И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1998 МАТЕМАТИКА № 2 (429)

УДК 517.518

Г.В. АРУТЮНЯНЦ

О ЛОКАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ КОНСТРУКЦИИ БЕЗИКОВИЧА

Конструкция Безиковича впервые появилась в работе А.С.Безиковича, посвященной решению проблемы Какейя "о развороте иглы". Как оказалось в дальнейшем, эта конструкция в силу ряда экстремальных свойств имеет важные применения в теории дифференцирования интегралов и в гармоническом анализе. В частности, с ее помощью устанавливается неплотностность базиса, состоящего из всевозможных прямоугольников на плоскости (см. [1]), а также была опровергнута известная гипотеза диска [2].

В свое время конструкция Безиковича модифицировалась Перроном, Радемахером, Шенбергом, Бургейном и другими авторами. Однако, несмотря на важность рассматриваемой конструкции, построение ее, как правило, сводилось к некоторому геометрическому преобразованию, которое итерировалось необходимое количество раз. Просмотреть локальную структуру полученного множества представлялось весьма затруднительным (в силу итеративности метода).

Нам удалось так подобрать параметры конструкции,чтобы результат построения можно было записать в явном виде, что позволяет достаточно удовлетворительно, с нашей точки зрения, проследить локальную структуру конструкции Безиковича и просчитать множество направлений сторон образующих ее треугольников.

Приведем некоторые необходимые определения. Будем говорить, что дифференциальный базис $\Re$ обладает свойством плотности, если для каждого измеримого множества E почти в каждой точке $x \in R^2$ для произвольной стягивающейся к x последовательности $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$ из $\Re$ справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|E\cap R_k|}{|R_k|} = \chi_E(x).$$

Далее, для каждой функции $f \in L_{\mathrm{loc}}(R^2)$ положим

$$M_{\Re} f(x) = \sup_{x\in R\in\Re} |R|^{-1} \int_R |f(y)|dy.$$

В [3] был доказан следующий критерий.

Теорема A. *Пусть* $\Re$ — *инвариантный относительно гомотетии дифференциальный базис. Тогда следующие два свойства эквивалентны*:

(i) $\Re$ *является плотностным базисом*;

(ii) *для каждого* $\lambda \in (0;1)$ *найдется положительная константа* $c(\lambda)$ *такая, что для любого ограниченного измеримого множества* E *выполняется неравенство*

$$|\{M_{\Re}\chi_E > \lambda\}| \le c(\lambda)|E|.$$

В той же работе было доказано, что плотность базиса $\Re$ равносильна тому, что $\Re$ дифференцирует L^{∞}. Таким образом, если существуют последовательность множеств $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\lambda \in (0;1)$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{|\{M_{\Re}\chi_{E_n} > \lambda\}|}{|E_n|} = +\infty,$$

то $\Re$ является не плотностным, т.е. не дифференцирует L^∞. Будем при этом говорить, что последовательность $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ обладает свойством Безиковича относительно базиса $\Re$.

Зафиксируем теперь произвольное число $\alpha > 0$. Рассмотрим в плоскости последовательность горизонтальных прямых $\{a_k\}_{k=1}^\infty$, расположенных в одной полуплоскости относительно прямой a_1, причем $\operatorname{dist}(a_1, a_k) = (k-1)\alpha$ $(k \in N)$. Договоримся под уровнем с номером s понимать полосу, заключенную между прямыми a_s и a_{s+1}.

Рассмотрим на первом уровне равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом, лежащим на a_1 и равным α. Продолжим другой катет и гипотенузу до пересечения с a_3 и соединим полученные точки пересечения с вершинами треугольника, лежащими на a_1. Описанное построение будем называть *процедурой роста*.

Легко проверить, что после применения процедуры роста на втором уровне получим два треугольника, а на первом — параллелограмм с длиной основания и высотой, равными α. Обозначим его через $\Pi(1,1,\alpha)$. Если к каждому из треугольников, полученных на втором уровне, опять применить процедуру роста, то на третьем уровне получим уже четыре треугольника, а на втором — два параллелограмма $\Pi(2,1,\alpha)$, $\Pi(2,2,\alpha)$, при этом длина основания каждого параллелограмма будет равняться $\alpha/2$, а высота α (рис.1), и т.д.

