ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 11 (534)

УДК 517.945

В.И. УШАКОВ, А.В. КЛОЧКОВ

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ВРЕМЕНИ

Поведение свободной границы задачи Стефана с граничными условиями второго рода в одномерном случае изучалось в [1]. Этот случай наиболее близок к задаче Коши, поскольку тепловой поток явно выражается через входные данные задачи. Установлено [1], что если тепловой поток возрастает "не слишком быстро", то объем ("длина") "фазы воды" пропорционален поступившему в область количеству тепла. В данной работе показано, что для задачи Коши–Стефана этот результат сохранился и в многомерном случае. Кроме того, установлено, что если количество тепла возрастает быстрее, чем $t^{n/2}$, то зависимость объема "фазы воды" от количества тепла приобретает логарифмический характер. Задача с граничными условиями первого рода изучалась в [2], [3] лишь для случая, когда объем "фазы воды" растет не быстрее, чем $t^{n/2}$.

Пусть Q — область в R^n. Однофазная задача Стефана состоит в следующем: требуется найти область $\Omega \subset \{t > 0\} \times Q$ (область воды) и функцию $U(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$ (температуру), удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \Delta U = f, \quad (t,x) \in \Omega, \tag{1}$$

начальному условию

$$U|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in D_0 \tag{2}$$

(при этом предполагается известной область D_0, занятая водой в начальный момент времени $t = 0$), *граничным условиям* на свободной границе $S = \partial\Omega \cap \{\{t > 0\} \times Q\}$

$$U = 0, \quad (t,x) \in S, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \nu_i = K\nu_0, \quad (t,x) \in S, \quad K > 0, \tag{4}$$

где $\nu = (\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ — единичный вектор внешней (по отношению к Ω) нормали к $\partial\Omega$. Определение обобщенного решения с помощью интегрального тождества было введено в [4]–[6] (для многофазной задачи Стефана).

В данной статье рассмотрен случай задачи Коши–Стефана ($Q = \mathrm{R}^n$). Будем предполагать, что D_0 ограничена, f — неотрицательная функция, $f \in L_2([0,T] \times \mathrm{R}^n)$ для всех $T > 0$, φ — неотрицательная функция, $\varphi \in L_\infty(\mathrm{R}^n) \cap W_2^1(\mathrm{R}^n)$; $\operatorname{supp} f \subset D_0 \times [0,T]$, $\operatorname{supp}\varphi \subset D_0$, функция f отлична от тождественного нуля. Следуя [4], функцию будем называть обобщенным решением задачи (1)–(4), если для любых $T > 0$ функция $U \in W_2^{0,1}((0,T) \times \mathrm{R}^n)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^T \int_{\mathrm{R}^n} \Big(-\widehat{U} \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_i} \Big) dx\, dt = \int_0^T \int_{D_0} fV\, dx\, dt + \int_{D_0} (\varphi + K) dx \tag{5}$$

для всех $V \in C_0^\infty(\mathrm{R}^{n+1})$ таких, что $V|_{t=T} = 0$, где $\widehat{U}$ понимается как многозначное отображение, именно, $\widehat{U} = U$ при $U < 0$, $\widehat{U} = U + K$ при $U > 0$, $\widehat{U} = [0, K]$ при $U = 0$.

Существование и единственность обобщенного решения установлены в [2], [6], [7].

Обозначим через Ω множество всех тех $(t,x) \in \{t > 0\} \times \mathrm{R}^n$, для которых $U(t,x) > 0$. Из результатов работ [3], [8], [9] следует, что область Ω расширяется с увеличением времени (т. е. $D_{t_1} \subset D_{t_2}$ для любых t_1, t_2, $t_1 < t_2$, где $D_t = \{x \in \mathrm{R}^n \mid (t,x) \in \Omega\}$), $U(t,x)$ и $\widehat{U}(t,x)$ равны нулю почти всюду вне Ω. Интегральное тождество (5) означает (напр., [10]), что функция $\widehat{U}(t,x) = U(t,x) + K$ является обобщенным решением задачи

$$\frac{\partial \widehat{U}}{\partial t} - \Delta \widehat{U} = f, \quad (t,x) \in \Omega, \tag{6}$$

$$\nu_0 \widehat{U} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \widehat{U}}{\partial x_i} \nu_i = 0, \quad (t,x) \in \Gamma, \quad t > 0, \tag{7}$$

$$\widehat{U}|_{t=0} = \varphi(x) + K, \quad x \in D_0. \tag{8}$$

Пусть $E(t) = \int\limits_0^t \int\limits_{D_\tau} f(\tau,x)dx\,d\tau$, $\Lambda = \Lambda(t)$ — решение уравнения

$$\frac{1}{\Lambda^n} \int_0^t \int_{D_\tau} f(\tau,x) e^{-\frac{\Lambda^2}{t-\tau}} dx\,d\tau = 1. \tag{9}$$

