & n = N. \end{cases}$$

С учетом полученных соотношений перепишем формулу (3.4) для $1 \le n \le N$ в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 \widetilde{x}_0 - p_0 \widetilde{x}_1 + f_0, \\ 2x_2 &= a_0 \widetilde{x}_1 + a_1 \widetilde{x}_0 - (2p_0 \widetilde{x}_2 + p_1 \widetilde{x}_1) + f_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ nx_n &= a_1 \widetilde{x}_{n-2} + [a_0 - (n-1)p_1] \widetilde{x}_{n-1} - p_0 n \widetilde{x}_n + f_{n-1}, \quad 3 \le n \le N, \\ 0 &= a_1 \widetilde{x}_{N-1} + (a_0 - N p_1) \widetilde{x}_N + f_N, \quad n = N+1, \\ 0 &= a_1 \widetilde{x}_N + f_{N+1}, \quad n = N+2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Подставляя сюда значения $\widetilde{x}_n$, согласно (2.5) для $n = N+2-l$, $l = \overline{0, N+1}$, получаем

$$\begin{aligned} &a_{N,N} x_N + f_{N+1} = 0, \\ &a_{N-1,N-1} x_{N-1} + a_{N-1,N} x_N + f_N = 0, \\ &a_{N-2,N-2} x_{N-2} + a_{N-2,N-1} x_{N-1} + a_{N-2,N} x_N + f_{N-1} = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{N-s,N-s} x_{N-s} + a_{N-s,N-s+1} x_{N-s+1} + \dots + a_{N-s,N} x_N + f_{N-s-1} = 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где

$$
\begin{aligned}
&a_{N,N} = a_1;\\
&a_{N-1,N-1} = a_1,\\
&a_{N-1,N} = a_1\overline{C}_N^1 + [a_0 - Np_1];\\
&a_{N-2,N-2} = a_1,\\
&a_{N-2,N-1} = a_1\overline{C}_{N-1}^1 + [a_0 - (N-1)p_1],\\
&a_{N-2,N} = a_1\overline{C}_N^2 + [a_0 - (N-1)p_1]\overline{C}_N^1 - N(p_0+1);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{N-s,N-s} = a_1,\\
&a_{N-s,N-s+1} = a_1\overline{C}_{N-s+1}^1 + [a_0 - (N-s+1)p_1],\\
&a_{N-s,N-s+2} = a_1\overline{C}_{N-s+2}^2 + [a_0 - (N-s+1)p_1]\overline{C}_{N-s+2}^1 - (N-s+2)(p_0+1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{N-s,N-s+k} = a_1\overline{C}_{N-s+k}^k + [a_0 - (N-s+1)p_1]\overline{C}_{N-s+k}^{k-1} - (N-s+2)p_0\overline{C}_{N-s}^{k-2}, \quad k \geq 3.
\end{aligned}
$$

Лемма 3.1 ([4])**.** *Общий элемент последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^N$, *порождаемой соотношениями* (3.6), *определяется формулой*

$$x_{N-s} = \sum_{i=0}^{s} K_{N-s,N-s+i} f_{N-s+i+1}, \tag{3.7}$$

где

$$K_{N-s,N-s} = -\frac{1}{a_{N-s,N-s}}; \quad K_{N-s,N-r} = -\frac{1}{a_{N-s,N-s}} \sum_{i=1}^{s-r} a_{N-s,N-s+i} K_{N-s+i,N-r}, \quad s > r.$$

На основании этой леммы выразим коэффициенты x_n через коэффициенты f_i, $i = \overline{1, N+1}$, — функции $f(t)$, определенной формулой (2.6), в виде

$$
\begin{gathered}
x_0 = \sum_{k=0}^{N} f_{N+1-k} K_{0,N-k}, \quad x_1 = \sum_{k=0}^{N-1} f_{N+1-k} K_{1,N-k}, \ldots,\\
x_m = \sum_{k=0}^{N-m} f_{N+1-k} K_{m,N-k}, \ldots, x_N = K_{N,N} f_{N+1}.
\end{gathered} \tag{3.8}
$$

Из первого равенства формулы (3.6) с учетом (2.5) имеем

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_0\widetilde{x}_0 - p_0\widetilde{x}_1 + f_0 =\\
&= a_0(x_0 - x_1 + x_2 - \cdots + (-1)^N x_N) - p_0(x_1 - 2x_2 + 3x_3 - \cdots + N(-1)^{N+1} x_N) + f_0.
\end{aligned}
$$

Перепишем это соотношение в виде

$$x_0 = V_1x_1 + V_2x_2 + \cdots + V_Nx_N - \frac{f_0}{a_0},$$

где

$$V_1 = 1 + \frac{p_0+1}{a_0}, \ V_2 = -\left(1 + 2\frac{p_0}{a_0}\right), \ldots, \ V_n = (-1)^{n+1}\left(1 + n\frac{p_0}{a_0}\right).$$

Подставляя сюда согласно (3.8) выражения для x_n, $n = \overline{1, N}$, получаем

$$x_0 = V_1 \sum_{k=0}^{N-1} f_{N+1-k} K_{1,N-k} + V_2 \sum_{k=0}^{N-2} f_{N+1-k} K_{2,N-k} + \dots +$$

$$+ V_m \sum_{k=0}^{N-m} f_{N+1-k} K_{m,N-k} + \dots + V_N K_{NN} f_{N+1} - \frac{f_0}{a_0}.$$

