УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2017, Т. 159, кн. 1 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 47–63 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 514.822

НОРМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ В АФФИННОЙ ГЕОМЕТРИИ

М.О. Катанаев

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва, 119991, Россия

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Рассмотрены многообразия, на которых задана аффинная геометрия общего вида с нетривиальным метрикой, кручением и тензором неметричности. В последнее время такие многообразия привлекают большое внимание в связи с построением обобщенных моделей гравитации. В предположении, что все геометрические объекты являются вещественно аналитическими функциями, построены нормальные координаты в некоторой окрестности произвольной точки путем разложения компонент связности и метрики в ряды Тейлора. Показано, что нормальные координаты являются обобщением декартовой системы координат в евклидовом пространстве на случай многообразий с произвольной аффинной геометрией. При этом компоненты произвольного вещественно аналитического тензорного поля в окрестности каждой точки представляются в виде степенных рядов, коэффициенты которого строятся из ковариантных производных, тензоров кривизны и кручения, вычисленных в точке разложения. Для пространств постоянной кривизны ряды просуммированы в явном виде и найдено выражение для метрики в нормальных координатах. Показано, что нормальные координаты задают гладкое сюрьективное отображение евклидовых пространств на пространства постоянной кривизны. Уравнения экстремалей проинтегрированы в явном виде для пространств постоянной кривизны в нормальных координатах. Проанализирована связь нормальных координат с экспоненциальным отображением.

Ключевые слова: нормальные координаты, гауссовы координаты, римановы координаты

Введение

Нормальные координаты, которые называются также геодезическими или римановыми, играют большую роль в математической физике. Они впервые были введены Риманом [1] для римановых многообразий, для которых кручение и тензор неметричности тождественно равны нулю. Римановы координаты подробно рассмотрены, например, в [2, 3]. Это построение без труда переносится на псевдоримановы многообразия с неположительно определенной метрикой [4, 5].

В последние годы в математической физике широко исследуются модели, основанные на аффинной геометрии общего вида с нетривиальным кручением и тензором неметричности (см., например, [6, 7]). В настоящей статье построены нормальные координаты для многообразий с аффинной геометрией общего вида, когда заданы метрика, кручение и тензор неметричности. Сначала мы вводим эту систему координат с помощью рядов. При этом предполагается, что все геометрические объекты являются вещественно аналитическими, то есть их компоненты разлагаются в сходящиеся степенные ряды в некоторой окрестности произвольной точки многообразия. Затем дано определение с помощью экспоненциального отображения.

Нормальные координаты в пространствах аффинной связности общего вида рассматривались, например, в [8, 9]. В этих монографиях можно найти, в частности, теорему 1 и лемму 1, которые приведены в настоящей статье для полноты изложения. Теорема 3, насколько известно автору, ранее в литературе не встречалась. Явное выражение для коэффициентов разложения второго порядка в формуле (19), по-видимому, также приведено впервые. В разделах 3 и 4 проведено сравнение полученных формул с известными выражениями для (псевдо)римановых многообразий.

В дальнейшем мы увидим, что декартовы координаты являются нормальными координатами в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. В этом смысле нормальные координаты являются обобщением декартовой системы координат на общий случай многообразия с заданной аффинной геометрией.

1. Нормальные координаты

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = n$, задана аффинная геометрия $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$. Мы предполагаем, что компоненты метрики g и аффинной связности Γ являются вещественно аналитическими функциями, то есть в некоторой окрестности каждой точки $x_0 \in \mathbb{M}$ представимы в виде сходящихся степенных рядов. Мы рассмотрим специальную систему координат в окрестности точки x_0, которая является аналогом декартовой системы координат в евклидовом пространстве и имеет многочисленные приложения. В литературе эта система координат встречается под разными названиями: геодезические, римановы или нормальные координаты – и строится в (псевдо)римановом пространстве. Мы построим такую систему координат в более общем случае произвольной аффинной геометрии.

Сначала рассмотрим геодезические линии вблизи точки $x_0 \in \mathbb{M}$. Пусть на многообразии задана кривая $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, проходящая через точку x_0 в заданном направлении,

$$x^\alpha(0) =: x_0^\alpha, \quad \dot{x}^\alpha(0) =: \dot{x}_0^\alpha, \tag{1}$$

где x^α, $\alpha = 1, \ldots, n$, – локальные координаты точки x. Для того чтобы кривая была геодезической, функции $x^\alpha(t)$ должны удовлетворять уравнениям для геодезических

$$\ddot{x}^\alpha = -\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma, \tag{2}$$

где $\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha(x)$ – компоненты аффинной связности; точки обозначают дифференцирование по каноническому параметру t, с начальными условиями (1). При достаточно малых t будем искать решение уравнений для геодезических в виде степенного ряда

$$x^\alpha = x_0^\alpha + \dot{x}_0^\alpha t + \frac{1}{2}\, \ddot{x}_0^\alpha t^2 + \frac{1}{3!}\, \dddot{x}_0^\alpha\, t^3 + \cdots . \tag{3}$$

Первые два члена ряда определяются начальными условиями (1), а все последующие – уравнениями (2). В нулевом порядке по t из уравнений для геодезических следует равенство

$$\ddot{x}_0^\alpha = -\overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}_0^\beta \dot{x}_0^\gamma, \quad \text{где} \quad \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha := \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha(x_0).$$

Первый порядок уравнений по t определяет кубический член разложения в (3):

$$\dddot{x}_0^\alpha = \left(-\partial_\delta \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha + 2\overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\epsilon \overset{\circ}{\Gamma}_{\{\delta\epsilon\}}{}^\alpha\right) \dot{x}_0^\beta \dot{x}_0^\gamma \dot{x}_0^\delta,$$

где для краткости мы допускаем некоторую вольность в обозначениях:

$$\partial_\delta \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha := \partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \big|_{x=x_0}.$$

Следовательно, решение задачи Коши для геодезических в третьем порядке по t имеет вид

$$x^\alpha = x_0^\alpha + \dot{x}_0^\alpha t - \frac{1}{2}\overset{\circ}{\Gamma}_{0\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}_0^\beta \dot{x}_0^\gamma t^2 - \frac{1}{6}\left(\partial_\delta \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha - 2\overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\epsilon \overset{\circ}{\Gamma}_{\{\delta\epsilon\}}{}^\alpha\right)\dot{x}_0^\beta \dot{x}_0^\gamma \dot{x}_0^\delta t^3 + \cdots . \quad (4)$$

Коэффициенты при более высоких степенях t^k, $k \geq 4$ пропорциональны $(\dot{x}_0)^k t^k$ с коэффициентами, зависящими от аффинной связности и их частных производных вплоть до $(k-2)$-го порядка, вычисленных в точке x_0. Интервал сходимости ряда (4) определяется начальными данными и компонентами аффинной связности.