Легко видеть, что $\left(\frac{\Lambda}{\sqrt{t}}\right)^n e^{\frac{\Lambda^2}{t}} \leq \frac{E(t)}{t^{\frac{n}{2}}}$ и $\left(\frac{\Lambda}{\sqrt{t}}\right)^n e^{\frac{2\Lambda^2}{t}} \geq \frac{E(\frac{t}{2})}{t^{\frac{n}{2}}}$.

Следовательно, если функция $\frac{E(t)}{t^{\frac{n}{2}}}$ ограничена сверху при достаточно больших t, то

$$c_0 E^{\frac{1}{n}}(\tfrac{t}{2}) \leq \Lambda(t) \leq E^{\frac{1}{n}}(t). \tag{10}$$

Если же $\frac{E(t)}{t^{\frac{n}{2}}}$ ограничена снизу, то при достаточно больших t имеем

$$c_1 \sqrt{t \ln\left(\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} E\left(\frac{t}{2}\right)\right)} \leq \Lambda(t) \leq c_2 \sqrt{t \ln\left(\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} E(t)\right)}.$$

Теорема. *Пусть $U(t)$ — решение задачи* (1)–(4), $R(t) = \sup\limits_{x \in D_t} |x|$, $r(t) = \inf\limits_{x \notin D_t} |x|$.

Тогда

а) *функция $R(t) - r(t)$ ограничена,*

б) *$R(t) \leq C(E(t))^{1/n}$ для всех достаточно больших t,*

в) *$r(t) \geq c\Lambda(t)$ для всех достаточно больших t,*

г) *если при достаточно больших t функция $\frac{E(t)}{t^{\frac{n}{2}}}$ ограничена снизу и $\frac{E(t)}{t^{\varepsilon}}$ не убывает при некотором $\varepsilon > 0$, то $R(t) \leq c\Lambda(t)$, постоянные c и C не зависят от времени.*

Доказательство. а) Пусть P — полупространство в R^n, содержащее D_0. Для любой точки $x \in \mathrm{R}^n$ через $S_p x$ будем обозначать точку, симметричную x относительно ∂P. И пусть $\widetilde{U}(t,x) = U(t, S_p x)$. Очевидно, $\widetilde{U}$ есть решение задачи Стефана, аналогичной (1)–(4) с $\widetilde{f}(t,x) = f(t, S_p x)$, $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(S_p x)$. Для всех $x \in P$ $f(t,x) \geq 0 = \widetilde{f}(t,x)$, $\varphi(t,x) \geq 0 = \widetilde{\varphi}(x)$, причем на ∂P имеет место равенство $U(t,x) = \widetilde{U}(t,x)$. Следовательно, $U(t,x) \geq \widetilde{U}(t,x)$ для всех $x \in P$. Из этого свойства с помощью простых геометрических рассуждений (подробнее см. [11]) следует ограниченность функции $R(t) - r(t)$. Отметим, что приведенное здесь рассуждение содержится в [11] для задачи Стефана с краевым условием первого рода на неподвижной границе с функцией $f(t,x)$ тождественно равной нулю.

б) Поскольку $\widehat{U}(t,x)$ есть обобщенное решение задачи (6)–(8), то в силу

$$U(t,x) = \int_\Omega G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\tau d\xi + \int_D G\varphi(\xi) d\xi \quad (\text{см. [10]})$$

справедливо

$$\widehat{U}(t,x)=\int_0^t\int_{D_\tau}G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\tau\,d\xi+\int_{D_0}G(t,x;0,\xi)(\varphi(\xi)+K)d\xi. \tag{11}$$

Как показано в [12], для решения задачи (1)–(4) справедлив закон "сохранения энергии"

$$\int_{D_t}U(t,x)dx=\int_{D_{t_1}}\varphi(x)dx$$

для всех $t>t_1$. Следовательно,

$$\int_{D_t}\int_{D_{t_1}}\varphi(\xi)G(t,x;t_1,\xi)d\xi\,dx=\int_{D_{t_1}}\varphi(x)dx,$$

т. е. при $t>t_1$, $\xi\in D_{t_1}$

$$\int_{D_{t_1}}G(t,x;t_1,\xi)dx=1,\quad x\in D_{t_1}. \tag{12}$$

Интегрируя (11) по D_t, получим

$$\int_{D_t}U(t,x)dx+K\operatorname{mes}D_t=E(t)+\int_{D_0}\varphi(\xi)d\xi+K\operatorname{mes}D_0. \tag{13}$$

Поэтому $\operatorname{mes}D_t\le\operatorname{mes}D_0+\frac{1}{K}(E(t)+\int\limits_{D_0}\varphi(\xi)d\xi)$. Учитывая утверждение а), из последнего неравенства следует, что $R(t)\le C(E(t))^{1/n}$ для достаточно больших t.