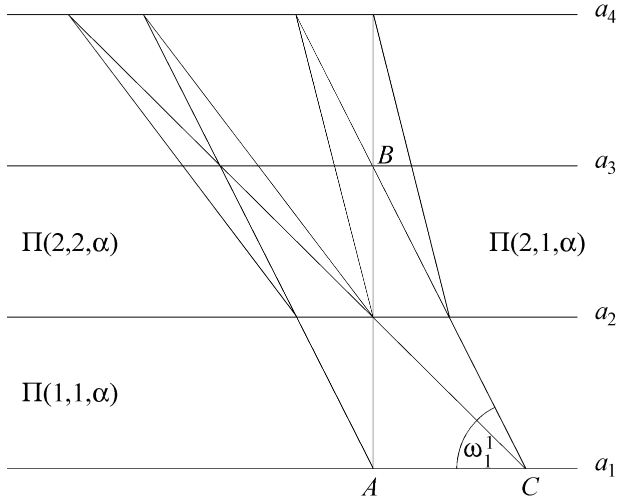

Рис. 1

Вообще, если рассмотреть k-й уровень, $k > 1$, то на нем в результате применения процедуры роста на предыдущем уровне получится 2^{k-1} треугольников. Если к каждому из них опять применить процедуру роста, то получится на k-м уровне 2^{k-1} параллелограммов $\{\Pi(k,\nu,\alpha)\}_{\nu=1}^{2^{k-1}}$, каждый из которых имеет основание, равное $\alpha\, 2^{k-1}$, а высоту α (нумерация параллелограммов на фиксированном уровне идет справа налево).

Для любого $n \in N$ положим

$$E(n,\alpha) = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{\nu=1}^{2^{k-1}} \Pi(k,\nu,\alpha).$$

При этом из геометрических соображений ясно, что для каждого параллелограмма $\Pi(k,\nu,\alpha)$ треугольник, образованный пересечением трех прямых, две из которых проходят через середину стороны параллелограмма $\Pi(k,\nu,\alpha)$, лежащей на a_{k+1}, и соответственно через вершины его основания, а третьей является прямая a_1, полностью содержится в $E(n,\alpha)$. Обозначим этот треугольник через $\triangle_\nu^k$.

Таким образом, с помощью процедуры роста мы построили последовательность множеств $\{E(n,\alpha)\}_{n=1}^\infty$. Справедлива следующая теорема, формулировке которой предпошлем вспомогательный рисунок.

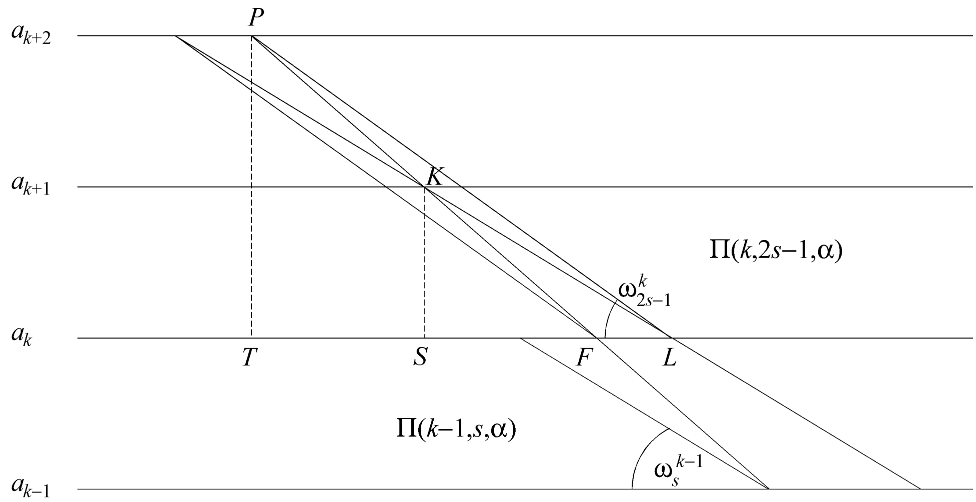

Рис. 2

Теорема 1. *Имеют место три утверждения*:

(i) $\{E(n,\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ *обладает свойством Безиковича относительно дифференциального базиса* $\Re^0$, *состоящего из всевозможных параллелограммов*;

(ii) $|E(n,\alpha)| = \alpha^2 n$;

(iii) *каждый параллелограмм* $\Pi(k,\nu,\alpha)$ *наклонен к прямой* a_1 *под углом* ω_ν^k, *где* $\operatorname{tg}\omega_\nu^k = 2^k/(2\nu-1)$.