Перейдем к определению нормальных координат в некоторой достаточно малой окрестности $\mathbb{U}_0 \subset \mathbb{M}$ точки x_0. Пусть $\mathbb{M}$ – многообразие с заданной аффинной связностью. Предположим на время, что кручение равно нулю, то есть $\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}{}^\alpha$. Закон преобразования компонент аффинной связности при преобразовании координат $x^\alpha \mapsto x^{\alpha'}(x)$ имеет вид

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'} = \partial_{\beta'} x^\beta \partial_{\gamma'} x^\gamma (\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \partial_\alpha x^{\alpha'} - \partial^2_{\beta\gamma} x^{\alpha'}). \quad (5)$$

Проведем преобразование координат, которое задается квадратичным полиномом с постоянными коэффициентами

$$x^{\alpha'} = B_\alpha{}^{\alpha'}(x^\alpha - x_0^\alpha) + \frac{1}{2}\overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha B_\alpha{}^{\alpha'}(x^\beta - x_0^\beta)(x^\gamma - x_0^\gamma), \quad (6)$$

где $B_\alpha{}^{\alpha'}$ – произвольная невырожденная постоянная матрица. Тогда в новой системе координат компоненты аффинной связности будут равны

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'} = \partial_{\beta'} x^\beta \partial_{\gamma'} x^\gamma \left[\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \left(B_\alpha{}^{\alpha'} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\delta}{}^\epsilon B_\epsilon{}^{\alpha'}(x^\delta - x_0^\delta)\right) - \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha B_\alpha{}^{\alpha'}\right].$$

Отсюда следует, что в точке x_0 компоненты аффинной связности без кручения обращаются в нуль, так как обращается в нуль выражение в квадратных скобках.

Если связность обладает кручением, то, поскольку кручение является тензором, его нельзя обратить в нуль никаким преобразованием координат даже в одной точке.

Выше мы доказали, что для произвольной аффинной связности в произвольной заданной точке x_0 всегда можно обратить в нуль симметричную часть связности. Для этого достаточно выбрать соответствующим образом только квадратичные члены в функциях преобразований координат (6). Данная система координат существует в окрестности произвольной точки $x_0 \in \mathbb{M}$ и определена неоднозначно. Во-первых, матрица $B_\alpha{}^{\alpha'}$ в (6) является невырожденной, а в остальном произвольна. Во-вторых, в правило преобразования координат (6) можно добавить произвольные слагаемые третьей и более высокой степени по $(x - x_0)$. Этот произвол в выборе системы координат можно использовать для дальнейшей специализации системы координат.

Геометрический смысл построенной системы координат состоит в том, что в достаточно малой окрестности точки x_0 свойства многообразия близки к свойствам аффинного пространства, так как при параллельном переносе компоненты тензоров в линейном приближении по вектору смещения не меняются. Как и декартовы координаты в евклидовом пространстве, данные координаты в точке x_0 определены, в частности, с точностью до линейных преобразований.

Можно доказать, что симметричную часть компонент аффинной связности можно обратить в нуль не только в фиксированной точке, но и вдоль произвольной

кривой γ на многообразии $\mathbb{M}$ [10]. Соответствующая система координат называется *геодезической вдоль кривой* $\gamma \in \mathbb{M}$.

Оставшийся произвол в выборе системы координат можно использовать для дальнейшей специализации геометрических объектов. Воспользуемся свободой добавления высших степеней $(x-x_0)^k$, $k \geq 3$, в закон преобразования координат (6) и покажем, что в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{M}$ можно обратить в нуль не только симметричные части самих компонент аффинной связности, но и все их полностью симметризованные частные производные.

Теорема 1. *Если компоненты аффинной связности вещественно аналитичны, то в окрестности произвольной точки $x_0 \in \mathbb{M}$ существует такая система координат, что выполнены равенства*

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\alpha} = 0, \quad \partial_{\{\gamma_3}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\alpha} = 0, \quad \ldots \quad \partial^{k-2}_{\{\gamma_3\ldots\gamma_k}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\alpha} = 0, \quad \ldots, \tag{7}$$

где фигурные скобки обозначают симметризацию по всем индексам, заключенным между ними.

Доказательство. Перепишем закон преобразования компонент аффинной связности (5) в виде

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'} A_{\alpha'}{}^{\alpha} = A_{\beta'}{}^{\beta} A_{\gamma'}{}^{\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha} + \partial_{\beta'} A_{\gamma'}{}^{\alpha}, \tag{8}$$

где матрица $A_{\alpha'}{}^{\alpha}(x) := J^{-1}_{\alpha'}{}^{\alpha} = \partial_{\alpha'} x^{\alpha}$ – обратная матрица Якоби преобразования координат. Дифференцирование этого соотношения по $x^{\delta'}$ приводит к равенству

$$\partial_{\delta'}\Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'} A_{\alpha'}{}^{\alpha} + \Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'} \partial_{\delta'} A_{\alpha'}{}^{\alpha} = \partial_{\delta'} A_{\beta'}{}^{\beta} A_{\gamma'}{}^{\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha} + \\ + A_{\beta'}{}^{\beta} \partial_{\delta'} A_{\gamma'}{}^{\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha} + A_{\beta'}{}^{\beta} A_{\gamma'}{}^{\gamma} \partial_{\delta'} \Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha} + \partial^2_{\delta'\beta'} A_{\gamma'}{}^{\alpha}. \tag{9}$$

Последовательное дифференцирование полученного соотношения приводит к равенствам, содержащим старшие производные от компонент аффинной связности и обратной матрицы Якоби $A_{\alpha'}{}^{\alpha}$. Рассматривая эти тождества в точке x^0, мы докажем возможность выбора системы координат, в которой выполнены равенства (7), по теории возмущений.

Совершим преобразование координат $x \mapsto y(x)$. Предположим, что вблизи точки $x_0 \in \mathbb{M}$ обратное преобразование задается степенным рядом

$$x^{\alpha} = x_0^{\alpha} + \left.\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\gamma}}\right|_0 y^{\gamma} + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial y^{\gamma_1}\partial y^{\gamma_2}}\right|_0 y^{\gamma_1} y^{\gamma_2} + \frac{1}{3!} \left.\frac{\partial^3 x^{\alpha}}{\partial y^{\gamma_1}\partial y^{\gamma_2}\partial y^{\gamma_3}}\right|_0 y^{\gamma_1} y^{\gamma_2} y^{\gamma_3} + \cdots. \tag{10}$$

Здесь для новой системы координат мы используем букву y, чтобы избежать штрихов у индексов. Выберем первые три члена разложения в виде

$$\left.\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\gamma}}\right|_0 := \delta^{\alpha}_{\gamma},$$

$$\left.\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial y^{\gamma_1}\partial y^{\gamma_2}}\right|_0 := -\overset{\circ}{\Gamma}_{\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\alpha},$$

$$\left.\frac{\partial^3 x^{\alpha}}{\partial y^{\gamma_1}\partial y^{\gamma_2}\partial y^{\gamma_3}}\right|_0 := 2\overset{\circ}{\Gamma}_{\{\gamma_1\gamma_2}{}^{\delta}\overset{\circ}{\Gamma}_{\delta\gamma_3\}}{}^{\alpha} - \partial_{\{\gamma_3}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\alpha}.$$

Тогда из уравнений (8), (9) следует, что в новой системе координат справедливы равенства

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\alpha} = 0, \quad \partial_{\{\gamma_3}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\alpha} = 0.$$

Выбор квадратичного члена ряда (10) уже был использован ранее. Выбор кубического члена разложения позволил обратить в нуль симметризованную первую частную производную аффинной связности в той же точке.

