ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 2 (441)

УДК 517.929

Н.В. АЗБЕЛЕВ, М.Ж. АЛВЕШ, Е.И. БРАВЫЙ

О СИНГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered}(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(t)\ddot{x}(t) - (Tx)(t) = f(t), \quad t \in [0,1],\\ \pi(t) = t \text{ или } \pi(t) = 1-t, \text{ или } \pi(t) = t(1-t),\end{gathered} \tag{1}$$

с линейным ограниченным оператором $T : C \to L$, C — пространство непрерывных на $[0,1]$ функций x с нормой $\|x\|_C = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$, L — пространство суммируемых на $[0,1]$ функций z, $\|z\|_L = \int\limits_0^1 |z(s)|\,ds$. Это уравнение изучалось в работах И.Т. Кигурадзе [1] и С.М. Лабовского [2]. В предлагаемой статье получены условия, гарантирующие монотонность операторов Грина некоторых краевых задач для уравнения (1). Эти вопросы для функционально-дифференциального уравнения без сингулярностей, т. е. при $\pi(t) \equiv 1$, рассматривались, например, в статье [3]–[4] (см. также приведенный там список литературы). Мы продолжаем исследования упомянутых работ, пользуясь методами теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения [5], [6].

Обозначим через $\mathcal{I}_\pi$ промежуток $(0,1]$, если $\pi(t) = t$, промежуток $[0,1)$, если $\pi(t) = 1-t$, и промежуток $(0,1)$, если $\pi(t) = t(1-t)$.

Следуя схеме, приведенной в § 9 монографии [6], построим такое пространство $\mathcal{D}_\pi$ функций $x : [0,1] \to \mathbb{R}^1$, при котором оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}_\pi \to L$ будет нётеровым индекса 2. Это позволит непосредственно пользоваться теоремами общей теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения, изложенной в [5], [6]. Для такого построения зафиксируем точку $\tau \in \mathcal{I}_\pi$ и определим в квадрате $[0,1]\times[0,1]$ функцию

$$\Lambda_\tau(t,s) = \begin{cases} \dfrac{t-s}{\pi(s)}, & \tau \leqslant s < t \leqslant 1;\\ \dfrac{s-t}{\pi(s)}, & 0 \leqslant t < s \leqslant \tau;\\ 0 & \text{— в остальных точках квадрата } [0,1]\times[0,1].\end{cases}$$

Отметим, что $\Lambda_\tau(t,s)$ — функция Грина задачи $\pi\ddot{x} = z$, $x(\tau) = \dot{x}(\tau) = 0$. Имеем при $s,t \in [0,1]$: $0 \leqslant \Lambda_\tau(t,s) \leqslant \max\left(\frac{1-\tau}{\tau}, 1\right)$, если $\pi(t) = t$; $0 \leqslant \Lambda_\tau(t,s) \leqslant \max\left(1, \frac{\tau}{1-\tau}\right)$, если $\pi(t) = 1-t$; $0 \leqslant \Lambda_\tau(t,s) \leqslant \max\left(\frac{1}{\tau}, \frac{1}{1-\tau}\right)$, если $\pi(t) = t(1-t)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01613, 96-15-96195) и Конкурсного центра по исследованиям в области фундаментального естествознания, Санкт-Петербург.

Пусть далее

$$(\Lambda_\tau z)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \Lambda_\tau(t,s)z(s)\,ds, \quad z \in L,$$

$$(Y_\tau\beta)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \beta^1 + \beta^2(t-\tau), \quad \beta = \{\beta^1, \beta^2\} \in \mathbb{R}^2.$$

Равенство $x = \Lambda_\tau z + Y_\tau\beta$ для каждого $\{z,\beta\} \in L \times \mathbb{R}^2$ определяет элемент пространства $\mathcal{D}_\pi$ функций $x : [0,1] \to \mathbb{R}^1$, обладающих свойством

$$\begin{cases} x \text{ непрерывна на замкнутом отрезке } [0,1], \\ \text{производная } \dot{x} \text{ непрерывна в промежутке } \mathcal{I}_\pi, \\ \text{произведение } \pi\ddot{x} \text{ суммируемо на } [0,1]. \end{cases}$$

Такого рода весовые пространства изучались в работе Л.Д. Кудрявцева [7].