Доказательство. Докажем сначала (iii), используя метод математической индукции по k (т.е. по номеру уровня). При $k=1$ утверждение очевидно, т.к. треугольник ABC (рис.1) прямоугольный, а потому $\operatorname{tg}\omega_1^1 = |AB|/|AC| = 2$.

Пусть теперь $k>1$. Предположим, что утверждение (iii) справедливо для каждого параллелограмма с уровня $k-1$. Пусть $\Pi(k-1,s,\alpha)$ произвольный из них ($1\le s\le 2^{k-1}$) (рис. 2). В результате применения процедуры роста над ним "выросли" два параллелограмма $\Pi(k,2s-1,\alpha)$, $\Pi(k,2s,\alpha)$. Докажем справедливость формулы, например, для $\Pi(k,2s-1,\alpha)$ (рис. 2).

Из прямоугольного треугольника KSL (рис. 2) получим $|SL| = |KS|/\operatorname{tg}\omega_s^{k-1}$. Так как $|FL| = \alpha\, 2^{1-k}$ и $|TS| = |SF|$, то, рассматривая треугольник TPL, имеем

$$\operatorname{tg}\omega_{2s-1}^k = \frac{|TP|}{|TL|} = \frac{|TP|}{|TS|+|SF|+|FL|} = \frac{|TP|}{2|SL|-|FL|} = \frac{2\alpha}{2|KS|/\operatorname{tg}\omega_s^{k-1} - \alpha\, 2^{1-k}} = \frac{2^k}{2(2s-1)-1}.$$

Совершенно аналогично доказывается (iii) и для параллелограмма $\Pi(j,2s,\alpha)$. Итак, (iii) доказано.

Из геометрических соображений ясно, что параллелограммы на фиксированном уровне попарно не имеют общих внутренних точек, а потому

$$|E(n,\alpha)| = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{2^{k-1}} |\Pi(k,\nu,\alpha)| = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{2^{k-1}} \alpha\, 2^{1-k}\alpha = \alpha^2 n.$$

Зафиксируем теперь произвольное множество $E(n,\alpha)$ и параллелограмм $\Pi(n,\nu,\alpha)$, $\nu = 1,\dots,2^{n-1}$. Проведем через вершины основания треугольника $\triangle_\nu^n$ прямые, параллельные боковым сторонам параллелограмма $\Pi(n,\nu,\alpha)$ (рис. 3).