В дифференциальные тождества, получаемые последовательным дифференцированием (8), максимальная степень производной от обратной матрицы Якоби ${A_{\alpha'}}^{\alpha}$ всегда входит линейно и на единицу превышает максимальную степень производной от компонент аффинной связности. Это означает, что коэффициенты ряда (10) всегда можно подобрать таким образом, чтобы обратить в нуль все симметризованные частные производные от коэффициентов аффинной связности (7). В этом нет ничего удивительного, так как члены ряда (10), начиная с квадратичного, находятся во взаимно однозначном соответствии с условиями на аффинную связность (7). □

Нетрудно проверить, что ряд (10), определяющий преобразование координат, в точности совпадает с рядом (4), определяющим геодезические линии, если положить $y^\alpha := \dot{x}_0^\alpha t$. Поэтому в новой системе координат прямые линии $y^\alpha = X_0^\alpha t$, где $t \in \mathbb{R}$, и X_0^α – произвольные числа, из которых по крайней мере одно отлично от нуля, являются геодезическими линиями на $\mathbb{M}$. Здесь прослеживается аналогия с декартовой системой координат в евклидовом пространстве: геодезические являются прямыми линиями.

Построенная система координат является нормальной системой координат в некоторой достаточно малой окрестности $\mathbb{U}_0$, определяется только симметричной частью компонент аффинной связностью и никак от метрики не зависит. При этом у нас остался произвол в выборе первых двух членов разложения функций преобразования координат (10). Слагаемое нулевого порядка определим так, чтобы точка x_0 отображалась в начало координат $y_0 = (0, \ldots, 0)$. Слагаемое первого порядка по y^α можно использовать для фиксирования значения метрики в начале координат. Очевидно, что его всегда можно подобрать таким образом, чтобы метрика в точке x_0 была диагональной:

$$\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} := \operatorname{diag}(\underbrace{+\ldots+}_{p}\underbrace{-\ldots-}_{q}), \quad p+q=n. \tag{11}$$

При этом сигнатура метрики может быть произвольной. Таким образом, мы однозначно фиксировали все члены разложения функций преобразования координат (10). Это доказывает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть в окрестности произвольной точки $x_0 \in \mathbb{M}$ многообразия, на котором задана аффинная геометрия, метрика и связность заданы вещественно аналитическими функциями. Тогда существует такая система координат y^α, что точка x_0 соответствует началу координат, а также выполнены равенства (7) и (11). Такая система координат определена однозначно с точностью до $\mathbb{O}(p,q)$ вращений координат y^α.*

Система координат y^α в теореме 2 называется *нормальной*, *геодезической* или *римановой*.

Предложение 1. *Система координат y^α в некоторой окрестности начала координат является нормальной тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$${\Gamma_{\beta\gamma}}^{\alpha}(y) y^\beta y^\gamma = 0 \quad \text{и} \quad g_{\alpha\beta}(0) = \eta_{\alpha\beta}. \tag{12}$$

Доказательство. В нормальной системе координат геодезическая линия, проходящая через точку x_0 в направлении u_0, является прямой и задается параметрически в виде

$$y^\alpha(t) = u_0^\alpha t. \tag{13}$$

Подстановка этого выражения в уравнение для геодезических линий (2) дает

$$u_0^\alpha u_0^\beta \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0.$$

Умножив это уравнение на t^2, получим (12).

Обратно. Пусть выполнено уравнение (12). Разложим компоненты связности в ряд Тейлора вблизи начала координат. Тогда уравнение (12) эквивалентно цепочке равенств (7). Затем разложим уравнение геодезических и сами геодезические в ряды Тейлора по t. Приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем, что прямые линии и только они являются геодезическими линиями, проходящими через начало координат. □

Нормальная система координат обладает рядом замечательных свойств. В частности, в окрестности начала координат компоненты произвольного тензорного поля можно представить в виде ряда, коэффициенты которого зависят от ковариантных производных этого поля и тензоров кривизны, кручения и их ковариантных производных, вычисленных в точке x_0. Доказательство этого утверждения проводится конструктивно, путем явного построения соответствующего разложения.

Для доказательства нам понадобится предварительный результат.

Лемма 1. *Пусть связность* Γ *на* $\mathbb{M}$ *вещественно аналитична. Тогда в окрестности начала нормальной системы координат все производные*

$$\partial^{k-1}_{\{\gamma_1\ldots\gamma_{k-1}}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_k\}\alpha}{}^\beta, \tag{14}$$

где, в отличие от (7), симметризация проводится только по части нижних индексов, выражаются через тензоры кривизны, кручения и их ковариантные производные.

Доказательство. Лемма доказывается прямыми, но громоздкими вычислениями. Поэтому мы ограничимся только первыми двумя слагаемыми.

Используя свойства (7), нетрудно доказать равенства

$$\begin{aligned}
\partial_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_2\}\alpha}{}^\beta &= \frac{1}{3}\left(\partial_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\gamma_2\}}{}^\beta - \partial_\alpha\overset{\circ}{\Gamma}_{\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^\beta + 2\partial_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\alpha}{}^\beta\right),\\
\partial^2_{\{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_3\}\alpha}{}^\beta &= \frac{1}{3}\left(\partial^2_{\{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\gamma_3\}}{}^\beta - \partial^2_{\alpha\{\gamma_1}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_2\gamma_3\}}{}^\beta + 2\partial^2_{\{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\alpha}{}^\beta\right),
\end{aligned} \tag{15}$$

где $T_{\alpha\beta}{}^\gamma := \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma - \Gamma_{\beta\alpha}{}^\gamma$ – компоненты тензора кручения. Здесь и далее фигурные скобки обозначают симметризацию *только* по индексам γ_1, $\gamma_2, \ldots$

В точке x_0 аффинная связность полностью определяется тензором кручения

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\alpha}{}^\beta = \frac{1}{2}\overset{\circ}{T}_{\gamma\alpha}{}^\beta. \tag{16}$$

Далее, прямые вычисления приводят к следующим равенствам

$$\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^\beta = \partial_\alpha\overset{\circ}{\Gamma}_{\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^\beta - \partial_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\gamma_2\}}{}^\delta - \frac{1}{4}\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^\delta\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\delta}{}^\beta,$$

$$\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_2\gamma_3\}}{}^{\beta} = \partial^2_{\alpha\{\gamma_1}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_2\gamma_3\}}{}^{\beta} - \partial^2_{\{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\gamma_3\}}{}^{\beta} + \frac{2}{3}\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2}{}^{\delta}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^{\beta} + \\ + \frac{2}{3}\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^{\delta}\overset{\circ}{R}_{\delta\gamma_2\gamma_3\}}{}^{\beta} + \frac{1}{6}\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\alpha}{}^{\delta}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^{\beta} - \frac{1}{3}\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^{\delta}\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^{\beta},$$

$$\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\alpha}{}^{\beta} = \partial_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\alpha}{}^{\beta},$$

$$\nabla_{\{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\alpha}{}^{\beta} = \partial^2_{\{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\alpha}{}^{\beta} + \frac{1}{6}\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2}{}^{\delta}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^{\beta} + \frac{1}{6}\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^{\delta}\overset{\circ}{R}_{\delta\gamma_2\gamma_3\}}{}^{\beta} + \\ + \frac{1}{6}\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\alpha}{}^{\delta}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^{\gamma} + \frac{1}{6}\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^{\delta}\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^{\beta}.$$