Суммируя здесь коэффициенты при одинаковых f_s, приходим к формуле

$$x_0 = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^{N-k} V_i K_{i,N-k} \right) f_{N+1-k} - \frac{f_0}{a_0}. \tag{3.9}$$

Обозначим

$$\overline{K}_{0,N-k} = \sum_{i=1}^{N-k} V_i K_{i,N-k}$$

и перепишем (3.9) в виде

$$x_0 = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{K}_{0,N-k} f_{N+1-k} - \frac{f_0}{a_0}. \tag{3.10}$$

Пусть для задачи (2.1), где согласно (2.2) функция $f(t)$ задана в виде полинома степени F, требуется найти ПК-решение степени $N > F+1$. В соответствии с замечанием 2.1 дополним полином (3.2) до степени $F + r$ соответствующим числом нулевых членов, а остальные коэффициенты объявим свободными, т. е. рассмотрим функцию

$$f(t) = \sum_{n=0}^{F} f_n t^n + \sum_{n=F+1}^{F+r} f_n t^n + \sum_{n=F+r+1}^{N+1} f_n t^n, \quad 0 \le r \le N - (F+1),^1 \tag{3.11}$$

где f_i, $i = \overline{0, F}$ — известные коэффициенты, $f_i = 0$, $i = \overline{F+1, F+r}$, а f_i, $i = \overline{F+r+1, N+1}$ — неизвестные свободные коэффициенты.

Теорема 3.1. *Пусть для начальной задачи*

$$\frac{dx(t)}{dt} + p(t)\frac{dx(t-1)}{dt} = a(t)x(t-1) + f(t), \quad t \in J = (-\infty, \infty), \quad x(0) = x_0,$$

$a(t) = a_0 + a_1 t$, $p(t) = p_0 + p_1 t$, *а* $f(t)$ *определяется формулой* (3.11).

Тогда задача (2.1) *имеет бесконечное множество ПК-решений вида* $x(t) = \sum\limits_{n=0}^{N} x_n t^n$ *с невязками* $\Delta(t) = \sum\limits_{i=F+r+1}^{N+1} \varphi_i t^i$, $r \in [0, N - (F+1)]$, *где* φ_i *— некоторые константы, если хотя бы один из определителей второго порядка линейной системы*

$$K_{0,N} f_{N+1} + K_{0,N-1} f_N + \dots + K_{0,F+r} f_{F+r+1} = 0,$$
$$\overline{K}_{0,N} f_{N+1} + \overline{K}_{0,N-1} f_N + \dots + \overline{K}_{0,F+r} f_{F+r+1} = 0$$

отличен от нуля.

[1] При $r = 0$ полагаем, что в формуле (3.11) коэффициенты $f_i = 0$ отсутствуют и $N = F + 1$.

Доказательство. Рассмотрим формулу (3.7) при $s = N$

$$x_0 = \sum_{k=0}^{N} K_{0,N-k} f_{N-k+1}. \tag{3.12}$$

С учетом (3.11) перепишем соотношения (3.10) и (3.12), выделив слагаемые с неизвестными коэффициентами f_i, $i = \overline{F+r+1, N+1}$,

$$x_0 = K_{0,N} f_{N+1} + K_{0,N-1} f_N + \cdots + K_{0,F+r} f_{F+r+1} + \sum_{k=1}^{F} K_{0,F-k} f_{F-k+1},$$
$$x_0 = \overline{K}_{0,N} f_{N+1} + \overline{K}_{0,N-1} f_N + \cdots + \overline{K}_{0,F+r} f_{F+r+1} + \sum_{k=1}^{F-1} \overline{K}_{0,F-k} f_{F-k+1} - \frac{f_0}{a_0}.$$

Выразим полученные формулы в виде линейной системы относительно неизвестных коэффициентов f_i, $i = \overline{F+r+1, N+1}$,

$$\begin{aligned} K_{0,N} f_{N+1} + K_{0,N-1} f_N + \cdots + K_{0,F+r} f_{F+r+1} &= x_0 - \sum_{k=1}^{F} K_{0,F-k} f_{F-k+1}, \\ \overline{K}_{0,N} f_{N+1} + \overline{K}_{0,N-1} f_N + \cdots + \overline{K}_{0,F+r} f_{F+r+1} &= x_0 - \sum_{k=1}^{F-1} \overline{K}_{0,F-k} f_{F-k+1} + \frac{f_0}{a_0}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Пусть в системе (3.13) существуют основные переменные, относительно которых определитель не равен нулю и, не нарушая общности, пусть ими будут коэффициенты f_N и f_{N+1}.

