ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 1 (536)

УДК 517.544

Б.А. КАЦ, А.Ю. ПОГОДИНА

ЗАДАЧА О СКАЧКЕ И РЯД ФАБЕРА–ШАУДЕРА

1. Введение

Данная статья посвящена условиям разрешимости задачи о скачке на неспрямляемой разомкнутой дуге. Для простоты зададим эту дугу следующим образом. Пусть на отрезке $I = [0,1]$ определена непрерывная действительная функция $Y(x)$, обращающаяся в нуль на его концах. Ее график

$$\Gamma = \{z = x + iY(x) : 0 \le x \le 1\} \tag{1}$$

есть простая дуга на комплексной плоскости C с началом в точке 0 и концом в точке 1. Задача о скачке есть задача отыскания голоморфной в $\overline{C} \setminus \Gamma$ функции $\Phi(z)$ по краевому условию

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma', \tag{2}$$

где $\Phi^\pm(t)$ — предельные значения $\Phi(z)$ в точке $t \in \Gamma$ при приближении z к t сверху и снизу соответственно, а $\Gamma' = \Gamma \setminus \{0,1\}$. Заданная на Γ функция f предполагается удовлетворяющей условию Гёльдера

$$\sup\left\{\frac{|f(t') - f(t'')|}{|t' - t''|^\nu} : t', t'' \in \Gamma,\ t' \ne t''\right\} \equiv h_\nu(f,\Gamma) < \infty$$

с каким-либо показателем $\nu \in (0,1]$. Ниже через $H_\nu(\Gamma)$ обозначим множество всех заданных на Γ функций, удовлетворяющих этому условию.

Задача о скачке является важным частным случаем краевой задачи Римана. В этой связи был получен ряд хорошо известных результатов относительно ее разрешимости (см. [1], [2]), однако эти результаты относятся в основном к случаю кусочно-гладкой дуги Γ, когда это решение дается интегралом Коши по этой дуге.

Затем был получен ряд результатов разрешимости задачи о скачке на неспрямляемых кривых [3]. Именно, было доказано, что для любой простой дуги Γ и любой заданной на ней функции $f \in H_\nu(\Gamma)$ при условии

$$\nu > \frac{1}{2}\,\mathrm{dm}\,\Gamma \tag{3}$$

существует голоморфная в $\overline{C} \setminus \Gamma$ функция $\Phi(z)$, граничные значения которой связаны равенством (2). Здесь $\mathrm{dm}\,\Gamma$ — это хорошо известная в теории фракталов верхняя метрическая размерность Γ (напр., [4], с. 37).

При $Y \in H_\mu(I)$ условие

$$\nu > 1 - \frac{\mu}{2} \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-81019-Бел-а).

также является достаточным для разрешимости задачи о скачке (см. [3]). Как показано в [3], условие (3) неулучшаемо в терминах величин ν и $\operatorname{dm}\Gamma$. В свою очередь, условие (4) неулучшаемо в терминах показателей μ и ν; в этом легко убедиться посредством несложной модификации примера из работы [5]. Однако классы кривых, для которых задача о скачке разрешима, могут быть расширены путем привлечения других их характеристик. В данной статье для этого используются коэффициенты разложения функции $Y(x)$ в ряд Фабера–Шаудера.

Система Фабера–Шаудера (напр., [6], с. 218) состоит из заданных на отрезке I функций $\phi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где $\phi_0(x) = 1$ и $\phi_1(x) = x$ при $x \in I$, а для $n = 2^k + j$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, 2^k$, функция $\phi_n(x)$ непрерывна на I, равна нулю на $I \setminus (\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k})$, равна единице в точке $x = \frac{2j-1}{2^{k+1}}$ и линейна на отрезках $[\frac{j-1}{2^k}, \frac{2j-1}{2^{k+1}}]$ и $[\frac{2j-1}{2^{k+1}}, \frac{j}{2^k}]$. Эти функции образуют базис в пространстве непрерывных функций $C(I)$, т. е. любая непрерывная на отрезке I функция $Y(x)$ представима в виде равномерно сходящегося ряда $Y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n \phi_n(x)$, где (напр., [6]) $A_0 = Y(0)$, $A_1 = Y(1) - Y(0)$, а при $n = 2^k + j$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, 2^k$

$$A_n = A_n(Y) = Y\left(\frac{2j-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\left(Y\left(\frac{j-1}{2^k}\right) + Y\left(\frac{j}{2^k}\right)\right). \tag{5}$$

Коэффициенты Фабера–Шаудера дают полную характеристику функции Y, а значит, и кривой Γ.