в) Пусть $\widetilde{U}(t,x)$ — решение задачи Коши (1)–(2) (функция f и φ продолжены нулем вне D_0)

$$\widetilde{U}(t,x)=\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n}\left(\int_0^t\int_{D_0}\frac{f(\tau,\xi)}{(t-\tau)^{n/2}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}d\tau\,d\xi+\int_{D_0}\frac{\varphi(\xi)}{t^{n/2}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}d\xi\right).$$

В силу принципов максимума $U(t,x)\le\widetilde{U}(t,x)$ для почти всех $x\in\mathrm{R}^n$, $t>0$. Из "закона сохранения энергии" для задачи Коши (аналогично (12)) следует

$$\int_{\mathrm{R}^n}\widetilde{U}(t,x)dx=E(t)+\int_{D_0}\varphi(\xi)d\xi.$$

Откуда, учитывая (13), получим

$$K\operatorname{mes}D_t\ge\int_{\mathrm{R}^n\setminus D_t}\widetilde{U}(t,x)dx+K\operatorname{mes}D_0.$$

Поскольку D_t содержится в шаре радиуса $R(t)$, то

$$\int_{\mathrm{R}^n\setminus D_t}\widetilde{U}(t,x)dx\ge\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n}\int_{|x|>R(t)}\int_0^t\int_{D_0}\frac{f(\tau,\xi)}{(t-\tau)^{n/2}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}d\xi\,d\tau\,dx.$$

Следовательно,

$$\operatorname{mes}D_t\ge\frac{1}{K(2\sqrt{\pi})^n}\int_0^t\int_{D_0}\frac{f(\tau,\xi)}{(t-\tau)^{n/2}}\int_{|x|>R(t)}e^{-\frac{(|x|+R(t))^2}{4(t-\tau)}}dx\,d\xi\,d\tau.$$

Так как

$$\frac{1}{(t-\tau)^{n/2}}\int_{|x|>R(t)}e^{-\frac{(|x|+R(t))^2}{4(t-\tau)}}dx\ge\frac{1}{(t-\tau)^{n/2}}\int_{|x|>R(t)}e^{-\frac{|x|^2}{t-\tau}}dx\ge\mu_2e^{-\mu_1\frac{R^2(t)}{t-\tau}},$$

где μ_1 и μ_2 зависят только от n, то

$$\operatorname{mes}D_t\ge\frac{\mu_2}{K(2\sqrt{\pi})^n}\int_0^t\int_{D_0}f(\tau,\xi)e^{-\mu_1\frac{R^2(t)}{t-\tau}}d\xi\,d\tau.$$

Учитывая, что $\operatorname{mes} D_t \le \omega_n R^n(t)$, где ω_n — объем единичного шара в R^n, получим

$$\frac{\mu_2}{K\omega_n R^n(t)(2\sqrt{\pi})^n}\int_0^t\int_{D_0} f(\tau,\xi)e^{-\mu_1\frac{R^2(t)}{t-\tau}}d\xi\,d\tau \le 1.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{(\mu_3 R(t))^n}\int_0^t\int_{D_0} f(\tau,\xi)e^{-\frac{(\mu_3 R(t))^2}{t-\tau}}d\xi\,d\tau \le 1,$$

где $\mu_3 = \max\Big(\sqrt{\mu_1}, \frac{2\sqrt{\pi}(K\omega_n)^{1/n}}{\mu_2^{1/n}}\Big)$. Сравнивая последнее неравенство с (9) и учитывая утверждение а), получим требуемое неравенство.