Обозначим

$$W_1 = x_0 - \sum_{k=1}^{N-(F+r+1)} K_{0,N-k-1} f_{N-k} - \sum_{k=1}^{F} K_{0,F-k} f_{F-k+1},$$
$$W_2 = x_0 - \sum_{k=1}^{N-(F+r+1)} \overline{K}_{0,N-k-1} f_{N-k} - \sum_{k=1}^{F-1} \overline{K}_{0,F-k} f_{F-k+1} + \frac{f_0}{a_0}$$

и перепишем линейную систему (3.13) в виде

$$K_{0,N} f_{N+1} + K_{0,N-1} f_N = W_1,$$
$$\overline{K}_{0,N} f_{N+1} + \overline{K}_{0,N-1} f_N = W_2.$$

Эта система имеет решение, поскольку определитель

$$D = \begin{vmatrix} K_{0,N} & K_{0,N-1} \\ \overline{K}_{0,N} & \overline{K}_{0,N-1} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Полагая

$$D_1 = \begin{vmatrix} W_1 - K_{0,N-1} & K_{0,N-1} \\ W_2 - \overline{K}_{0,N-2} & \overline{K}_{0,N-1} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad D_2 = \begin{vmatrix} K_{0,N} & W_1 - K_{0,N-2} \\ \overline{K}_{0,N} & W_2 - \overline{K}_{0,N-2} \end{vmatrix},$$

методом Крамера находим коэффициенты f_N и f_{N+1} как функции коэффициентов f_i, $i = \overline{F+r+1, N-1}$, которые могут быть выбраны произвольно.

Пусть $f_i = \varphi_i$, $i = \overline{F+r+1, N-1}$, где φ_i — некоторые константы. Тогда коэффициенты f_N и f_{N+1} находятся по формулам

$$f_N = \frac{D_2}{D} = \varphi_N(\varphi_{N-s+1}, \dots, \varphi_{N-1}), \quad f_{N+1} = \frac{D_1}{D} = \varphi_{N+1}(\varphi_{N-s+1}, \dots, \varphi_{N-1}).$$

Далее из соотношений (3.6) последовательно определяются коэффициенты x_n, $n = N, N-1, \dots, 1$, и ПК-решение в виде (3.3).

С другой стороны, в формуле (3.2) для невязки $\Delta(t)$ при $0 \le r \le N-(F+1)$ имеем

$$\Delta(t) = \sum_{i=F+r+1}^{N+1} \varphi_i t^i. \qquad \square$$

Следствие 3.1. Каждому ПК-решению степени N соответствует единственная невязка с оценкой $O(t^N)$, которая определяется формулой $\Delta(t) = f_N t^N + f_{N+1} t^{N+1}$.

4. Численный эксперимент

На основании полученных в предыдущем разделе результатов был проведен численный эксперимент. Он показал зависимость ПК-решений ДРУ с переменными коэффициентами от структуры спектра корней характеристического квазиполинома (ХК), порождаемого модельным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} + p_0 \frac{d\overline{x}(t-1)}{dt} = a_0 \overline{x}(t-1), \quad t \in J = (-\infty, \infty), \quad \overline{x}(0) = x_0. \tag{4.1}$$

Проведем вспомогательные исследования данной задачи методом Эйлера, который позволяет найти частные аналитические решения и сравнить их с полученными ПК-решениями.

Будем искать решение в виде $x(t) = Ce^{kt}$. Тогда, подставляя это соотношение в (4.1), приходим к характеристическому квазиполиному

$$e^k = \frac{a_0}{k} - p_0, \tag{4.2}$$

имеющему бесконечное множество корней на комплексной плоскости.

Во многих прикладных задачах значительный интерес представляют неосциллирующие решения, определяемые вещественными корнями характеристического квазиполинома.

Определение 4.1. Решения ДРУ (4.1), порождаемые вещественными корнями характеристического квазиполинома (4.2), будем называть *доминантными* решениями.

Для нахождения вещественных корней уравнения (4.2) воспользуемся графическим приемом. Обозначим в (4.2)

$$y_1(k) = e^k \quad \text{и} \quad y_2(k) = \frac{a_0}{k} - p_0. \tag{4.3}$$

Построим графики этих функций. При различных значениях коэффициентов a_0 и p_0 точки пересечения графиков функций $y_1(k)$ и $y_2(k)$ будут соответствовать вещественным корням характеристического уравнения. На рис. 1 исследованы следующие случаи.

1. $a_0 = 4$, $p_0 = -2$. Здесь одной точке пересечения графиков функций $y_1(k)$ и $y_2(k)$ соответствует единственный корень ХК (4.2) (– – – – –).

2. $a_0 = 4$, $p_0 = 2$. В этом случае графики функций $y_1(k)$ и $y_2(k)$ пересекаются в двух точках. Следовательно, ХК (4.2) имеет два вещественных корня (. . . . .).

3. $a_0 = -2.71$, $p_0 = -5.24$. Точке касания графиков функций $y_1(k)$ и $y_2(k)$ соответствует двукратный корень ХК (4.2) (– · – · – ·).