Используя полученные формулы, правые части (15) можно записать в ковариантном виде

$$\partial_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_2\}\alpha}{}^{\beta} = \frac{1}{3}\left(-\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\beta} + 2\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\alpha}{}^{\beta} - \frac{1}{4}\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^{\delta}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\delta}{}^{\beta}\right), \tag{17}$$

$$\partial^2_{\{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_3\}\alpha}{}^{\beta} = \frac{1}{3}\left(-\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_2\gamma_3\}}{}^{\beta} + \frac{1}{3}\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2}{}^{\delta}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^{\beta} + \frac{1}{3}\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^{\delta}\overset{\circ}{R}_{\delta\gamma_2\gamma_3\}}{}^{\beta} + \right. \\ \left. + 2\nabla_{\{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\alpha}{}^{\beta} - \frac{1}{6}\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\alpha}{}^{\delta}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^{\beta} - \frac{2}{3}\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^{\delta}\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^{\beta}\right), \tag{18}$$

где, напомним, симметризация проводится только по индексам $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ Аналогичным образом все частные производные от связности вида (14) можно выразить через ковариантные объекты. □

Теперь можно доказать утверждение о разложении компонент произвольного тензорного поля в окрестности начала нормальной системы координат в ряд Тейлора. Для определенности рассмотрим произвольный ковариантный тензор второго ранга $A_{\alpha\beta}$ в нормальных координатах и разложим его в ряд Тейлора вблизи начала координат:

$$A_{\alpha\beta}(y) = \overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} + \partial_\gamma\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta}\, y^\gamma + \frac{1}{2}\partial^2_{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta}\, y^{\gamma_1}y^{\gamma_2} + \cdots . \tag{19}$$

Эта процедура явно нековариантна, потому что координаты y^γ не являются компонентами вектора, и коэффициенты этого ряда также нековариантны. Основным достоинством нормальных координат является то, что все коэффициенты этого ряда, тем не менее, можно выразить через ковариантные величины. Для этого необходимо выразить все частные производные через ковариантные и выразить компоненты аффинной связности в начале координат через тензор кривизны, кручения и их ковариантные производные. Начнем с первой производной

$$\partial_\gamma\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} = \nabla_\gamma\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\alpha}{}^{\delta}\overset{\circ}{A}_{\delta\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\beta}{}^{\delta}\overset{\circ}{A}_{\alpha\delta} = \nabla_\gamma\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\overset{\circ}{T}_{\gamma\alpha}{}^{\delta}\overset{\circ}{A}_{\delta\beta} + \frac{1}{2}\overset{\circ}{T}_{\gamma\beta}{}^{\delta}\overset{\circ}{A}_{\alpha\delta},$$

где мы воспользовались формулами (16). Прямые, но более громоздкие выкладки позволяют представить вторые частные производные также в ковариантном виде:

$$\partial^2_{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} = \nabla_{\{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2\}}\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} + \overset{\circ}{T}_{\{\gamma_1\alpha}{}^{\delta}\nabla_{\gamma_2\}}\overset{\circ}{A}_{\delta\beta} + \overset{\circ}{T}_{\{\gamma_1\beta}{}^{\delta}\nabla_{\gamma_2\}}\overset{\circ}{A}_{\alpha\delta} + \frac{1}{2}\overset{\circ}{T}_{\{\gamma_1\alpha}{}^{\delta}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}}{}^{\epsilon}\overset{\circ}{A}_{\delta\epsilon} + \\ + \frac{1}{3}\left(-\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\delta} + 2\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\alpha}{}^{\delta} - \overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^{\epsilon}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\epsilon}{}^{\delta}\right)\overset{\circ}{A}_{\delta\beta} + \\ + \frac{1}{3}\left(-\overset{\circ}{R}_{\beta\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\delta} + 2\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\beta}{}^{\delta} - \overset{\circ}{T}_{\beta\{\gamma_1}{}^{\epsilon}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\epsilon}{}^{\delta}\right)\overset{\circ}{A}_{\alpha\delta}.$$

Эту процедуру можно продолжить вплоть до произвольного порядка. Однако уже для третьего порядка формулы настолько громоздки, что нет смысла их приводить в явном виде.

Ясно, что аналогичное представление справедливо для тензорного поля произвольного ранга и типа. Поэтому справедлива следующая

Теорема 3. *Компоненты произвольного вещественно аналитического тензорного поля в некоторой окрестности начала нормальной системы координат представимы в виде ряда Тейлора, коэффициенты которого определяются ковариантными производными компонент данного тензорного поля, а также тензором кривизны, тензором кручения и их ковариантными производными, взятыми в начале координат.*

2. Нормальные координаты в (псевдо)римановом пространстве

Основное достоинство нормальных координат заключается в том, что вещественно аналитические тензорные поля в окрестности $\mathbb{U}_0 \subset \mathbb{M}$ произвольной точки $x_0 \in \mathbb{M}$ представляются в виде ряда Тейлора, коэффициенты которого задаются только ковариантными объектами: ковариантными производными данного тензорного поля, а также тензорами кривизны и кручения и их ковариантными производными. В предыдущем разделе были явно вычислены первые два члена этого ряда для ковариантного тензора второго ранга. Эти члены содержат много слагаемых с тензором кручения. Поэтому в (псевдо)римановой геометрии, где кручение тождественно равно нулю, формулы упрощаются, и можно продвинуться значительно дальше в вычислениях.

В (псевдо)римановой геометрии в нормальных координатах имеем $\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 0$, и ковариантная производная произвольного тензора в этой точке совпадает с частной производной. При этом в выражении для тензора кривизны пропадают квадратичные слагаемые по связности:

$$\overset{\circ}{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = \partial_\alpha \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\delta} - \partial_\beta \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\gamma}{}^{\delta}$$

или

$$\overset{\circ}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(\partial^2_{\alpha\gamma}\overset{\circ}{g}_{\beta\delta} - \partial^2_{\alpha\delta}\overset{\circ}{g}_{\beta\gamma} - \partial^2_{\beta\gamma}\overset{\circ}{g}_{\alpha\delta} + \partial^2_{\beta\delta}\overset{\circ}{g}_{\alpha\gamma}).$$

Вычисления, аналогичные тем, что привели к формулам (17), (18), в (псевдо)римановой геометрии дают равенства

$$\begin{aligned}
&\partial_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_2\}\alpha}{}^{\beta} = -\frac{1}{3}\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\beta},\\
&\partial^2_{\{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_3\}\alpha}{}^{\beta} = -\frac{1}{2}\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_2\gamma_3\}}{}^{\beta},\\
&\partial^3_{\{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_4\}\alpha}{}^{\beta} = -\frac{3}{5}\nabla_{\{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_3\gamma_4\}}{}^{\beta} - \frac{2}{15}\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2}{}^{\delta}\overset{\circ}{R}_{\delta\gamma_3\gamma_4\}}{}^{\beta},
\end{aligned} \tag{20}$$

где симметризация проводится только по индексам γ_1, $\gamma_2, \ldots$ Здесь мы дополнительно вычислили третью симметризованную производную от связности.