2. Основная конструкция

Как уже отмечалось, полагаем $Y(0) = Y(1) = 0$. Поэтому разложение функции Y в ряд Фабера–Шаудера имеет вид

$$Y(x) = \sum_{n=2}^{\infty} A_n(Y)\phi_n(x),$$

где коэффициенты $A_n(Y)$ определяются формулой (5). Положим

$$Y_1(x) = 0, \quad Y_m(x) = \sum_{n=2}^{m} A_n(Y)\phi_n(x) \ (m > 1), \quad \Gamma_m = \{z = x + iY_m(x) : 0 \le x \le 1\}.$$

Таким образом, $\Gamma_1 = I$, а Γ_m с $m > 1$ есть ломаная с началом и концом в точках 0 и 1 соответственно. Две последовательные ломаные Γ_{m-1} и Γ_m при $A_m \neq 0$ отличаются тем, что одно из звеньев Γ_{m-1} при переходе к Γ_m заменяется парой звеньев, соединяющей начало и конец замененного звена. Эти три звена вместе составляют треугольник τ_m, ограничивающий треугольную область T_m. Будем также использовать обозначения $G = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \Gamma_m$ и $\overline{G} = G \cup \Gamma$. Очевидно, $\overline{G}$ есть замыкание G.

Пусть теперь $f \in H_\nu(\Gamma)$. Применим к этой функции оператор продолжения Уитни. Этот оператор (напр., [7], с. 230) любую заданную на Γ функцию $f(\zeta) \in H_\nu(\Gamma)$ продолжает до заданной на всей комплексной плоскости функции $u(z) \in H_\nu(C)$, причем продолжение u имеет в $C \setminus \Gamma$ частные производные по x и y такие, что

$$|\nabla u(z)| \le C h_\nu(f, \Gamma) \operatorname{dist}^{\nu-1}(z, \Gamma);$$

здесь и ниже $z = x + iy$, а буква C означает различные абсолютные постоянные. Теперь возьмем сужение u на $\overline{G}$ и повторно применим продолжение Уитни к этому сужению. Полученную функцию обозначим $f^w(z)$. Она обладает всеми перечисленными выше свойствами. Кроме того, из конструкции оператора продолжения Уитни ([7], с. 232) следует, что внутри любой из треугольных областей T_m функцию f^w можно рассматривать как результат продолжения по Уитни сужения u на τ_m с этой линии на всю плоскость. Поэтому при $z \in T_m$ справедлива оценка

$$|\nabla f^w(z)| \le C h_\nu(f, \Gamma) \operatorname{dist}^{\nu-1}(z, \tau_m).$$

Положим

$$\Phi_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m} \frac{f^w(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

Это интеграл Коши по кусочно-гладкой кривой, и для него справедливы классические результаты Гарнака, Мореры и Сохоцкого ([2], с. 37). Очевидно,

$$\Phi_m(z) - \Phi_{m-1}(z) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau_m} \frac{f^w(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \tag{6}$$

где знак перед интегралом противоположен знаку коэффициента $A_m(Y)$ (при этом контур τ_m обходится против часовой стрелки). Решение задачи о скачке будем искать в виде

$$\Phi(z) = \lim_{m\to\infty} \Phi_m(z) = \Phi_1(z) + \sum_{m=2}^{\infty} (\Phi_m(z) - \Phi_{m-1}(z)).$$

С учетом равенства (6) и формулы Бореля–Помпейа (напр., [8], с. 29) последнее равенство можно переписать в виде