г) Поскольку $\widehat{U}(t,x) = U(t,x) + K \ge K$, то для любого $A \subset D_t$ и $q \in [1,2]$

$$K(\operatorname{mes} A)^{\frac{1}{q}} \le \Big(\int_A \widehat{U}^q(t,x)dx\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{14}$$

Из (11) следует

$$\Big(\int_A \widehat{U}^q(t,x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \le \Big(\int_A\Big(\int_0^t\int_{D_\tau} G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\tau\,d\xi\Big)^q dx\Big)^{\frac{1}{q}} + \\ + \Big(\int_A\Big(\int_{D_0} G(t,x;0,\xi)(\varphi(\xi)+K)d\xi\Big)^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского (см., напр., [13]), получим

$$\Big(\int_A \widehat{U}^q(t,x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \le \int_0^t\int_{D_\tau} f(\tau,\xi)\Big(\int_A G^q(t,x;\tau,\xi)dx\Big)^{\frac{1}{q}}d\tau\,d\xi + \\ + \int_{D_0}(\varphi(\xi)+K)\Big(\int_A G^q(t,x;0,\xi)dx\Big)^{\frac{1}{q}}d\xi.$$

Положим в последнем неравенстве $A = D_t \cap \{|x| > r\}$ и воспользуемся тем, что

$$\Big(\int_{D_t\cap\{|x-\varepsilon|>r\}} G^q(t,x;\tau,\xi)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \le \frac{C_1\exp(-k\min(\frac{1}{p},\frac{1}{q})\frac{r^2}{t-\tau})}{(d^+(\tau,\xi;t))^{n/q}(d^-(t,x;\tau))^{n/p}}$$

(см. [11]). Тогда при $r > r(0)$ будем иметь

$$\Big(\int_A \widehat{U}^q(t,x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \le \int_0^t\int_{D_\tau} f(\tau,\xi)\frac{c}{(d^+(\tau,\xi;t))^{n/p}}\exp\Big(-\frac{k(r-r(0))^2}{p(t-\tau)}\Big)d\tau\,d\xi + \\ + \int_{D_0}(\varphi(\xi)+K)\frac{c}{(d^+(0,\xi;t))^{n/p}}\exp\Big(-\frac{k(r-r(0))^2}{pt}\Big)d\xi. \tag{15}$$

Учитывая компактность носителей φ и f в D_0, заключаем, что функция $d^+(\tau,\xi;t)$ ограничена снизу при $t-\tau \ge \delta > 0$ и ξ из объединения носителей φ и f. Следовательно, если функция f_1 совпадает с f при $\tau > T$ и равна нулю в противном случае, то из (15) вытекает

$$\Big(\int_A \widehat{U}^q(t,x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \le \int_0^t\int_{D_\tau} f_1(\tau,\xi)\frac{c}{(d^+(\tau,\xi;t))^{n/p}}\exp\Big(-\frac{k(r-r(0))^2}{p(t-\tau)}\Big)d\tau d\xi + \alpha_1,$$

где α_1 не зависит от t.

В силу утверждения в) теоремы, неравенства (10), ограниченности снизу функции $\frac{E(t)}{t^{\frac{n}{2}}}$ при достаточно больших t, можно выбрать T таким образом, что при $\tau > T$ $d^{+}(\tau,\xi;t) \geq \alpha \min(\sqrt{t-\tau}, \sqrt{\tau})$. Следовательно, при достаточно больших t

$$\Big(\int_A \widehat{U}^q(t,x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \alpha_2 \int_{t/2}^{t} \frac{\exp\big(-\frac{k(r-r(0))^2}{p(t-\tau)}\big)}{(t-\tau)^{n/p}} \int_{D_\tau} f(\tau,\xi)d\xi\, d\tau +$$

$$+ \alpha_3 \exp\Big(-\frac{k(r-r(0))^2}{pt}\Big) \int_T^{t/2} \frac{1}{\tau^{n/2p}} \int_{D_\tau} f(\tau,\xi)d\xi\, d\tau + \alpha_1. \quad (16)$$

Поскольку функция $\xi^{\frac{n}{2p}} e^{-\frac{k}{2p}\xi^2}$ ограничена, то первое слагаемое I_1 в правой части (16) можно оценить в виде

$$I_1 \leq \alpha_4 \frac{1}{(r-r(0))^{n/p}} \int_{t/2}^{t} \int_{D_\tau} f(\tau,\xi) \exp\Big(-\frac{k(r-r(0))^2}{2p(t-\tau)}\Big) d\xi\, d\tau.$$

Для оценки второго слагаемого I_2 воспользуемся преобразованиями

$$\int_T^{t/2} \frac{d\tau}{\tau^{n/2p}} \int_{D_\tau} f(\tau,\xi)d\xi = \int_T^{t/2} \frac{d\tau}{\tau^{n/2p}} E'(\tau) \leq \frac{E(\frac{t}{2})}{(\frac{t}{2})^{\frac{n}{2p}}} + \int_T^{t/2} \frac{E(\tau)}{\tau^{1+\frac{n}{2p}}} d\tau. \quad (17)$$