Пространство $\mathcal{D}_\pi$ изоморфно прямому произведению $L \times \mathbb{R}^2$. Изоморфизм $\mathcal{J}_\tau : L \times \mathbb{R}^2 \to \mathcal{D}_\pi$ можно определить равенством $\mathcal{J}_\tau = \{\Lambda_\tau, Y_\tau\}$. При этом $\mathcal{J}_\tau{}^{-1} = [\delta, r_\tau]$, где $\delta x = \pi\ddot{x}$, $r_\tau x = \{x(\tau), \dot{x}(\tau)\}$. Пространство $\mathcal{D}_\pi$ банахово с нормой

$$\|x\|_{\mathcal{D}_\pi} = \|\pi\ddot{x}\|_L + |x(\tau)| + |\dot{x}(\tau)|.$$

Пусть оператор T вполне непрерывно действует из пространства W в пространство L, W — пространство абсолютно непрерывных функций $x : [0,1] \to \mathbb{R}^1$ с нормой $\|x\| = |x(0)| + \int\limits_0^1 |\dot{x}(s)|\,ds$. Так как пространство $\mathcal{D}_\pi$ непрерывно вложено в пространство W, то оператор $Q_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}\Lambda_\tau : L \to L$ фредгольмов: $Q_\tau z = z - T\Lambda_\tau z$.

Таким образом, оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}_\pi \to L$ нётеров индекса 2 [5]. Следовательно, краевая задача

$$\mathcal{L}x = f, \quad \ell_1 x = \alpha^1, \quad \ell_2 x = \alpha^2$$

с линейными ограниченными функционалами ℓ_1, ℓ_2 на пространстве $\mathcal{D}_\pi$ фредгольмова, и к ней применима общая теория краевых задач монографий [5], [6].

Краевая задача

$$\mathcal{L}x = f, \quad x(\tau) = \alpha^1, \quad \dot{x}(\tau) = \alpha^2 \tag{2}$$

эквивалентна уравнению

$$x = A_\tau x + g, \tag{3}$$

где $A_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_\tau T$, $g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^1 + \alpha^2(t-\tau) + \int\limits_0^1 \Lambda_\tau(t,s)f(s)\,ds$. Любое непрерывное решение последнего уравнения принадлежит пространству $\mathcal{D}_\pi$. Поэтому вопросы о существовании решения задачи (2) можно изучать, рассматривая уравнение (3) в пространстве C.

Линейный оператор $\mathcal{N} : X \to Y$, где X, Y — или пространство C, или пространство L с естественной полуупорядоченностью, называется изотонным (антитонным), если $\mathcal{N}x \geqslant 0$ ($\mathcal{N}x \leqslant 0$) для любой функции $x \geqslant 0$, $x \in X$. Отметим, что оператор $A_\tau : C \to C$ изотонен, если изотонен оператор T. Кроме того, $(A_\tau x)(\tau) = 0$ для каждого $x \in C$.

Мы будем пользоваться результатом работы [8], который для удобства читателя приведем здесь в следующей форме.

Лемма 1. *Оценка $\rho(H) < 1$ спектрального радиуса линейного изотонного оператора $H : C \to C$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такая функция $v \in C$, что*

$$v(t) > 0, \quad v(t) - (Hv)(t) > 0$$

при всех $t \in [0,1]$, кроме, быть может, таких изолированных точек $t_i \in [0,1]$, что $(Hx)(t_i) = 0$ для каждого $x \in C$.

Оценка $\rho(A_\tau) < 1$ гарантирует сходимость последовательных приближений для уравнения (3) и однозначную разрешимость задачи (2) для каждых $f \in L$, $\{\alpha^1,\ \alpha^2\} \in \mathbb{R}^2$. Более того, справедлива

Лемма 2. *Пусть $\tau \in \mathcal{I}_\pi$ и оператор T изотонен. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

а) *существует такой элемент $v \in \mathcal{D}_\pi$, что*

$$v(t) \geqslant 0, \quad \varphi(t) \overset{\text{def}}{=} (\mathcal{L}v)(t) \geqslant 0, \quad t \in [0,1], \quad \dot{v}(\tau) = 0,$$

причем $v(\tau) + \int\limits_0^1 \Lambda_\tau(t,s)\varphi(s)\,ds > 0$ на $[0,1]$ за исключением, быть может, точки $t = \tau$;

б) $\rho(A_\tau) < 1$;