Разложим ковариантный тензор $A_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ произвольного ранга s в окрестности точки x_0 в ряд по нормальным координатам:

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_s} = \overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s} + \partial_\gamma \overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}\, y^\gamma + \frac{1}{2}\partial^2_{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}\, y^{\gamma_1} y^{\gamma_2} + \cdots .$$

Преобразовав частные производные в ковариантные и исключив слагаемые со связностью с помощью формул (20), получим следующий ряд:

$$
\begin{aligned}
A_{\alpha_1\ldots\alpha_s} &= \overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s} + \nabla_\gamma \overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s} y^\gamma + \\
&+ \frac{1}{2!}\left(\nabla_{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{s}\overset{\circ}{R}_{\alpha_k\gamma_1\gamma_2}{}^{\beta_k}\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\beta_k\ldots\alpha_s}\right) y^{\gamma_1}y^{\gamma_2} + \\
&+ \frac{1}{3!}\left(\nabla_{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2}\nabla_{\gamma_3}\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s} - \sum_{k=1}^{s}\overset{\circ}{R}_{\alpha_k\gamma_1\gamma_2}{}^{\beta_k}\nabla_{\gamma_3}\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\beta_k\ldots\alpha_s} - \right. \\
&\left. - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\nabla_{\gamma_1}\overset{\circ}{R}_{\alpha_k\gamma_2\gamma_3}{}^{\beta_k}\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\beta_k\ldots\alpha_s}\right) y^{\gamma_1}y^{\gamma_2}y^{\gamma_3} + \cdots . \qquad (21)
\end{aligned}
$$

Под знаком суммы подразумевается суммирование по немому индексу β_k, который стоит на k-м месте в $\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\beta_k\ldots\alpha_s}$. В полученном выражении симметризацию по индексам γ_1, $\gamma_2, \ldots$ можно не указывать, так как происходит свертка с симметричным произведением $y^{\gamma_1}\ldots y^{\gamma_k}$.

Аналогичные ряды можно построить для тензоров, содержащих произвольные наборы ковариантных и контравариантных индексов. Во всех случаях коэффициенты ряда вплоть до любого порядка могут быть выражены только через ковариантные объекты в точке x_0.

Нормальные координаты особенно удобны при анализе (псевдо)римановой метрики. В этом случае возникает дополнительное упрощение, поскольку все ковариантные производные от метрики тождественно равны нулю. Несложные вычисления показывают, что ряд (21) для метрики в нормальных координатах принимает вид

$$
\begin{aligned}
g_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_1\gamma_2\beta}\, y^{\gamma_1}y^{\gamma_2} - \frac{1}{3!}\nabla_{\gamma_1}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_2\gamma_3\beta}\, y^{\gamma_1}y^{\gamma_2}y^{\gamma_3} + \\
&+ \frac{1}{5!}\left(-6\nabla_{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_3\gamma_4\beta} + \frac{16}{3}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_1\gamma_2}{}^{\delta}\overset{\circ}{R}_{\delta\gamma_3\gamma_4\beta}\right) y^{\gamma_1}y^{\gamma_2}y^{\gamma_3}y^{\gamma_4} + \cdots , \qquad (22)
\end{aligned}
$$

где мы также вычислили слагаемое четвертого порядка.

3. (Псевдо)римановы пространства постоянной кривизны

Выражение для метрики в нормальных координатах (22) принимает особенно простой вид для пространств постоянной кривизны, которые определяются равенством $\nabla_\epsilon R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = 0$ (см., например, [2, 11]).

Предложение 2. *В пространстве постоянной кривизны (псевдо)риманова метрика в окрестности произвольной точки $x_0 \in \mathbb{M}$ в нормальных координатах y^α имеет вид*

$$
g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k+2}}{(2k+2)!}V_\alpha{}^{\epsilon_1}V_{\epsilon_1}{}^{\epsilon_2}\cdots V_{\epsilon_{k-1}}{}^{\epsilon_k}\eta_{\epsilon_k\beta}, \qquad (23)
$$

где

$$
V_{\epsilon_{k-1}}{}^{\epsilon_k} := \overset{\circ}{R}_{\epsilon_{k-1}\gamma_1\gamma_2}{}^{\epsilon_k}\, y^{\gamma_1}y^{\gamma_2}, \quad \epsilon_0 = \alpha.
$$

Доказательство. Сначала проверяем, что первые два члена суммы действительно совпадают с (22) для пространств постоянной кривизны. Далее доказательство проводится по индукции. □

Ряд для метрики (23) можно просуммировать для пространств постоянной кривизны специального вида

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{2K}{n(n-1)}\,(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}), \quad K = \mathrm{const}. \tag{24}$$

В этом случае в начале координат справедливо равенство

$$\overset{\circ}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{2K}{n(n-1)}\,(\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta} - \eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma}). \tag{25}$$

Тогда матрица $V_\alpha{}^\beta$ пропорциональна проекционному оператору:

$$V_\alpha{}^\beta = as\left(\delta_\alpha^\beta - \frac{y_\alpha y^\beta}{s}\right),$$

где

$$a := \frac{2K}{n(n-1)}, \quad s := y^\alpha y_\alpha, \quad y_\alpha := y^\beta \eta_{\alpha\beta},$$

и ряд для метрики принимает вид

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{y_\alpha y_\beta}{s}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k+2}}{(2k+2)!}\,(-as)^k. \tag{26}$$

Это выражение для метрики определено и для $s = 0$, так как ряд начинается с линейного по s члена. Теперь ряд можно просуммировать, что приводит к следующему выражению для метрики:

$$g_{\alpha\beta} = f(s)\Pi^{\mathrm{T}}_{\alpha\beta} + \Pi^{\mathrm{L}}_{\alpha\beta} = f\eta_{\alpha\beta} + (1-f)\,\frac{y_\alpha y_\beta}{s}, \tag{27}$$

где метрика представлена в виде суммы проекционных операторов

$$\Pi^{\mathrm{T}}_{\alpha\beta} := \eta_{\alpha\beta} - \frac{y_\alpha y_\beta}{s}, \quad \Pi^{\mathrm{L}}_{\alpha\beta} := \frac{y_\alpha y_\beta}{s},$$

а функция $f(s)$ определена рядом

$$f(s) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+2}}{(2k+2)!}\,(-as)^k, \tag{28}$$

который сходится на всей комплексной плоскости s. Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть на многообразии задана (псевдо)риманова метрика g класса $\mathcal{C}^2$ такая, что многообразие является пространством постоянной кривизны вида* (24)*. Тогда метрика g на $\mathbb{M}$ вещественно аналитична.*

Доказательство. Прямая проверка показывает, что вещественно аналитическая метрика (27), (28) описывает многообразие постоянной кривизны (24). Единственность метрики следует из единственности решения задачи Коши для уравнений геодезических. □

Ряд (28) можно просуммировать. Для псевдоримановых пространств положительной кривизны $K > 0$, $a > 0$ и функция $f(s)$ имеет вид

$$f(s) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2\sqrt{as}}{as}, & s > 0, \\ 1, & s = 0, \\ -\dfrac{\mathrm{sh}^2\sqrt{-as}}{as}, & s < 0. \end{cases} \tag{29}$$

Функция $f(s)$, как нетрудно проверить, аналитична.