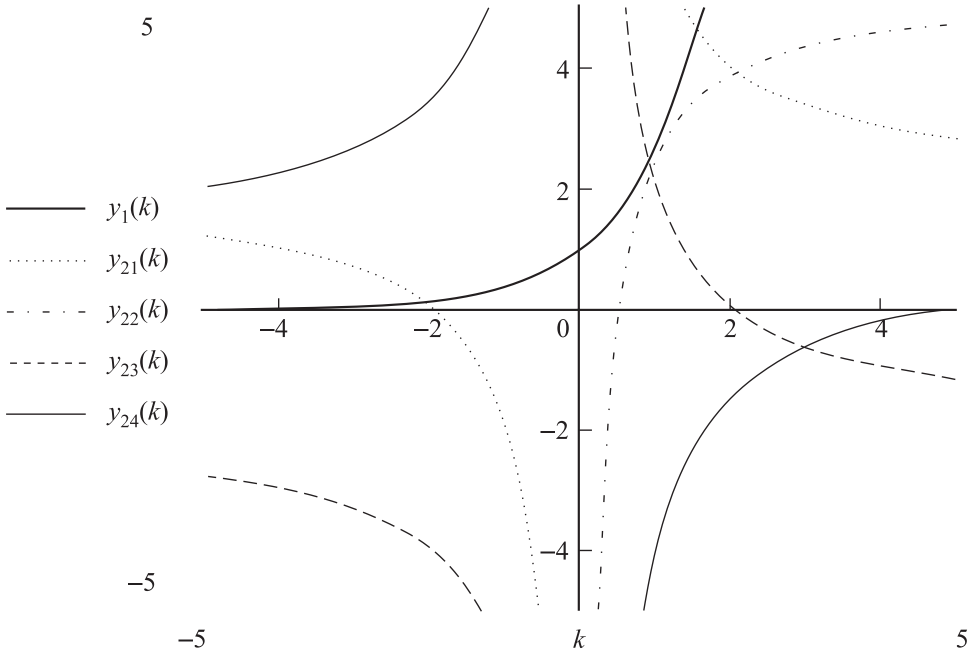

Рис. 1.

4. $a_0 = -5$, $p_0 = -1$. Поскольку точек пересечения графиков функций $y_1(k)$ и $y_2(k)$ нет, это означает отсутствие у ХК (4.2) вещественных корней (———).

Таким образом, случай касания кривых является предельным в смысле существования вещественных корней ХК (4.2). Рассмотрим этот случай подробнее. В точке касания графиков $k = k_*$ выполняются условия

a) $y_1(k_*) = y_2(k_*)$ — равенство значений функций;

b) $y_1'(k_*) = y_2'(k_*)$ — равенство касательных к графикам функций.

Тогда с учетом (4.3) имеем

$$\text{a)} \quad \frac{a_0}{k_*} = e^{k_*} + p_0, \tag{4.4}$$

$$\text{b)} \quad a_0 = -k_*^2 e^{k_*}. \tag{4.5}$$

Подставляя (4.5) в (4.4), находим

$$p_0 = -e^{k_*}(k_* + 1). \tag{4.6}$$

Перепишем (4.4) и (4.6) в виде

$$a_0(k_*) = -{k_*}^2 e^{k_*};\ p_0(k_*) = -e^{k_*}(k_* + 1). \tag{4.7}$$

Каждому значению k_* в плоскости коэффициентов (a_0, p_0) соответствует некоторая точка. Исключая параметр k_* в формулах (4.7), получаем график, приведенный на рис. 2. Анализ этого графика позволяет выделить на плоскости (a_0, p_0) следующие области взаимного расположения графиков функций (4.3):

I — одна точка пересечения (один вещественный корень),

II — две точки пересечения (два вещественных корня),

III — три точки пересечения (три вещественных корня),

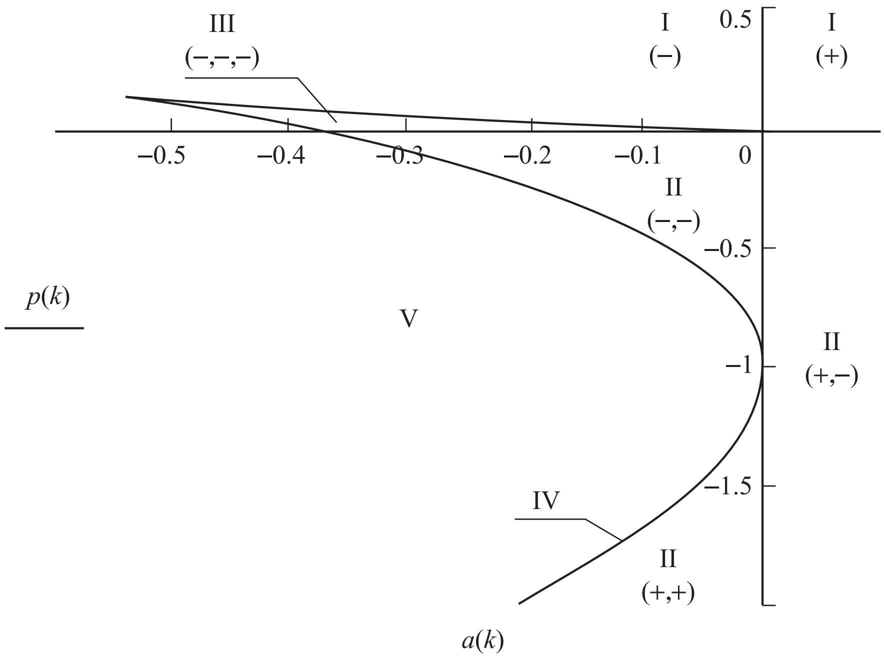

Рис. 2.

IV — точки касания (кратный вещественный корень),

V — общих точек нет (имеются только комплексные корни).

Основная цель численного математического эксперимента состояла в исследовании ПК-решений уравнения (4.1) в этих областях. Расчеты, полученные методом ПК-решений, сравнивались с доминантными решениями уравнения (4.1).