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \sum_{m=2}^{\infty} \left(f^w(z)\chi_m(z) - \frac{1}{2\pi i}\iint_C \chi_m(\zeta)\frac{\partial f^w}{\partial\overline{\zeta}}\,\frac{d\zeta d\overline{\zeta}}{\zeta - z}\right),$$

где функция $\chi_m(z)$ равна 0 вне треугольной области T_m и равна ± 1 внутри ее, причем знак перед единицей противоположен знаку $A_m(Y)$. Очевидно, сумма $\chi(z) = \sum\limits_{m=2}^{\infty} \chi_m(z)$ представляет собой тривиальное решение задачи о единичном скачке на контуре $\Gamma \cup I$: она равна 0 в содержащей ∞ связной компоненте множества $\overline{C} \setminus (\Gamma \cup I)$, равна 1 в конечных компонентах этого множества, лежащих ниже действительной оси, и -1 в конечных компонентах, лежащих выше ее. Отсюда

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + f^w(z)\chi(z) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sign} A_m(Y)}{2\pi i}\iint_{T_m} \frac{\partial f^w}{\partial\overline{\zeta}}\,\frac{d\zeta d\overline{\zeta}}{\zeta - z}. \tag{7}$$

Для оценки составляющих этот ряд двойных интегралов по треугольным областям воспользуемся одной геометрической конструкцией из [9]. Если B — односвязная конечная область со спрямляемой границей, то через $\lambda(B)$ будем обозначать ее периметр. Кроме того, понадобятся следующие величины.

Определение 1. Вместимостью $q_\theta(B)$ области B в направлении θ будем называть длину стороны наибольшего из помещающихся внутри этой области открытых квадратов, одна из сторон которых образует угол θ с действительной осью. Вместимостью области B будем называть величину $q(B) = \inf\{q_\theta(B) : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$.

Для продолжений Уитни со спрямляемых кривых имеет место

Лемма 1 ([9]). *Пусть B — конечная область со спрямляемой границей γ, $f \in H_\nu(\gamma)$, а f^w — продолжение Уитни функции f с кривой γ в область B. Если $p < \frac{1}{1-\nu}$, то*

$$\iint_B |\nabla f^w|^p dx\,dy \le C h_\nu^p(f,\gamma)\lambda(B)q^{1-p(1-\nu)}(B). \tag{8}$$

Введем величину $\sigma_\alpha(\Gamma) = \sum\limits_{m=2}^{\infty} \lambda(T_m)q^\alpha(T_m)$.

Лемма 2. *Если $\nu > \frac{1}{2}$, $\sigma_\alpha(\Gamma) < \infty$ для некоторого $\alpha \in (0, 2\nu - 1)$ и $f \in H_\nu(\Gamma)$, то формула (7) дает решение задачи о скачке (2).*

Доказательство. Очевидно, формулу (7) можно записать в виде $\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \Phi_3(z)$, где $\Phi_2(z) = f^w(z)\chi(z)$,

$$\Phi_3(z) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sign} A_m(Y)}{2\pi i} \iint_{T_m} \frac{\partial f^w}{\partial \overline{\zeta}} \frac{d\zeta d\overline{\zeta}}{\zeta - z}.$$

Здесь Φ_1 и Φ_2 имеют скачок f^w на контурах I и $\Gamma \cup I$ соответственно. Поэтому их сумма непрерывна на I и имеет скачок f на Γ; при этом она не является, вообще говоря, голоморфной в $\overline{C} \setminus \Gamma$, так что в терминах работы [3] сумма $\Phi_1 + \Phi_2$ есть квазирешение задачи о скачке (2). Далее

$$\sum_{m=2}^{N} \frac{\operatorname{sign} A_m(Y)}{2\pi i} \iint_{T_m} \frac{\partial f^w}{\partial \overline{\zeta}} \frac{d\zeta d\overline{\zeta}}{\zeta - z} = -\frac{1}{2\pi i} \iint_{C} \sum_{m=2}^{N} \chi_m(\zeta) \frac{\partial f^w}{\partial \overline{\zeta}} \frac{d\zeta d\overline{\zeta}}{\zeta - z},$$