в) *краевая задача (2) однозначно разрешима при каждой паре $\{f, \alpha\} \in L \times \mathbb{R}^2$, причем оператор Грина G_τ этой задачи изотонен.*

Доказательство. Функция v удовлетворяет задаче

$$\mathcal{L}x = \varphi, \quad x(\tau) = v(\tau), \quad \dot{x}(\tau) = 0$$

и, следовательно, удовлетворяет неравенствам

$$v(t) - (A_\tau v)(t) = v(\tau) + \int_0^1 \Lambda_\tau(t,s)\varphi(s)\,ds > 0, \quad v(t) > 0$$

при $t \in [0,1]$, кроме, быть может, точки $t = \tau$. Поэтому в силу леммы 1 $\rho(A_\tau) < 1$. Импликация а) $\Rightarrow$ б) доказана.

Если $\rho(A_\tau) < 1$, то уравнение (3) однозначно разрешимо при любой функции $g \in C$. Поэтому однозначно разрешима и задача (2), причем ее оператор Грина определяется рядом Неймана

$$G_\tau = (I + A_\tau + A_\tau^2 + \cdots)\Lambda_\tau.$$

Импликация б) $\Rightarrow$ в) доказана.

Для доказательства импликации в) $\Rightarrow$ а) достаточно положить в качестве v решение задачи

$$\mathcal{L}x = 0, \quad x(\tau) = 1, \quad \dot{x}(\tau) = 0.$$

Действительно, разность $y = v - 1$ удовлетворяет полуоднородной задаче

$$(\mathcal{L}y)(t) = (T(1))(t) \geqslant 0, \quad y(\tau) = 0, \quad \dot{y}(\tau) = 0.$$

Поэтому $y(t) = (G_\tau T(1))(t) \geqslant 0$. Таким образом, функция v удовлетворяет условиям утверждения а): $v(t) = y(t) + 1 > 0$, $(\mathcal{L}v)(t) = 0$ и, следовательно, $v(\tau) + \int\limits_0^1 \Lambda_\tau(t,s)\varphi(s)\,ds = v(\tau) > 0$ на $[0,1]$. □

Определение 1. Будем говорить, что уравнение (1) обладает свойством **A**, если при каждом $\tau \in \mathcal{I}_\pi$ задача (2) однозначно разрешима, причем оператор Грина G_τ этой задачи изотонен.

Если уравнение (1) с изотонным оператором T обладает свойством **A**, то справедливы следующие утверждения.

Лемма 3. *Если решение $u \in \mathcal{D}_\pi$ неравенства $(\mathcal{L}x)(t) \geqslant 0$ имеет точку стационарности $\tau \in \mathcal{I}_\pi$ ($\dot{u}(\tau) = 0$), причем $u(\tau) \overset{\text{def}}{=} c \geqslant 0$, то $u(t) \geqslant c$ при $t \in [0,1]$.*

Доказательство. Разность $y = u - c$ удовлетворяет задаче $\mathcal{L}y = \varphi$, $y(\tau) = \dot{y}(\tau) = 0$, где $\varphi = \mathcal{L}u + Tc \geqslant 0$. Таким образом, $y = G_\tau\varphi \geqslant 0$ и, следовательно, $u = c + y \geqslant c$. □

Теорема 1. *Двухточечная краевая задача*

$$\mathcal{L}x = f, \quad x(0) = \alpha^1, \quad x(1) = \alpha^2 \tag{4}$$

имеет единственное решение $x \in \mathcal{D}_\pi$ *при каждых* $f \in L$, $\{\alpha^1,\ \alpha^2\} \in \mathbb{R}^2$, *причем это решение отрицательно на* $(0,1)$, *если* $f(t) \geqslant 0$ *при почти всех* $t \in [0,1]$ *и*

$$\int_0^1 f(s)\,ds - \alpha^1 - \alpha^2 > 0, \quad \alpha^1 \leqslant 0, \quad \alpha^2 \leqslant 0. \tag{5}$$

Доказательство. Однородная задача (4) имеет только тривиальное решение, т. к. в противном случае некоторое ее решение будет принимать свое наибольшее (положительное) значение в интервале $(0,1)$, что противоречит лемме 3. Таким образом, неоднородная задача (4) имеет единственное решение $x \in \mathcal{D}_\pi$ при всех $f \in L$, $\{\alpha^1,\ \alpha^2\} \in \mathbb{R}^2$. Если же решение x неоднородной задачи при $f \geqslant 0$ принимает свое максимальное значение $x(\tau) > 0$ в точке $\tau \in (0,1)$, то в силу предыдущей леммы $x > 0$, что противоречит неравенствам (5). $\square$

Аналогичные рассуждения приводят к двум следующим утверждениям.