Пример 4.1. Пусть в (4.1) $a_0 = 4$, $p_0 = 2$ и $x_0 = 1$, т. е.

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} + 2\frac{d\overline{x}(t-1)}{dt} = 4\overline{x}(t-1), \quad t \in J, \quad \overline{x}(0) = x_0 = 1. \tag{4.8}$$

В этом случае существует единственный корень ХК (4.2) $k_1 = 0{,}8979$, что соответствует области I на рис. 2. Доминантное решение задачи (4.8), соответствующее этому корню, представляется в виде ряда Маклорена

$$\widetilde{x}(t) = x_0 e^{0{,}8979t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0{,}8979)^n}{n!} t^n =$$

$$= 1 + 0{,}8979t + 0.4031t^2 + 0{,}1207t^3 + 0{,}0271t^4 + 0{,}0049t^5 + 0{,}0007t^6 + \sum_{n=7}^{\infty} \frac{(0{,}8979)^n}{n!} t^n.$$

Далее согласно определению 2.1 задача

$$\dot{x}(t) + 2\dot{x}(t-1) = 4x(t-1) + f_N t^N, \quad x(0) = \overline{x}_0 = x_0,$$

где

$$x(t) = x_N(t) = \sum_{n=0}^{N} x_n t^n, \quad \Delta_N(t) = f_N t^N, \tag{4.9}$$

будет согласованной по размерности полиномов относительно задачи (4.8).

Основываясь на результаты раздела 3, были получены ПК-решения задачи (4.8) для $N = 4, 5, 6$ и невязки $\Delta_N(t)$:

$$x_4(t) = 1 + 0{,}9015t + 0{,}4085t^2 + 0{,}1155t^3 + 0{,}0165t^4,$$
$$\Delta_4(t) = -0{,}0660t^4;$$
$$x_5(t) = 1 + 0{,}8978t + 0{,}4047t^2 + 0{,}1222t^3 + 0{,}0259t^4 + 0{,}0029t^5,$$
$$\Delta_5(t) = -0{,}0119t^5;$$
$$x_6(t) = 1 + 0{,}8979t + 0{,}4030t^2 + 0{,}1211t^3 + 0{,}0274t^4 + 0{,}0046t^5 + 0{,}0004t^6,$$
$$\Delta_6(t) = -0{,}0017t^6.$$

Сравнивая $x_4(t)$, $x_5(t)$ и $x_6(t)$ с точным решением $\widetilde{x}(t)$, приходим к выводу, что в данном случае ПК-решения являются последовательными приближениями к частному аналитическому решению $\widetilde{x}(t)$, поскольку с увеличением степени полинома в (4.9) коэффициенты ПК-решений приближаются к коэффициентам ряда Маклорена для $\widetilde{x}(t)$, а сами ПК-решения притягиваются к решению $\widetilde{x}(t)$, что наглядно иллюстрируется графиками на рис. 3.

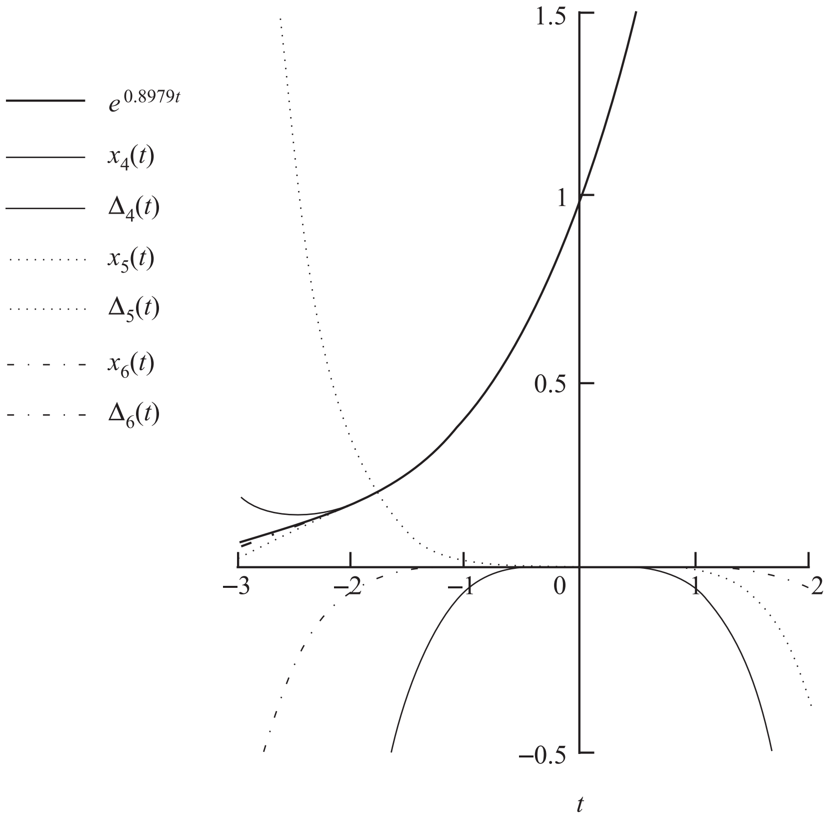

Рис. 3.