а из оценки (8) следует, что при $\sigma_\alpha(\Gamma) < \infty$ функция с компактным носителем $\sum\limits_{m=2}^{\infty} \chi_m(\zeta) \frac{\partial f^w}{\partial \overline{\zeta}}$ интегрируема в степени $p = \frac{1-\alpha}{1-\nu}$. Поскольку $\alpha < 2\nu - 1$, то $p > 2$ и поэтому (напр., [8]) слагаемое Φ_3 непрерывно во всей комплексной плоскости, а сумма $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$ голоморфна в $\overline{C} \setminus \Gamma$, что завершает доказательство. $\square$

Теперь оценим характеристику $\sigma_\alpha(\Gamma)$ через коэффициенты $A_m(Y)$.

Проекция на действительную ось треугольника τ_m, где $m = 2^k + j$, $1 \le j \le 2^k$, есть отрезок $I_m = [\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}]$ — носитель функции $\phi_m(x)$. Две вершины треугольника проектируются на концы этого отрезка, а третья — в его середину. Медиана треугольника τ_m, проведенная из этой третьей вершины, вертикальна и имеет длину $|A_m(Y)|$. Обозначим через $B_m(Y)$ длину той стороны треугольника, проекция которой совпадает с I_m. Тогда, очевидно,

$$\lambda(T_m) \le 2(|A_m(Y)| + B_m(Y)). \tag{9}$$

Далее, $B_m(Y) = 2^{-k}\sqrt{1 + K_m^2}$, где $K_m(Y)$ — угловой коэффициент этой стороны, т. е. $K_m(Y) = \sum\limits_{n=2}^{m-1} A_n(Y)\phi_n'(x)$ при $x \in I_m$. Все слагаемые этой суммы постоянны, причем отличны от нуля лишь те, для которых носитель ϕ_n содержит I_m. Найдем их номера.

Определение 2. Будем говорить, что число n подчинено числу m, если отрезок I_n есть собственное подмножество отрезка I_m.

Все числа, подчиненные $m = 2^k + j > 2$, можно найти по следующему правилу. Пусть $j_0 = j$. Положим j_{l+1} равным $\frac{j_l}{2}$ для четного j_l и $\frac{j_l+1}{2}$ для нечетного j_l при $l = 0, 1, 2, \ldots$ Очевидно, $j_l = 1$ при $l \ge k$. Тогда числу m подчинены k различных натуральных чисел $m_l = 2^{k-l} + j_l$, $l = 1, 2, \ldots, k$, причем наименьшее из них есть $m_k = 2$.

Далее, производная ϕ_n' при $n = m_l$ на отрезке I_m равна $(-1)^{(j_l+1)2^{k-l+1}}$. Отсюда $K_m(Y) = \sum\limits_{l=1}^{k} (-1)^{j_l+1} 2^{k-l+1} A_{m_l}(Y)$, и с учетом очевидного неравенства $\sqrt{1+K^2} \le 1 + |K|$ получаем $B_m(Y) \le 2m^{-1} + 2\Big|\sum\limits_{l=1}^{k} (-1)^{j_l+1} 2^{-l} A_{m_l}(Y)\Big|$. Обозначим

$$B_m^*(Y) = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{j_l+1} 2^{-l} A_{m_l}(Y), \tag{10}$$

где суммирование ведется по всем числам m_l, подчиненным m. Тогда согласно (9)

$$\lambda(T_m) \le 4m^{-1} + 2|A_m(Y)| + 4|B_m^*(Y)|.$$

Теперь оценим вместимость $q(T_m)$. Пусть $m = 2^k + j$, где $1 \le j \le 2^k$. Тогда треугольник T_m содержится в полосе $\{z = x + iy : \frac{j-1}{2^k} \le x \le \frac{j}{2^k}\}$, вместимость которой равна $2^{-k-\frac{1}{2}}$. Поскольку

$2^k \geq m/2$, отсюда получаем $q(T_m) \leq \frac{\sqrt{2}}{m}$. Далее, медиана этого треугольника, проведенная из вершины с абсциссой $\frac{2j-1}{2^{k+1}}$, имеет длину $|A_m(Y)|$. Отсюда $q(T_m) \leq |A_m(Y)|$ и, окончательно, $q(T_m) \leq \sqrt{2}\min\{m^{-1}, |A_m(Y)|\}$.