Теорема 2. *Краевая задача*

$$\mathcal{L}x = f, \quad x(a) = 0, \quad x(b) = 0, \quad 0 \leqslant a < b \leqslant 1,$$

однозначно разрешима при всех $f \in L$, *причем, если* $f(t) \geqslant 0$ *при* $t \in [0,1]$ *и* $f(t) \not\equiv 0$ *на* (a,b), *то решение* x *задачи удовлетворяет строгим неравенствам* $x(t) < 0$ *при* $t \in (a,b)$ *и* $x(t) > 0$ *при* $t \in [0,1] \setminus [a,b]$.

Теорема 3. *Краевая задача*

$$\mathcal{L}x = f, \quad x(0) = \alpha^1, \quad \dot{x}(1) = \alpha^2, \quad \textit{если} \;\; \pi(t) = t, \tag{6}$$

и краевая задача

$$\mathcal{L}x = f, \quad \dot{x}(0) = \alpha^1, \quad x(1) = \alpha^2, \quad \textit{если} \;\; \pi(t) = 1 - t, \tag{7}$$

однозначно разрешимы при всех $f \in L$, $\{\alpha^1,\ \alpha^2\} \in \mathbb{R}^2$ *и их операторы Грина антитонны.*

Рассмотрим теперь уравнение (1) без предположения об изотонности оператора T.

Пусть $T = T^+ - T^-$, где $T^+, T^- : C \to L$ — линейные изотонные операторы, вполне непрерывно действующие из пространства W в пространство L. Пусть далее $\mathcal{L}^+x \stackrel{\text{def}}{=} \pi\ddot{x} - T^+x$. Уравнение (1) запишем в виде $\mathcal{L}x \equiv \mathcal{L}^+x + T^-x = f$. Обозначим $A \stackrel{\text{def}}{=} -G^+T^-$, где G^+ — интегральный оператор Грина задачи

$$\mathcal{L}^+x = f, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Таким образом, задача (4) эквивалентна уравнению $x = Ax + g$, где

$$g(t) = \int_0^1 G^+(t,s) f(s)\,ds + u(t), \qquad t \in [0,1],$$

u — решение полуоднородной задачи $\mathcal{L}^+x = 0$, $x(0) = \alpha^1$, $x(1) = \alpha^2$.

Отметим, что оператор $G^+ : L \to C$ антитонен, а оператор $A : C \to C$ изотонен, если уравнение $\mathcal{L}^+x = f$ обладает свойством **A**.

Теорема 4. *Пусть уравнение* $\mathcal{L}^+x = f$ *обладает свойством* **A**. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

а) *существует такой элемент* $v \in \mathcal{D}_\pi$, *что*

$$v(t) > 0, \quad \varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{L}v)(t) \leqslant 0, \quad t \in (0,1),$$

причем $v(0) + v(1) - \int\limits_0^1 \varphi(s)\,ds > 0$;

б) *спектральный радиус* $\rho(A)$ *оператора* $A : C \to C$ *меньше единицы;*

в) *краевая задача*

$$\mathcal{L}x = f, \quad x(0) = \alpha^1, \quad x(1) = \alpha^2 \tag{8}$$

имеет единственное решение $x \in \mathcal{D}_\pi$ *для каждого* $\{f, \alpha\} \in L \times \mathbb{R}^2$, *причем оператор Грина задачи антитонен;*

г) *существует положительное на* $[0, 1]$ *решение однородного уравнения* $\mathcal{L}x = 0$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что функция v удовлетворяет неравенству

$$v(t) - (Av)(t) = (G^+\varphi)(t) + u(t) > 0, \quad t \in (0, 1),$$

где u — решение полуоднородной задачи $\mathcal{L}^+x = 0$, $x(0) = v(0) \geqslant 0$, $x(1) = v(1) \geqslant 0$. Так как $v(t) > 0$ при $t \in (0, 1)$, то $\rho(A) < 1$ в силу леммы 1.

Импликация а) $\Rightarrow$ б) доказана.