Для псевдоримановых пространств отрицательной кривизны $K < 0$, $a < 0$ имеем равенство

$$f(s) = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{sh}^2\sqrt{-as}}{as}, & s > 0, \\ 1, & s = 0, \\ \dfrac{\sin^2\sqrt{as}}{as}, & s < 0. \end{cases} \tag{30}$$

Отметим, что на световом конусе, $s = 0$, метрика в обоих случаях совпадает с метрикой Минковского.

Если кривизна псевдориманова пространства постоянной кривизны равна нулю, $K = 0$, то $f = 1$.

Для римановых пространств постоянной кривизны всегда $s > 0$ и

$$f(s) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2\sqrt{as}}{as}, & K > 0, \\ 1, & K = 0, \\ -\dfrac{\operatorname{sh}^2\sqrt{-as}}{as}, & K < 0. \end{cases} \tag{31}$$

Тот факт, что функция $f(s)$ действительно приводит к ряду (26), проверяется непосредственно. Не зная функции $f(s)$, ряд (26) можно просуммировать следующим образом. Представление (26) задает тензорную структуру метрики. В статье [12] для метрики более общего вида, которая параметризуется двумя произвольными функциями $f(s)$ и $g(s)$, были вычислены символы Кристоффеля и тензор кривизны. Рассматриваемому случаю соответствует условие

$$g = \frac{(f + f's)^2}{f - afs} = 1,$$

где штрих обозначает дифференцирование по s. Последнее равенство задает обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $f(s)$. Это уравнение легко решается путем подстановки

$$U = fs \tag{32}$$

Постоянная интегрирования находится из условия $U(0) = 0$ (ограниченность метрики).

Рассмотрим римановы пространства постоянной кривизны, для которых $g_{\alpha\beta}(0) = \delta_{\alpha\beta}$. Метрика (27) принимает особенно простой вид в сферической системе координат евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. В сферических координатах $s = y^\alpha y^\beta \delta_{\alpha\beta} = r^2$, где r – радиальная координата, и справедливы тождества

$$\Pi^{\text{L}}_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta = dr^2, \quad \Pi^{\text{T}}_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta = r^2 d\Omega,$$

где $d\Omega$ – элемент телесного угла в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Таким образом, метрику пространств постоянной кривизны в нормальных координатах можно записать в виде

$$ds^2 = dr^2 + r^2 f d\Omega. \tag{33}$$

Проанализируем пространство $\mathbb{R}^n$ с метрикой (33) подробнее. Объем сферы радиуса $r\sqrt{f}$ в $\mathbb{R}^n$ с метрикой (33) равен

$$S_r^{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \left(r^2 f\right)^{(n-1)/2}.$$

Мы видим, что нули функции $f(r^2)$ определяют те сферы в $\mathbb{R}^n$, площадь поверхности которых равна нулю. Поскольку площадь поверхности является инвариантным объектом, то это означает, что на самом деле эти сферы соответствуют отдельным точкам пространства постоянной кривизны.

Нормальные координаты для многообразий постоянной кривизны определены для всех $\{y^\alpha\} \in \mathbb{R}^n$. При этом все геодезические, проходящие через точку x_0, полны, так как канонический параметр пробегает всю вещественную прямую $t \in (-\infty, \infty)$.

Проведенные рассуждения показывают, что справедлива

Теорема 5. *Нормальные координаты на (псевдо)римановом многообразии* $\mathbb{M}$ *постоянной кривизны вида* (24) *в каждой точке* $x_0 \in \mathbb{M}$ *задают гладкое сюрьективное отображение*

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{M}. \tag{34}$$

Для римановых пространств нулевой кривизны нормальные координаты совпадают с декартовыми.

В общем случае отображение (34) не является взаимно однозначным. Поэтому в области определения нормальных координат $\mathbb{R}^n$ можно задать отношение эквивалентности, отождествив те точки, которые отображаются на одну и ту же точку из $\mathbb{M}$. Таким образом, пространство постоянной кривизны вида (24) можно рассматривать как евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, в котором задано некоторое отношение эквивалентности между точками.

В качестве примера пространства постоянной положительной кривизны рассмотрим двумерную сферу $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ единичного радиуса. В этом случае $K = 1$, $a = 1$, $n = 2$. Функция $f(r^2)$ в полярных координатах на плоскости $\mathbb{R}^2$ имеет вид

$$f(r^2) = \frac{\sin^2 r}{r^2},$$

что соответствует метрике

$$ds^2 = dr^2 + \sin^2 r d\varphi^2.$$

Длина окружности на плоскости $\mathbb{R}^2$ радиуса r с центром в начале координат равна

$$L = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \, \sin r = 2\pi \sin r.$$

Отсюда следует, что окружности радиусов $r = \pi k$, $k = 1, 2, \ldots$, отображаются в одну точку сферы. При этом плоскость $\mathbb{R}^2$ бесконечное число раз «накрывает» сферу $\mathbb{S}^2$. Если условиться, что начало координат соответствует южному полюсу сферы, то при отображении $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ все окружности радиусов $r = 2\pi k$, $k = 0, 1, \ldots$, соответствуют южному полюсу, а все окружности радиусов $r = \pi + 2\pi k$ – северному. В рассматриваемом случае между точками евклидовой плоскости возникает отношение эквивалентности

$$y^\alpha \sim y^\alpha + \frac{y^\alpha}{r} 2\pi k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Нормальные координаты были определены таким образом, что геодезические линии в них совпадают с прямыми. В (псевдо)римановом пространстве экстремали совпадают с геодезическими, поэтому также являются прямыми. Проверим это

для пространств постоянной кривизны, которые были рассмотрены выше. Уравнения для экстремалей, определяемых метрикой (27), можно проинтегрировать. Символы Кристоффеля в рассматриваемом случае имеют вид

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \frac{f'}{f}\left(y_\alpha \Pi^{\mathrm{T}\gamma}_{\beta} + y_\beta \Pi^{\mathrm{T}\gamma}_{\alpha}\right) + \frac{1-f-f's}{s}\, y^\gamma \Pi^{\mathrm{T}}_{\alpha\beta}. \tag{35}$$