Введем следующее

Определение 4.2. Под ε-*притяжимостью* ПК-решений на некотором отрезке $[t_0, t_1]$ будем понимать свойство взаимного притяжения последовательности ПК-решений, порождаемых увеличением степени N полинома ПК-решения, т. е. существует такое N_*, при котором для всех $N \geq N_*$ и заданного ε

$$|x_{N+i}(t) - x_{N+i-1}(t)| < \varepsilon, \ i = 1, 2 \ldots, k, \ \forall t \in [t_0, t_1].$$

Как показали численные эксперименты, ε-притяжимость ПК-решений в значительной мере зависит от числа начальных условий, которые определяются числом вещественных корней (если речь идет о доминантном решении) ХК (4.2) для модельного уравнения (4.1).

Пример 4.2. Пусть в задаче (4.1) $a_0 = 4$, $p_0 = -2$. Тогда

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} - 2\frac{d\overline{x}(t-1)}{dt} = 4\overline{x}(t-1), \quad t \in J, \quad \overline{x}(0) = x_0 = 1. \tag{4.10}$$

При заданном начальном условии $x_0 = 1$ найдем ПК-решения 4, 5 и 6 степени и соответствующие этим ПК-решениям невязки $\Delta_i(t)$, $i = 4, 5, 6$,

$$x_4(t) = 1 + 1{,}4525t + 1{,}2067t^2 + 0{,}5363t^3 + 0{,}1788t^4,$$
$$\Delta_4(t) = -0{,}7151t^4;$$
$$x_5(t) = 1 + 1{,}5892t + 1{,}1541t^2 + 0{,}6391t^3 + 0{,}2134t^4 + 0{,}0568t^5,$$
$$\Delta_5(t) = -0{,}2273t^5;$$
$$x_6(t) = 1 + 0{,}8682t + 0{,}6898t^2 + 0{,}3344t^3 + 0{,}1387t^4 + 0{,}0376t^5 + 0{,}0082t^6,$$
$$\Delta_6(t) = -0{,}0329t^6.$$

Графики вычисленных ПК-решений приведены на рис. 4.

Несмотря на "хорошую" невязку, найденные ПК-решения не обладают свойством взаимного притяжения даже на малых интервалах изменения независимой переменной t.

Вернемся к начальной задаче (4.10). Значения коэффициентов $a_0 = 4$ и $p_0 = -2$ определяют на плоскости (a_0, p_0) точку, принадлежащую области II (рис. 2), в которой ХК (4.2) имеет два вещественных корня $k_1 = -2{,}1269$ и $k_2 = 1{,}5295$. Соответственно, доминантное решение задачи (4.10) описывается в этом случае формулой

$$\widetilde{x}(t) = C_1 e^{-2{,}1269t} + C_2 e^{1{,}5295t},$$

где C_1 и C_2 — некоторые константы. Следовательно, для нахождения констант C_1 и C_2 задание только одного начального условия $x_0 = 1$ недостаточно и необходимо введение еще одного дополнительного начального условия.

Перепишем начальную задачу (4.10) в виде

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} - 2\frac{d\overline{x}(t-1)}{dt} = 4\overline{x}(t-1), \quad t \in J, \quad \overline{x}(0) = x_0 = 1, \quad \frac{d\overline{x}(0)}{dt} = x_1 = 0. \tag{4.11}$$

Из начальных условий находим значения констант $C_1 = 0{,}4183$, $C_2 = 0{,}5817$. Тогда доминантное решение задачи (4.11) запишется так:

$$\widetilde{x}(t) = 0{,}4183e^{-2{,}1269t} + 0{,}5817e^{1{,}5295t}.$$

Полученный результат показывает, что для нахождения ПК-решений задачи (4.10) необходимо задание двух начальных условий, приведенных в задаче (4.11). В этом случае воспользуемся приемом, изложенным в разделе 3. Ведем согласно формулы (3.16) дополнительный свободный коэффициент f_i. Это позволяет удовлетворить второму дополнительному