Импликация б) $\Rightarrow$ в) следует из того, что оператор Грина задачи (8) имеет представление

$$G = (I + A + A^2 + \cdots)G^+,$$

если $\rho(A) < 1$.

Импликацию в) $\Rightarrow$ а) получим, положив $v = -G(1)$. Действительно, $v(t) \geqslant 0$ при $t \in [0, 1]$, т. к. оператор G антитонен. Кроме того, v удовлетворяет уравнению $x = Ax - G^+(1)$. Таким образом, $v(t) \geqslant -(G^+(1))(t) > 0$ при $t \in (0, 1)$ и $v - Av = 1$.

Импликация б) $\Rightarrow$ г) следует из того, что решение z полуоднородной задачи

$$\mathcal{L}x = 0, \quad x(0) = \alpha^1 > 0, \quad x(1) = \alpha^2 > 0$$

удовлетворяет уравнению $x = Ax + z^0$, где z^0 — положительное в силу теоремы 1 решение задачи

$$\mathcal{L}^+x = 0, \quad x(0) = \alpha^1, \quad x(1) = \alpha^2.$$

Таким образом, $z(t) = z^0(t) + (Az^0)(t) + (A^2z^0)(t) + \cdots \geqslant z^0(t)$.

Импликация г) $\Rightarrow$ б) следует из леммы 1, т. к. положительное решение z уравнения $\mathcal{L}x = 0$ удовлетворяет неравенствам

$$z(t) > 0, \quad z(t) - (Az)(t) = z^0(t) > 0, \quad t \in [0, 1],$$

где z^0 — решение задачи

$$\mathcal{L}^+x = 0, \quad x(0) = z(0) > 0, \quad x(1) = z(1) > 0. \quad \square$$

Аналогично доказываются утверждения для задач (6) и (7).

Теорема 5. *Пусть* $\pi(t) = t$ $(\pi(t) = 1 - t)$ *и уравнение* $\mathcal{L}^+x = f$ *обладает свойством* **A**. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

а) *существует такой элемент* $v \in \mathcal{D}_\pi$, *что*

$v(t) > 0$, $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{L}v)(t) \leqslant 0$, $t \in (0, 1]$, $\dot{v}(1) \geqslant 0$, *причем* $v(0) + \dot{v}(1) - \int\limits_0^1 \varphi(s)\, ds > 0$

$\Big(v(t) > 0$, $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{L}v)(t) \leqslant 0$, $t \in [0, 1)$, $\dot{v}(0) \leqslant 0$, *причем* $v(1) - \dot{v}(0) - \int\limits_0^1 \varphi(s)\, ds > 0\Big)$;

б) *спектральный радиус* $\rho(A_1)$ *оператора* $A_1 : C \to C$ *меньше единицы; здесь* $A_1 \stackrel{\text{def}}{=} -G_1^+T^-$, *где* G_1^+ — *оператор Грина задачи*

$$\mathcal{L}^+x = f, \quad x(0) = \dot{x}(1) = 0$$
$$(\mathcal{L}^+x = f, \quad \dot{x}(0) = x(1) = 0);$$

в) *краевая задача* (6) ((7)) *имеет единственное решение* $x \in \mathcal{D}_\pi$ *для каждого* $\{f, \alpha\} \in L \times \mathbb{R}^2$, *причем оператор Грина задачи антитонен;*

г) *существует такое положительное на* $[0,1]$ *решение* z *однородного уравнения* $\mathcal{L}x = 0$, *что* $\dot z(1) > 0$ ($\dot z(0) < 0$).

Определение 2. Будем говорить, что фундаментальная система решений однородного уравнения $\mathcal{L}x = 0$ неосцилляционна, если любое нетривиальное решение этого уравнения имеет на отрезке $[0,1]$ не более одного нуля, считая кратный нуль на $\mathcal{I}_\pi$ дважды.