Пусть p выбрано таким образом, что $\frac{n}{2p} < \varepsilon$. Тогда

$$\int_T^{t/2} \frac{E(\tau)}{\tau^{1+\frac{n}{2p}}} d\tau \leq \frac{E(\frac{t}{2})}{(\frac{t}{2})^{\varepsilon}} \int_T^{t/2} \frac{1}{\tau^{1+\frac{n}{2p}-\varepsilon}} d\tau \leq \alpha_5 \frac{E(\frac{t}{2})}{(\frac{t}{2})^{\frac{n}{2p}}}.$$

Используя ограниченность функции $\xi^{\frac{n}{2p}} e^{-\frac{k}{2p}\xi^2}$ и неравенство $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{2(t-\tau)}$ при $\tau < \frac{t}{2}$, получим

$$I_2 \leq \frac{\alpha_6}{(r-r(0))^{n/p}} \int_0^t \int_{D_\tau} f(\tau,\xi) \exp\Big(-\frac{k(r-r(0))^2}{4p(t-\tau)}\Big) d\xi\, d\tau, \quad (18)$$

с учетом (17), (18) из (16) вытекает

$$\Big(\int_A \widehat{U}^q(t,x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{\alpha_7}{(r-r(0))^{n/p}} \int_0^t \int_{D_\tau} f(\tau,\xi) \exp\Big(-\frac{k(r-r(0))^2}{4p(t-\tau)}\Big) d\xi\, d\tau. \quad (19)$$

Поскольку из утверждения в) теоремы, неравенства (10) и ограниченности снизу $\frac{E(t)}{t^{n/2}}$ следует $R(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, то, учитывая утверждение а) и полагая $r = \frac{1}{2}R(t)$ при достаточно больших t, получим $\operatorname{mes} A = \operatorname{mes}(D_t \cap \{|x| > \frac{1}{2}R(t)\}) \geq \alpha_7 R^n(t)$ и $(\frac{1}{2}R(t) - r(0))^2 > \frac{1}{5}R^2(t)$.

Таким образом, из неравенств (14), (19) вытекает

$$1 \leq \frac{\alpha_8}{R^n(t)} \int_0^t \int_{D_\tau} f(\tau,\xi) \exp\Big(-\frac{kR^2(t)}{20p(t-\tau)}\Big) d\tau\, d\xi.$$

Поэтому

$$1 \leq \frac{1}{(\alpha_9 R(t))^n} \int_0^t \int_{D_\tau} f(\tau,\xi) \exp\Big(-\frac{(\alpha_9 R(t))^2}{t-\tau}\Big) d\tau\, d\xi.$$

Справедливость утверждения г) следует из последнего неравенства и соотношения (9). $\square$

Литература

1. Фридман А. *Уравнения с частными производными параболического типа.* Пер. с англ. – М.: Мир, 1968. – 420 с.
2. Мейрманов А.М. *Задача Стефана.* – Новосибирск: Наука, 1986. – 238 с.
3. Friedman A. *The Stefan problem in several space variable* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – V. 133. – P. 51–82.
4. Каменомостская С.Л. *О задаче Стефана* // Научн. докл. высш. школы физ.-матем. наук. – 1958. – Т. 1. – Вып. 1. – С. 60–62.
5. Олейник О.А. *Об одном методе решения общей задачи Стефана* // ДАН СССР. – 1960. – Т. 135. – С. 1054–1057.
6. Каменомостская С.Л. *О задаче Стефана* // Матем. сб. – 1961. – Т. 53. – № 4. – С. 489–514.
7. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* – М.: Наука, 1967. – 736 с.
8. Friedman A., Kinderlehler D. *A one-phase Stefan problem* // Indiana Univ. Math. J. – 1975. – V. 24. – P. 1005–1035.
9. Friedman A. *Variational principles and free boundary problems.* – N. Y. Viley-interscience, 1982. – 710 p.
10. Ушаков В.И., Иванова М.В. *Свойства функции Грина третьей смешанной задачи для параболического уравнения в нецилиндрической области* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 10. – С. 68–78.
11. Matano H. *Asymptotic behavior of the free boundaries arising in one phase Stefan problems in multidimensional spaces* // Lect. Notes Num. Appl. Anal. – 1982. – V. 5. – P. 133–151.
12. Ушаков В.И. *Стабилизация решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка в нецилиндрической области* // Матем. сб. – 1980. – Т. 111. – № 1. – С. 95–115.
13. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* – М.: Наука, 1975. – 480 с.

Челябинский государственный университет

Поступили
первый вариант 02.07.2004
окончательный вариант 13.06.2006