Объединив полученные оценки для периметра и вместимости, получаем

$$\sigma_\alpha(\Gamma) \leq C \sum_{m=2}^{\infty} (m^{-1} + |A_m(Y)| + |B_m^*(Y)|)(\min\{m^{-1}, |A_m(Y)|\})^\alpha,$$

где постоянная C не зависит от m. При этом ряд

$$\sum_{m=2}^{\infty} m^{-1}(\min\{m^{-1}, |A_m(Y)|\})^\alpha \leq \sum_{m=2}^{\infty} m^{-1-\alpha}$$

сходится при любом $\alpha > 0$. Таким образом, справедлива

Теорема. *Если $\nu > \frac{1}{2}$ и для некоторого $\alpha \in (0, 2\nu - 1)$ сходятся ряды*

$$\sum_{m=2}^{\infty} |A_m(Y)|(\min\{m^{-1}, |A_m(Y)|\})^\alpha < \infty, \tag{11}$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} |B_m^*(Y)|(\min\{m^{-1}, |A_m(Y)|\})^\alpha < \infty, \tag{12}$$

то для любой функции $f \in H_\nu(\Gamma)$ задача о скачке (2) на кривой (1) имеет решение.

3. Следствия

Хорошо известно, что $Y \in H_\mu(I)$ при $\mu \in (0,1)$ тогда и только тогда, когда $A_m = O(m^{-\mu})$ (напр., [6], с. 221). Легко видеть, что $B_m^* = O(m^{-\mu})$ и ряды (11), (12) сходятся при условии (4). Таким образом, теорема влечет

Следствие 1. Пусть числа $\mu \in (0,1)$ и $\nu \in (0,1)$ удовлетворяют условию (4). Тогда задача о скачке (2) разрешима для любой кривой Γ, являющейся графиком функции Y класса $H_\mu(I)$, и любой заданной на ней функции f класса $H_\nu(\Gamma)$.

Как отмечалось во введении, этот результат может быть получен и как следствие более ранних результатов первого автора, не использовавших ряды Фабера–Шаудера. Впрочем, функции Фабера–Шаудера и не могли привести к более сильному, чем (4), условию разрешимости для всего множества кривых, являющихся графиками функций класса Гёльдера, поскольку в этом классе условие (4) неулучшаемо.

Иначе обстоит дело для лакунарных рядов Фабера–Шаудера. Пусть $\mathbf{m} = \{m_1, m_2, \dots\}$ — бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел. Будем называть ряд Фабера–Шаудера $\mathbf{m}$-лакунарным, если в нем отличны от нуля лишь коэффициенты с номерами из множества $\mathbf{m}$. Сначала допустим, что $\mathbf{m}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{m \in \mathbf{m}} m^{-\alpha} < \infty \tag{13}$$

для некоторого $\alpha < 1$.

Следствие 2. Пусть кривая Γ определена равенством (1), где функция Y имеет $\mathbf{m}$-лакунарный ряд Фабера–Шаудера, а множество $\mathbf{m}$ удовлетворяет условию (13) для некоторого $\alpha < 1$. Если

$$\nu > \frac{1+\alpha}{2}, \tag{14}$$

то задача о скачке (2) разрешима на кривой Γ для любой функции f класса $H_\nu(\Gamma)$.

Доказательство. Очевидно, коэффициенты Фабера–Шаудера (5) ограничены. Если $|A_n| \le C$ для любого n, то согласно (10) $|B_n^*| \le 2C$ и ряды (11), (12) сходятся для показателя α из условия (13). Таким образом, условия теоремы выполнены при $\alpha < 2\nu - 1$, т. е. при условии (14).