Отсюда вытекают уравнения для экстремалей

$$\ddot{y}^\alpha = -2\,\frac{f'}{f}\,\dot{y}^\alpha y_\beta \dot{y}^\beta + 2\,\frac{f'}{f}\,y^\alpha\,\frac{(y_\beta\dot{y}^\beta)^2}{s} + \\ + \frac{1-f-f's}{s^2}\,y^\alpha (y_\beta\dot{y}^\beta)^2 - \frac{1-f-f's}{s}\,y^\alpha(\dot{y}_\beta\dot{y}^\beta). \tag{36}$$

Эти уравнения имеют интеграл

$$C_0 = \dot{y}^\alpha\dot{y}^\beta g_{\alpha\beta} = \dot{y}_\alpha\dot{y}^\alpha f - \frac{(y_\alpha\dot{y}^\alpha)^2}{s}\,(f-1) = \mathrm{const}.$$

Прямая проверка показывает, что все прямые линии, проходящие через начало координат,

$$y^\alpha = v^\alpha t, \quad v^\alpha = \mathrm{const}, \quad t \in \mathbb{R},$$

являются экстремалями. Эти экстремали, очевидно, полны. Отметим, что символы Кристоффеля (35) равны нулю только в начале координат. В близких точках они отличны от нуля, и среди экстремалей прямыми являются только те, которые проходят через начало координат.

Уравнения для экстремалей (36) можно проинтегрировать и в общем случае, то есть найти те экстремали, которые не проходят через начало координат. Для этой цели рассмотрим зависимость $s := y^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta}$ от t. Учитывая равенства

$$\dot{s} = 2y_\alpha\dot{y}^\alpha,$$
$$\ddot{s} = 2y_\alpha\ddot{y}^\alpha + 2\dot{y}_\alpha\dot{y}^\alpha,$$

из уравнений для экстремалей получаем обыкновенное уравнение относительно $s(t)$:

$$\ddot{s} = \left(\frac{1}{2s} - \frac{U'}{2U}\right)\dot{s}^2 + \frac{2C_0U's}{U},$$

где функция $U(s)$ определена равенством (32),

$$U(s) = \frac{\sin^2\sqrt{as}}{a}.$$

Рассмотрим случай $C_0a > 0$. Введя новую переменную $z^2 = as$ при $as > 0$ и растянув канонический параметр $t \to t/\sqrt{C_0a}$, приходим к уравнению

$$\ddot{z} = (1-\dot{z}^2)\operatorname{ctg} z,$$

которое можно явно проинтегрировать. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\cos\sqrt{as} = \sqrt{1-\frac{1}{C_1}}\,\sin(t+t_0), \quad C_1 = \mathrm{const} > 1, \quad t_0 = \mathrm{const}.$$

Аналогично рассматриваются все остальные случаи.

Таким образом, для пространств постоянной кривизны специального вида (25) в нормальных координатах можно найти все экстремали и проанализировать их поведение.

4. Нормальные координаты и экспоненциальное отображение

Пусть задана аффинная связность Γ на многообразии $\mathbb{M}$ и $\gamma = x(t)$ – геодезическая. Если задана точка $x_0 \in \mathbb{M}$ и касательный вектор скорости u_0 принадлежит $\mathbb{T}_0(\mathbb{M})$, то существует единственная геодезическая, проходящая через x_0 с начальным вектором u_0, при этом канонический параметр определен с точностью до сдвига. Таким образом, каждая геодезическая однозначно определена парой (x_0, u_0).

Геодезическая линия $x(t)$ является интегральной кривой для векторного поля скорости $u(t) := \dot{x}(t)$. Тогда для полных геодезических определено экспоненциальное отображение

$$\exp(tu_0): \quad x_0 \mapsto x(t), \tag{37}$$

которое отображает начальную точку x_0 в точку $x(t)$. Если вектор скорости u_0 принимает все возможные направления в касательном пространстве $\mathbb{T}_0(\mathbb{M})$, то экспоненциальное отображение (37) можно рассматривать как отображение касательного пространства в многообразие

$$\exp(tu_0): \quad \mathbb{T}_0(\mathbb{M}) \ni \quad tu_0 \mapsto x(t) \quad \in \mathbb{M}, \tag{38}$$

для которого мы сохраним прежнее обозначение.

По построению каждая прямая в касательном пространстве $\mathbb{T}_0(\mathbb{M})$, проходящая через начало координат, отображается в соответствующую геодезическую. Ясно, что такое отображение можно построить для каждой точки $x_0 \in \mathbb{M}$.

Если геодезическая неполна, то экспоненциальное отображение (38) определено только для некоторого интервала значений канонического параметра $-\epsilon_1 < t < \epsilon_2$, где $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$. В результате экспоненциальное отображение будет определено в некоторой окрестности начала координат касательного пространства. Если связность на $\mathbb{M}$ из класса $\mathcal{C}^\infty$, то экспоненциальное отображение будет того же класса гладкости $\mathcal{C}^\infty$. Поскольку дифференциал экспоненциального отображения в точке x_0 невырожден, то существует окрестность $\mathbb{U}_0 \ni x_0$ такая, что экспоненциальное отображение (38) является диффеоморфизмом $\mathbb{U}_0 \to \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{T}_0(\mathbb{M})$, где $\mathbb{V}_0$ – некоторая окрестность касательного пространства, содержащая начало координат. Выберем координатный репер $\{\partial_\alpha\}$ в точке x_0 и предположим, что векторы скорости принимают значение на единичной сфере

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (u_0^\alpha)^2 = 1.$$

Теперь отождествим касательное пространство $\mathbb{T}_0(\mathbb{M})$ с евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$ естественным образом, отождествив координаты касательного вектора $\{tu_0^\alpha\}$ с декартовыми координатами точки $\{y^\alpha\}$ в $\mathbb{R}^n$. В результате получим координатную систему, определенную на $\mathbb{U}_0$.

Система координат в окрестности $\mathbb{U}_0 \subset \mathbb{M}$ точки x_0, определенная экспоненциальным отображением (38),

$$\varphi: \quad \mathbb{M} \supset \mathbb{U}_0 \ni \ \{x^\alpha(t)\} \mapsto \{y^\alpha := tu_0^\alpha\} \ \in \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{R}^n,$$

называется *нормальной*.

Подчеркнем, что нормальная система координат определена исключительно связностью, а не метрикой, которой вообще может не быть на многообразии.

Если на многообразии $\mathbb{M}$ помимо связности Γ задана также метрика g, то исходную систему координат x^α в окрестности точки x_0 можно всегда выбрать таким образом, что координатный базис ∂_α будем ортонормальным в данной точке

x_0, то есть $g_{\alpha\beta}(x_0) = \eta_{\alpha\beta}$. Мы всегда предполагаем, что для нормальной системы координат при наличии метрики это условие выполнено. Наконец, сформулируем теорему существования [13].