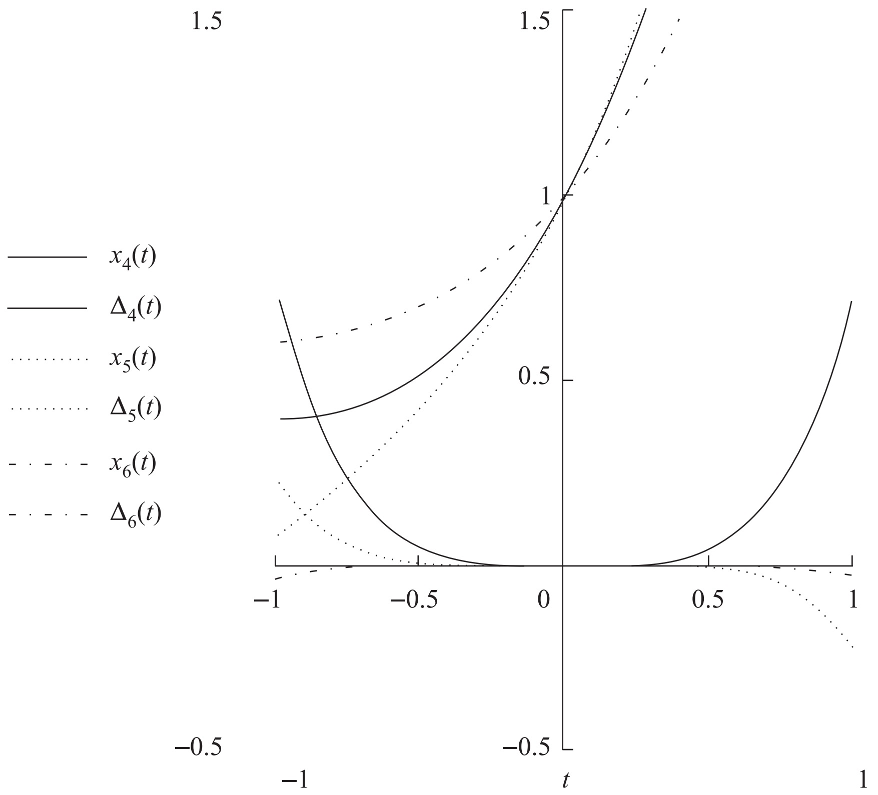

Рис. 4.

начальному условию задачи (4.11) и найти ПК-решения 4, 5 и 6 степеней и соответствующие им невязки. Проведенные расчеты приводят к формулам

$$x_4(t) = 1 + 1{,}8947t^2 + 0{,}8421t^3 + 0{,}7037t^4,$$
$$\Delta_4(t) = -13{,}6842t^3 - 5{,}6842t^4;$$
$$x_5(t) = 1 + 1{,}7674t^2 - 0{,}5581t^3 + 0{,}186t^4 + 0{,}6047t^5,$$
$$\Delta_5(t) = -8{,}3256t^4 - 2{,}4186t^5;$$
$$x_6(t) = 1 + 1{,}5817t^2 - 0{,}4071t^3 + 0{,}5959t^4 + 0{,}1589t^5 + 0{,}2206t^6,$$
$$\Delta_6(t) = 3{,}3149t^5 - 0{,}8779t^6.$$

Графики доминантного решения $\widetilde{x}(t)$ и найденных ПК-решений приведены на рис. 5. Как видно в этом случае наблюдается ε-притяжимость ПК-решений в смысле приближения их к доминантному решению.

Пример 4.3. Пусть $a_0 = -16e^{-4}$, $p_0 = 3e^{-4} - e^{-5}$. Тогда уравнение (4.1) примет вид

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} + (3e^{-4} - e^{-5})\frac{d\overline{x}(t-1)}{dt} = -16e^{-4}x(t-1), \quad t \in J, \quad \overline{x}(0) = x_0 = 1.$$

Значения a_0 и p_0 определяют точку, принадлежащую области III, где существуют три вещественных корня ХК (4.2) $k_1 = -0{,}4005$, $k_2 = -3{,}0122$ и $k_3 = -5{,}6749$. Поэтому доминантное решение задачи (4.10) запишется так:

$$\widetilde{x}(t) = C_1 e^{-0{,}4005t} + C_2 e^{-3{,}0122t} + C_3 e^{-5{,}6749t}.$$

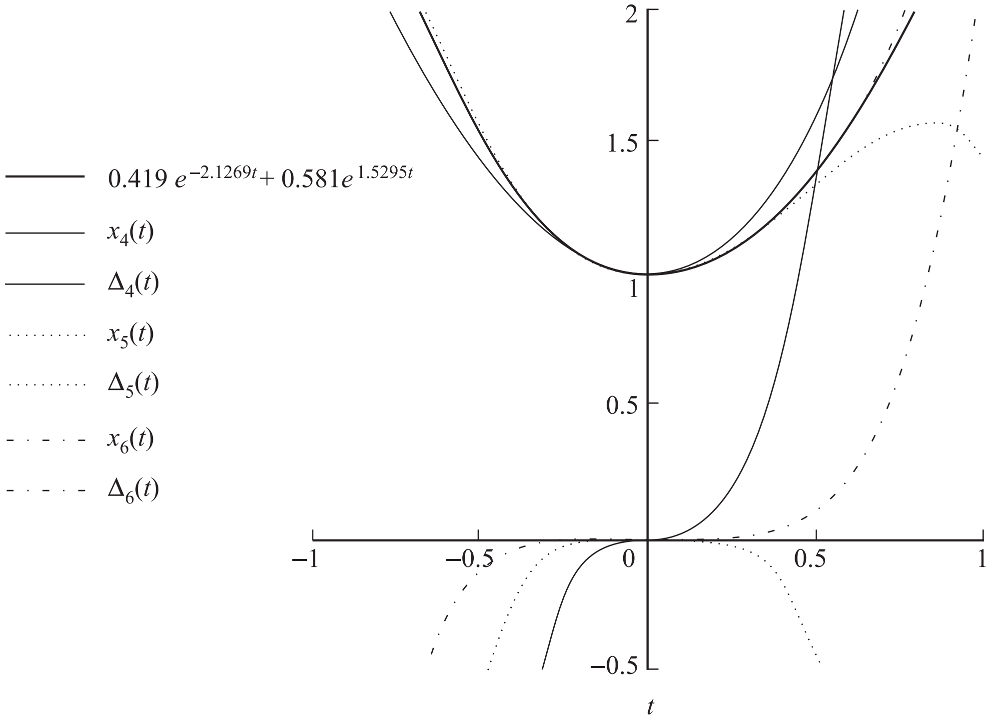

Рис. 5.

Следовательно, для нахождения констант C_1, C_2 и C_3 необходимо задания трех начальных условий.