Теорема 6. *Следующие утверждения эквивалентны*:

а) *уравнение* $\mathcal{L}^+x = f$ *обладает свойством* $\mathbf{A}$;

б) *любое нетривиальное решение однородного уравнения* $\mathcal{L}^+x = 0$, *имеющее нуль на отрезке* $[0,1]$, *не имеет нулей производной на промежутке* $\mathcal{I}_\pi$;

в) *фундаментальная система решений уравнения* $\mathcal{L}^+x = 0$ *неосцилляционна*;

г) *существует такая пара функций* v_1, $v_2 \in \mathcal{D}_\pi$, *что*

$$v_1(0) = 0, \quad v_1(1) > 0, \quad v_2(0) > 0, \quad v_2(1) = 0,$$

$$v_i(t) > 0, \quad \varphi_i(t) \overset{\text{def}}{=} (\mathcal{L}^+v_i)(t) \geqslant 0, \quad i = 1,2, \quad t \in (0,1),$$

причем, если $\pi(t) = t$, *то* $\varphi_1(t) > 0$ *при почти всех* $t \in (0,1)$ *и, если* $\pi(t) = 1 - t$, *то* $\varphi_2(t) > 0$ *при почти всех* $t \in (0,1)$.

Доказательство. Импликация а) $\Rightarrow$ б) почти очевидна. Пусть решение u уравнения $\mathcal{L}^+x = 0$ таково, что $\dot u(\tau) = 0$, $u(\tau) > 0$, $\tau \in \mathcal{I}_\pi$. Из леммы 3 следует, что функция u не имеет нулей на отрезке $[0,1]$.

Если выполнено утверждение б), то на промежутке $\mathcal{I}_\pi$ нетривиальное решение уравнения $\mathcal{L}^+x = 0$ не имеет кратных нулей. Двух различных нулей на отрезке $[0,1]$ также не может быть, т. к. в интервале между ними производная решения должна обращаться в нуль. Таким образом, импликация б) $\Rightarrow$ в) доказана.

Докажем импликацию в) $\Rightarrow$ г). Рассмотрим решения полуоднородных задач

$$\mathcal{L}^+x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1,$$
$$\mathcal{L}^+x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 0,$$

— u_1 и u_2 соответственно. Неосцилляция гарантирует отсутствие нетривиального решения однородной задачи

$$\mathcal{L}^+x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0,$$

поэтому в силу фредгольмовости решения u_1, u_2 существуют. Эти решения уже имеют по одному нулю и поэтому положительны на $(0,1)$. Если $\pi(t) = t(1-t)$, то функции $v_1 \equiv u_1$ и $v_2 \equiv u_2$ удовлетворяют условию г).

Если $\pi(t) = 1 - t$, то задача

$$\mathcal{L}^+x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot x(0) = k > 0$$

имеет решение z_k. Действительно, однородная задача в силу определения неосцилляции имеет только тривиальное решение. Так как задача фредгольмова, то неоднородная задача будет однозначно разрешима. Решение z_k положительно на $(0,1]$, т. к. не может иметь второго нуля. Зафиксируем положительную при почти всех $t \in [0,1]$ функцию φ. Пусть z_φ — решение задачи

$$\mathcal{L}^+x = \varphi, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

Неосцилляция и фредгольмовость этой задачи обеспечивают ее однозначную разрешимость. Сумма $z \overset{\text{def}}{=} z_\varphi + z_k$ при достаточно большом k положительна на $(0,1]$, т. к. значение $\dot z_\varphi(0)$ конечно. Функции $v_1 \equiv u_1$ и $v_2 \equiv z$ удовлетворяют условию г).

Аналогично рассматривается случай $\pi(t) = t$.

Докажем импликацию г) $\Rightarrow$ а). Покажем, что условие в) теоремы позволяет построить для каждой точки $\tau \in \mathcal{I}_\pi$ функцию v, удовлетворяющую условиям леммы 2.

Пусть $\pi(t) = t(1-t)$. Из условия в) следует, что $\dot v_1(t) > 0$, $\dot v_2(t) < 0$ при $t \in (0,1)$. Следовательно, для каждой точки $\tau \in \mathcal{I}_\pi$ найдется такая положительная постоянная C, что сумма $v = Cv_1 + v_2$ обладает свойством: $\dot v(\tau) = 0$, $v(t) > 0$ при $t \in [0,1]$, $(\mathcal{L}^+ v)(t) = C\varphi_1(t) + \varphi_2(t) \geqslant 0$ при почти всех $t \in [0,1]$.