Теорема 6 (Уайтхед). *Пусть y^α – нормальная система координат в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{M}$. Определим окрестность $\mathbb{U}_0(\rho)$ точки x_0 равенством*

$$\sum_\alpha (y^\alpha)^2 < \rho^2.$$

Тогда существует положительное число r такое, что если $0 < \rho < r$,

1) *окрестность $\mathbb{U}_0(\rho)$ является геодезически выпуклой, то есть любые две точки из $\mathbb{U}_0(\rho)$ можно соединить геодезической, целиком лежащей в $\mathbb{U}_0(\rho)$;*

2) *каждая точка из $\mathbb{U}_0(\rho)$ имеет нормальную координатную окрестность, содержащую $\mathbb{U}_0(\rho)$.*

Заключение

Построены нормальные (римановы, геодезические) координаты для многообразий с заданной аффинной геометрией общего вида, которая определяется метрикой, кручением и тензором неметричности. Предполагается, что все поля задаются вещественно аналитическими компонентами. Дано локальное определение нормальных координат с помощью разложений компонент в ряды Тейлора и независимое определение с помощью экспоненциального отображения. Вычислены первые три члена степенного разложения ковариантного тензора второго ранга в нормальных координатах. Показано, что компоненты произвольного вещественно аналитического тензора в некоторой окрестности произвольной точки представляются в виде ряда Тейлора, коэффициенты которого выражаются через ковариантные производные и тензоры кривизны и кручения. Для специального класса (псевдо)римановых пространств постоянной кривизны при нулевом кручении и неметричности ряды Тейлора просуммированы и найдено явное выражение для метрики. Вычислены соответствующие символы Кристоффеля и проинтегрированы уравнения для геодезических в нормальных координатах.

Литература

1. *Риман Б.* О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии // Об основаниях геометрии: Сб. ст. – М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1956. – С. 309–341.
2. *Эйзенхарт Л.П.* Риманова геометрия. – М.: Иностр. лит., 1948. – 316 с.
3. *Картан Э.* Геометрия римановых пространств. – М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. – 244 с.
4. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1967. – 664 с.
5. *Петров А.З.* Новые методы в общей теории относительности. – М.: Наука, 1966. – 496 с.
6. *Катанаев М.О.* Геометрические методы в математической физике. Приложения в квантовой механике. Часть 1. – М.: МИАН, 2015. – 176 с.
7. *Катанаев М.О.* Геометрические методы в математической физике. Приложения в квантовой механике. Часть 2. – М.: МИАН, 2015. – 185 с.
8. *Eisenhart L.P.* Non-Riemannian Geometry. – N. Y.: Am. Math. Soc., 1927. – 184 p.
9. *Схоутен И.А., Стройк Д.Дж.* Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т. I. – М.-Л.: ГОНТИ, 1939. – 177 с.

10. *Fermi E.* Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria // Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fiz. Mat. Nat. – 1922. – V. 31. – P. 21–23, 51–52, 101–103.

11. *Катанаев М.О.* Векторные поля Киллинга и однородная и изотропная вселенная // Усп. физ. наук. – 2016. – Т. 186 – С. 763–775. – doi: 10.3367/UFNr.2016.05.037808, arXiv: 1610.05628[gr-qc].

12. *Катанаев М.О.* Лоренц-инвариантные вакуумные решения в общей теории относительности // Труды МИАН. – 2015. – Т. 290. – С. 149–153. arXiv:1602.06331.

13. *Whitehead J.H.C.* Convex regions in the geometry of paths // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1932. – V. 3. – C. 33–42.

Поступила в редакцию
25.04.16

Катанаев Михаил Орионович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
ул. Губкина, д. 8, г. Москва, 119991, Россия
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *katanaev@mi.ras.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

2017, vol. 159, no. 1, pp. 47–63

Normal Coordinates in Affine Geometry

M.O. Katanaev

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia
Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: *katanaev@mi.ras.ru*

Received April 25, 2016

Abstract

Manifolds of affine geometry of general type with nontrivial metric, torsion, and nonmetricity tensor have been considered. These manifolds have recently attracted much interest due to the construction of generalized gravity models. Assuming that all geometric objects are real analytic, normal coordinates have been constructed in the neighborhood of an arbitrary point by decomposing the connection and metric components to the Taylor series. It has been shown that normal coordinates generalize the Cartesian coordinates in the Euclidean space to the case of manifolds with affine geometry of general type. Components of an arbitrary real analytic tensor field in the neighborhood of each point can be expressed as power series with coefficients constructed from the covariant derivatives, curvature and torsion tensors computed at the decomposition point. The power series have been explicitly summed for constant curvature spaces, and an expression for the metric in normal coordinates has been found. It has

been shown that normal coordinates define the smooth surjective map of the Euclidean spaces to constant curvature manifolds. Equations for extremals in the constant curvature spaces have been explicitly integrated in normal coordinates. The relation between normal coordinates and exponential map has been analyzed.

Keywords: normal coordinates, Gaussian coordinates, Riemannian coordinates

References

1. Riemann B. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, *Nachrichten von der Gesellschaft von Wissenschaften*, Göttingen, 1868, vol. 13. pp. 133–152. (In German)
2. Eisenhart L.P. Riemannian Geometry. Princeton, Princeton Univ. Press, 1926, 252 p.
3. Cartan É. Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann. Paris, Gauthier–Villars, 1928. 273 p. (In French)
4. Rashevskii P.K. Riemannian Geometry and Tensor Analysis. Moscow, Nauka, 1967. 664 p. (In Russian)
5. Petrov A.Z. New Methods in General Relativity Theory. Moscow, Nauka, 1966. 496 p. (In Russian)
6. Katanaev M.O. Geometrical Methods in Mathematical Physics. Applications in Quantum Mechanics. Part 1. Moscow, MIAN, 2015. 176 p. (In Russian)
7. Katanaev M.O. Geometrical Methods in Mathematical Physics. Applications in Quantum Mechanics. Part 2. Moscow, MIAN, 2015. 185 p. (In Russian)
8. Eisenhart L.P. Non-Riemannian Geometry. New York, Am. Math. Soc., 1927. 184 p.
9. Schouten J.A., Struik D.J. Einfuhrung in die neueren Methoden der Differntialgeometrie. B. I. Groningen, Noordhoff, 1935. 338 p. (In German)
10. Fermi E. Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria. *Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fiz. Mat. Nat.*, 1922, vol. 31, pp. 21–23, 51–52, 101–103. (In Italian)
11. Katanaev M.O. Killing vector fields and a homogeneous isotropic universe. *Phys. Usp.*, 2016, vol. 59, no. 7, pp. 689–700. doi: 10.3367/UFNr2016.05.037808.
12. Katanaev M.O. Lorentz invariant vacuum solutions in general relativity. *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 290, no. 1, pp. 138–142. doi: 10.1134/S0081543815060127.
13. Whitehead J.H.C. Convex regions in the geometry of paths. *Q. J. Math., Oxford Ser.*, 1932, vol. 3, pp. 33–42.

⟨ ***Для цитирования:*** *Катанаев М.О.* Нормальные координаты в аффинной геометрии // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 1. – С. 47–63. ⟩

⟨ ***For citation:*** Katanaev M.O. Normal coordinates in affine geometry. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 1, pp. 47–63. (In Russian) ⟩