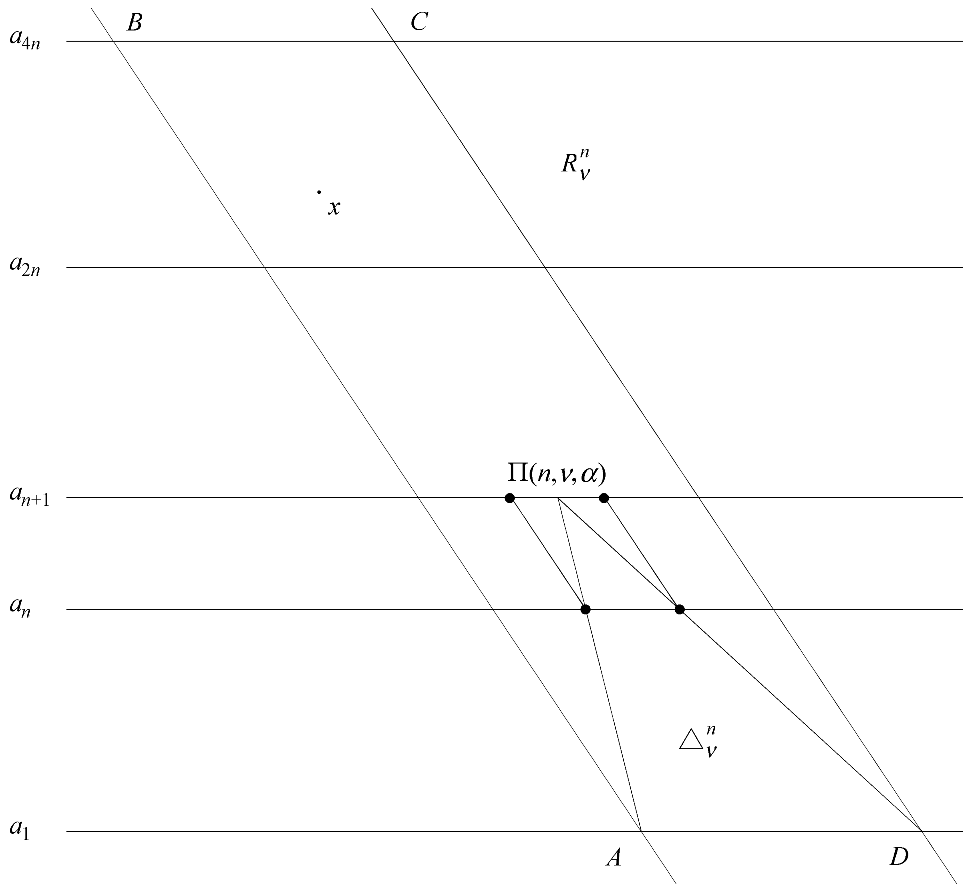

Рис. 3

Между прямыми a_{2n} и a_{4n} получится параллелограмм R_ν^n. При этом $|R_\nu^n| = 2^{2-n}n^2\alpha^2$. Очевидно, $R_\nu^n \bigcap R_j^n = \emptyset$ $(\nu \neq j)$. Справедливость последнего соотношения сразу вытекает из доказанного условия (iii) и того факта, что параллелограммы на фиксированном уровне попарно не имеют общих внутренних точек.

Докажем, что

$$\{M_{\Re^0}\chi_{E(n,\alpha)} \geq 1/8\} \supset \bigcup_{\nu=1}^{2^{n-1}} R_\nu^n. \tag{1}$$

Действительно, пусть $x \in R_\nu^n$. Тогда существует такой параллелограмм $\widehat{R}_\nu^n \in \Re^0(x)$ $(\widehat{R}_\nu^n = ABCD$, см. рис. 3), что

$$\frac{1}{|\widehat{R}_\nu^n|}\int_{\widehat{R}_\nu^n} \chi_{E(n,\alpha)} \geq \frac{|\triangle_\nu^n|}{|\widehat{R}_\nu^n|} = \frac{n\alpha|AD|}{2|AD|(4n-1)\alpha} \geq \frac{1}{8}.$$

Здесь использовано включение $\triangle_\nu^n \subset E(n,\alpha)$. Учитывая теперь (1) и дизъюнктность системы $\{R_\nu^n\}_{\nu=1}^{2^{n-1}}$, получим

$$\frac{|\{M_{\Re^0}\chi_{E(n,\alpha)} \geq 1/8\}|}{|E(n,\alpha)|} \geq \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{2^{n-1}} |R_\nu^n|}{|E(n,\alpha)|} = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{2^{n-1}} 2^{2-n}n^2\alpha^2}{n\alpha^2} = 2n. \quad \Box$$

Замечание. Утверждение (i) теоремы верно также и для дифференциального базиса, состоящего из всевозможных прямоугольников (достаточно взять прямоугольник, содержащий параллелограмм $\widehat{R}_\nu^n$ с наименьшей площадью, стороны которого параллельны боковым сторонам этого параллелограмма).

В заключение автор считает приятным долгом выразить глубокую благодарность А.М. Стоколосу за постановку задачи, полезные обсуждения и постоянное внимание к работам автора.

Литература

1. Гусман М. *Дифференцирование интегралов в* R^n. – М.: Мир, 1978.
2. Fefferman C. *The multiplier problem for the ball* // Ann. Math. – 1971. – V. 94. – P. 330–336.
3. Busemann H., Feller W. *Zur Differentiation der Lebesgueschen Integrale* // Fundam. Math. – 1934. – V. 22. – P. 226–256.

Одесский государственный университет

Поступила 18.05.1995