Пусть теперь $\tau = 0$, $\pi(t) = 1-t$. Тогда функция $v(t) \stackrel{\text{def}}{=} v_1(t) - \dot v_1(0)t$ обладает свойством: $\dot v(0) = 0$, $v(0) = 0$, $v(t) > 0$ при $t \in (0,1]$, $(\mathcal{L}^+ v)(t) \geqslant \varphi_1(t) > 0$ при почти всех $t \in [0,1]$. Действительно, если $\dot v_1(0) = 0$, то $v = v_1$, $\mathcal{L}^+ v = \varphi_1$. Если же $\dot v_1(0) \neq 0$, то $\dot v_1(0) > 0$ и $\mathcal{L}^+ v = \mathcal{L}^+ v_1 + T[\dot v_1(0)t] \geqslant \varphi_1$ и, т.к. $\ddot v = \ddot v_1 = \frac{1}{\pi}(Tv_1 + \varphi_1) \stackrel{\text{def}}{=} \eta$, то $v(t) = \int\limits_0^t (t-s)\eta(s)\,ds > 0$ при $t \in (0,1]$.

Случай $\pi(t) = t$ рассматривается по той же схеме. Функция $v(t) = v_2(t) + \dot v_2(1)(1-t)$ удовлетворяет условиям леммы 2 при $\tau = 1$. $\square$

Таким образом, мы доказали, что свойство **A** уравнения $\mathcal{L}^+ x = f$ эквивалентно отсутствию у любого нетривиального решения однородного уравнения $\mathcal{L}^+ x = 0$ двух нулей на отрезке $[0,1]$, причем кратный нуль в точке $t = 0$ считается дважды в случае $\pi(t) = 1-t$, и кратный нуль в точке $t = 1$ считается дважды в случае $\pi(t) = t$.

Отметим, что в условиях п. б) предыдущей теоремы функционально-дифференциальные уравнения без сингулярностей изучались, например, в работе [9].

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{D}_\pi$ уравнение

$$\pi(t)\ddot x(t) - p(t)x_h(t) = f(t), \quad t \in [0,1], \tag{9}$$

где линейный оператор внутренней суперпозиции $x \to x_h$ определен равенством

$$x_h(t) = \begin{cases} x(h(t)), & \text{если } h(t) \in [0,1]; \\ 0, & \text{если } h(t) \notin [0,1], \end{cases}$$

$h : [0,1] \to \mathbb{R}^1$ — измеримая функция, $p(t) \geqslant 0$, $p \in L$. Обозначим $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} 1_h$.

Если при $\pi(t) = t(1-t)$ положить

$$v_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1-t)\ln(1-t) + t, \quad v_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} t\ln t - t + 1,$$

то имеем

$$t(1-t)\ddot v_1(t) = t, \quad t(1-t)\ddot v_2(t) = 1-t,$$
$$v_1(t)/t^2 \leqslant (1+t)/2 \leqslant 1, \quad v_2(t)/(1-t)^2 \leqslant 1 - t/2 \leqslant 1, \quad t \in [0,1].$$

Применив теорему 6, получим

Следствие 1. Пусть $\pi(t) = t(1-t)$, тогда уравнение (9) обладает свойством **A**, если при почти всех $t \in [0,1]$ выполнены неравенства

$$(1+h(t))h^2(t)\sigma(t)p(t) \leqslant 2t, \quad (2-h(t))(1-h(t))^2\sigma(t)p(t) \leqslant 2(1-t).$$

Достаточными условиями справедливости последних неравенств являются следующие условия: при почти всех $t \in [0,1]$ выполнены неравенства

$$h^2(t)\sigma(t)p(t) \leqslant t, \quad (1-h(t))^2\sigma(t)p(t) \leqslant 1-t$$

или при почти всех таких $t \in [0,1]$, что $h(t) \in [0,1]$, выполнены неравенства

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} p(t) > 0, \quad 1 - \sqrt{\frac{1-t}{M}} \leqslant h(t) \leqslant \sqrt{\frac{t}{M}}.$$

Если при $\pi(t) = t(1-t)$ положить $v_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} t^2$, $v_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1-t)^2$ и применить теорему 6, то получим

Следствие 2. Пусть $\pi(t) = t(1-t)$, тогда уравнение (9) обладает свойством **A**, если при почти всех $t \in [0,1]$ выполнены неравенства

$$h^2(t)\sigma(t)p(t) \leqslant 2t(1-t), \qquad (1-h(t))^2\sigma(t)p(t) \leqslant 2t(1-t).$$

Достаточным условием справедливости последних неравенств является выполнение при почти всех $t \in [0,1]$ неравенства

$$\sigma(t)p(t) \leqslant 2t(1-t).$$

Существенность условий приведенных признаков и роль структуры функции h показывает

Теорема 7. *Пусть $\pi(t) = t(1-t)$. Если $p(t) \geqslant p_0 > 0$, $h(t) \in [\varepsilon, 1]$ или $h(t) \in [0, 1-\varepsilon]$ при всех $t \in [0,1]$ и некотором $\varepsilon > 0$, то уравнение (9) не обладает свойством* **A**.