Если последовательность $\mathbf{m}$ возрастает со скоростью геометрической прогрессии, то условие (13) выполняется для любого положительного α. Поэтому справедливо

Следствие 3. Пусть кривая Γ определена равенством (1), где функция Y имеет $\mathbf{m}$-лакунарный ряд Фабера–Шаудера, а множество $\mathbf{m}$ удовлетворяет условию $m_n \ge CQ^n$, $n = 1, 2, \ldots$, для некоторых $C > 0$, $Q > 1$. Тогда задача о скачке (2) разрешима на кривой Γ для любой функции f класса $H_\nu(\Gamma)$ при $\nu > \frac{1}{2}$.

В последних двух следствиях нет никаких ограничений на скорость убывания ненулевых коэффициентов A_m, $m \in \mathbf{m}$, и удовлетворяющая их предположениям функция Y может удовлетворять условию Гёльдера со сколь угодно малым показателем μ или не удовлетворять ему вовсе. Условие (14) может выполняться в то время, когда $Y \in H_\mu(I)$ для некоторого μ, но условие (4) нарушено, а также в случае, когда Y не удовлетворяет условию Гёльдера ни с каким показателем. Все это относится и к условию $\nu > \frac{1}{2}$. Оно совпадает с условием существования непрерывных граничных значений интеграла Коши по негладкой спрямляемой кривой [10], [11]. Однако из оценок размерностей, полученных в [12] и [13], следует, что удовлетворяющая условиям следствий 2 или 3 кривая Γ может оказаться неспрямляемой.

Одним из хорошо известных примеров фрактальных кривых является кривая Вейерштрасса–Мандельброта (напр., [4]), которая представляет собой график лакунарного тригонометрического ряда. Возможно, для таких рядов справедливы аналоги следствий 2 и 3.

В заключение отметим, что с помощью результатов работ [14] и [15] можно показать, что решение (7) задачи о скачке, условия существования граничных значений которой устанавливаются в теореме и ее следствиях, при некоторых дополнительных предположениях представимо интегралом Коши–Стильтьеса.

Литература

1. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – М.: ГИФМЛ, 1962. – 600 с.
3. Кац Б.А. *Краевая задача Римана на негладких дугах и фрактальные размерности* // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6. – Вып. 1. – С. 147–171.
4. Федер Е. *Фракталы.* – М.: Мир, 1991. – 280 с.
5. Кац Б.А. *Краевая задача Римана на замкнутой жордановой кривой* // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 4. – С. 68–80.
6. Кашин Б.С., Саакян А.А. *Ортогональные ряды.* – М.: Изд-во АФЦ, 1999. – 550 с.
7. Стейн И. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* – М.: Мир, 1973. – 342 с.
8. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* – М.: Мир, 1988. – 509 с.
9. Кац Б.А. *Граничные свойства интеграла Коши по кривой, теряющей спрямляемость в точке* // Изв. вузов. Математика. – 2006. – № 8. – С. 29–37.
10. Дынькин Е.М. *Гладкость интеграла типа Коши* // Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР. – 1979. – Т. 92. – С. 115–133.
11. Салимов Т.С. *Прямая оценка для сингулярного интеграла Коши по замкнутой кривой* // Научн. тр. МВ и ССО Азерб. ССР. – 1979. – № 5. – С. 59–75.

12. Ciesielski Z. *Fractal functions and Schauder bases* // Comp. Math. Appl. – 1995. – V. 30. – P. 283–291.
13. Jaffard S. *Sur la dimension de boite des graphes* // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. – 1998. – V. 326. – № 5. – P. 555–560.
14. Kats B.A. *The Stieltjes integral along fractal curve* // Le Matem. –1999. – V. LIV. – Fasc. 1. – P. 159–171.
15. Kats B.A. *The Cauchy integral along Φ-rectifiable curve* // Lobachevskii J. Math. – 2000. – V. 7. – P. 15–29.

Казанский государственный
архитектурно-строительный
университет

Поступила
24.11.2004