Рассмотрим теперь применение метода ПК-решений к ДРУ с линейными коэффициентами.

Пример 4.4. Пусть $a(t) = p(t) = (1+t)$. Тогда задача (3.1) перепишется в виде

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} + (1+t)\frac{d\overline{x}(t-1)}{dt} = (1+t)x(t-1), \quad t \in J, \quad \overline{x}(0) = x_0 = 1. \tag{4.12}$$

По отношению к этой задаче рассмотрим модельное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\dot{y}(t) + p_0\dot{y}(t-1) = a_0 y(t-1), \quad t \in J.$$

Поскольку $a_0 = p_0 = 1$, этому случаю соответствует точка в области I на рис. 2, где существует один вещественный корень ХК (4.2). Поэтому ПК-решения задачи (4.12) определяются заданием одного начального условия $x(0) = x_0 = 1$.

Приведем результаты расчетов ПК-решений задачи (4.12) для $N = 4, 5, 6$ и соответствующие им невязки $\Delta_N(t)$ по формулам

$$x_4(t) = 1 + 0{,}4669t + 0{,}1789t^2 + 0{,}0778t^3 + 0{,}0350t^4,$$

$$\Delta_4(t) = 0{,}1673t^4 - 0{,}0350t^5;$$

$$x_5(t) = 1 + 0{,}5007t + 0{,}2530t^2 + 0{,}0452t^3 - 0{,}0426t^4 - 0{,}0229t^5,$$

$$\Delta_5(t) = -0{,}1635t^5 + 0{,}0229t^6;$$

$$x_6(t) = 1 + 0{,}5295t + 0{,}229t^2 - 0{,}0585t^3 + 0{,}0171t^4 + 0{,}0468t^5 + 0{,}0149^6,$$

$$\Delta_6(t) = 0{,}1180t^6 - 0{,}0149t^7.$$

На графиках рис. 6 изображены полученные ПК-решения и соответствующие им невязки. Здесь видно, что найденные ПК-решения с возрастанием степени полинома, обладают свойством ε-притяжимости в смысле определения 4.2.

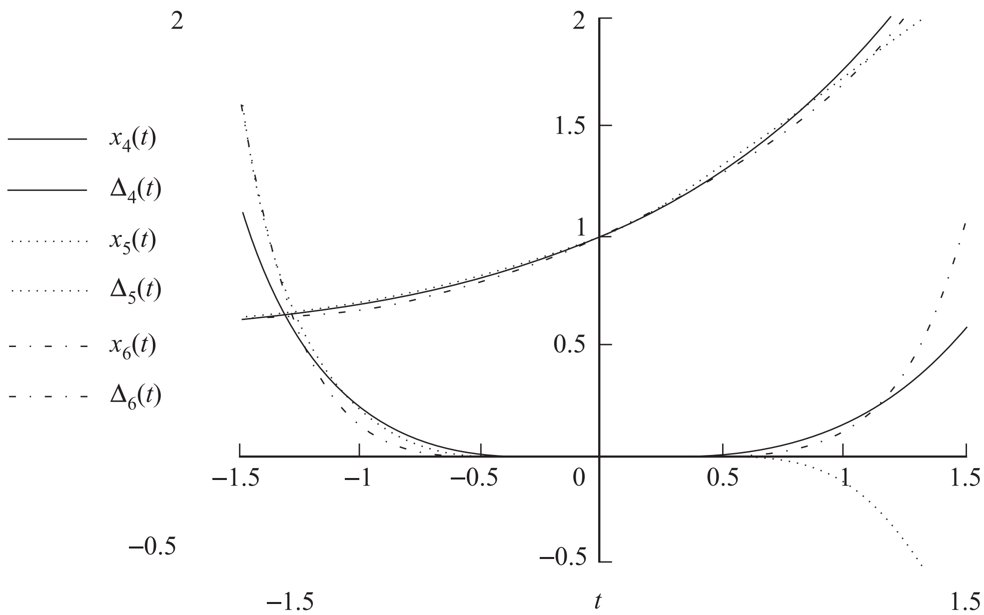

Рис. 6.

Литература

[1] Мышкис А.Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1951. – 256 с.

[2] Пинни Э. *Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения.* – М.: Ин. лит., 1961. – 248 с.

[3] Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения.* – М.: Мир, 1967. – 548 с.

[4] Cherepennikov V.B., Ermolaeva P.G. *Polynomial quasisolutions of linear differential difference equations* // Opuscula Math.. 26/3, Univ. of Gdansk, 2006. – P. 431-443.

В.Б. Черепенников

главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления Сибирского отделения Российской Академии наук, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 13,

`e-mail:` vbcher@icc.ru

П.Г. Ермолаева

аспирант, Институт динамики систем и теории управления Сибирского отделения Российской Академии наук, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 13,

`e-mail:` polka_1@mail.ru

V.B. Cherepennikov

*Chief research worker, Institute of Dynamics of Systems and Control Theory,
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,
13 Lermontov str., Irkutsk, 664033 Russia,*

`e-mail:` vbcher@icc.ru

P.G. Ermolaeva

*Postgraduate, Institute of Dynamics of Systems and Control Theory,
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,
13 Lermontov str., Irkutsk, 664033 Russia,*

`e-mail:` polka_1@mail.ru