Доказательство. Пусть, например, $h(t) \in [\varepsilon, 1]$ при всех $t \in [0,1]$. Если уравнение (9) обладает свойством **A**, то, как утверждает теорема 6, существует такая функция $v_1 \in \mathcal{D}_\pi$, что $v_1(t) > 0$ при $t \in (0,1]$, $v_1(0) = 0$ и

$$t(1-t)\ddot{v}_1(t) \geqslant p(t)(v_1)_h(t) \geqslant p_0 \min_{t\in[\varepsilon,1]} v_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \delta > 0, \quad t \in [0,1].$$

Пусть u — решение однозначно разрешимой задачи

$$t(1-t)\ddot{u}(t) = \delta, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = v_1(1) > 0.$$

Тогда функция $z \stackrel{\text{def}}{=} v_1 - u$ неположительна, т. к. является решением полуоднородной задачи с антитонным оператором Грина

$$t(1-t)\ddot{z}(t) = \varphi(t) \geqslant 0, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0,$$

$\varphi(t) = t(1-t)\ddot{v}_1(t) - \delta$, $t \in [0,1]$.

Таким образом, $0 \leqslant v_1 = z + u \leqslant u$ почти всюду на отрезке $[0,1]$, следовательно, функция u неотрицательна. Функция u имеет вид

$$u(t) = \delta((1-t)\ln(1-t) + t\ln t) + v_1(1)t, \quad t \in [0,1].$$

Пришли к противоречию, т. к. в некоторой окрестности нуля функция u отрицательна. □

При $\pi(t) = t$ положим

$$v_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} t^2/2, \quad v_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} t\ln t - t + 1, \quad t \in [0,1].$$

Тогда

$$t\ddot{v}_1(t) = t, \quad t\ddot{v}_2(t) = 1,$$
$$v_1(t)/t^2 = 1/2, \quad v_2(t)/(1-t)^2 \leqslant 1 - t/2 \leqslant 1, \quad t \in [0,1].$$

Следствие 3. Пусть $\pi(t) = t$, тогда уравнение (9) обладает свойством **A**, если при почти всех $t \in [0,1]$ выполнены неравенства

$$h^2(t)\sigma(t)p(t) \leqslant 2t, \quad (2-h(t))(1-h(t))^2\sigma(t)p(t) \leqslant 2.$$

Достаточным условием справедливости последних неравенств является выполнение при почти всех $t \in [0,1]$ неравенств

$$h^2(t)\sigma(t)p(t) \leqslant 2t, \quad (1-h(t))^2\sigma(t)p(t) \leqslant 1.$$

Литература

1. Кигурадзе И.Т. *Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.* – Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975. – 352 с.
2. Лабовский С.М. *О положительных решениях двухточечной краевой задачи для линейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения* // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 10. – С. 1695–1704.
3. Азбелев Н.В., Домошницкий А.И. *К вопросу о линейных дифференциальных неравенствах.* I // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 3. – С. 376–384.
4. Азбелев Н.В., Домошницкий А.И. *К вопросу о линейных дифференциальных неравенствах.* II // Дифференц.уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 6. – С. 923–931.
5. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
6. Azbelev N.V., Rakhmatullina L.F. *Theory of linear abstract functional differential equations and applications* // Mem. on different. equat. and math. physics. – Tbilisi, 1996. – V. 8. – P. 1–102.
7. Кудрявцев Л.Д. *Функциональные пространства со степенным весом* // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 270. – № 6. – С. 1317–1322.
8. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. *Об оценке спектрального радиуса линейного оператора в пространстве непрерывных функций* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 11. – С. 14–22.
9. Eloe P.W., Henderson J. *Positive solutions and conjugate points for a class of linear functional differential equations* // Boundary value probl. for functional different. equat. – Singapore, 1995. – P. 131–141.

Пермский государственный технический университет,

Пермский государственный университет

Поступила
03.03.1998