ТЕМА 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Обозначения, терминология

$$z = a + bi, \quad i^2 = -1,$$

где i - мнимая единица; a - действительная часть: a = Re z; bi - мнимая часть: b = Im z; числа вида bi - чисто мнимые; плоскость Oxy - комплексная плоскость; ось Ox - действительная ось; ось Oy - мнимая ось;

$\bar{z} = a - bi$ - число, сопряженное числу $z = a + bi$;

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ - модуль комплексного числа;

$\varphi = \arg z, \quad -\pi < \varphi \le \pi$ либо $0 \le \varphi < 2\pi$, - аргумент комплексного числа z (главное значение аргумента);

$$\cos\varphi = a/\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin\varphi = b/\sqrt{a^2 + b^2}, \quad tg\varphi = b/a \quad (a \ne 0),$$

Arg z - множество аргументов числа z:

$$Arg\, z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

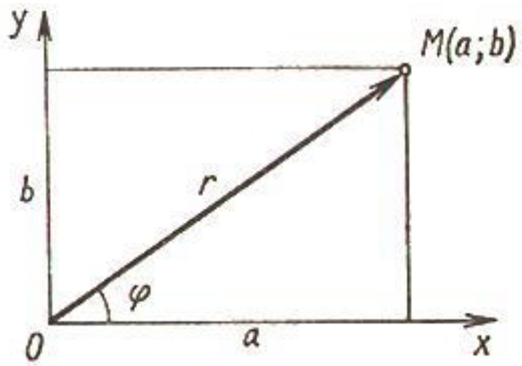

Рис. 5.1

Действия над комплексными числами

Если $z_1 = a + bi, \quad z_2 = c + di,$ то:

$$z_1 + z_2 = (a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i,$$
$$z_1 - z_2 = (a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i,$$
$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c,\ \ b = d,$$
$$z_1 z_2 = (a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i,$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i,$$
$$i^{4k} = 1,\ \ i^{4k+1} = i,\ \ i^{4k+2} = -1,\ \ i^{4k+3} = -i,\ \ k \in N.$$

Тригонометрическая форма комплексных чисел (рис. 5.1)

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где r - модуль; φ - агрумент комплексного числа.

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ \ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)),$$

$$\bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)),$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2,\ \ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\ \ k \in Z.$$

Формула Муавра

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Извлечение корней из комплексных чисел

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

$$k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Корни из единицы

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n},\ \ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

В частности,

$$\sqrt{1}=\{1,\ -1\},$$

$$\sqrt[3]{1}=\left\{1,\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\},$$

$$\sqrt[4]{1}=\{1,\ -1,\ i,\ -i\}.$$

Свойства сопряженных чисел

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2},\quad \overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2},\quad \overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2},$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\quad \overline{\left(z^n\right)}=\left(\overline{z}\right)^n,\quad z\overline{z}=a^2+b^2=|z|^2.$$

Свойства модуля

$$|\overline{z}|=|z|,\quad |z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad |z^n|=|z|^n,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$|z_1|-|z_2|\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_1|,$$

$$|z_1|-|z_2|\le|z_1-z_2|\le|z_1|+|z_1|.$$

Свойства аргумента

$$Arg(z_1z_2)=Argz_1+Argz_2,\quad Arg\,\frac{z_1}{z_2}=Argz_1-Argz_2,$$

$$Argz^n=nArgz,\quad Arg\,\overline{z}=-Argz.$$

Показательная (экспоненциальная) форма комплексных чисел

$$z=re^{i\varphi},$$

где r - модуль; φ - аргумент; $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$

$$\overline{z}=re^{-i\varphi}=r(\cos\varphi-i\sin\varphi),$$

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},\quad z^n=r^ne^{in\varphi},$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\exp\left(i\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

ТЕМА 2. СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Общий вид системы

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

a_{ij}, *i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n,* - коэффициенты системы; b_i - свободные члены; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - переменные; $m, n \in N.$

Если все b_i = 0, система называется однородной.

Матричная запись системы линейных уравнений

$$AX = B,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Матрицу *A* называют матрицей (или основной матрицей) системы. Матрицу

$$D = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

называют расширенной матрицей системы, а матрицу $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix}^T,$ для которой *AC* = *B*, - вектор-решением системы.

Критерий совместности линейных уравнений

Система совместна тогда и только тогда, когда rank A = rank D.

Правило Крамера

Если $m = n$ и $\det A \neq 0,$ то система совместна и имеет единственное решение $X = A^{-1}B$ или, что то же самое, $x_i = \det A_i / \det A,$ где $\det A_i$ - определитель, полученный из det A заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Общее решение системы линейных уравнений

Если система линейных уравнений $AX = B$ совместна, rank $A = r$ и, например,

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

- базисный минор матрицы системы, то она равносильна системе

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{aligned}$$

Придавая переменным $x_{r+1},\ x_{r+2},\ \ldots,\ x_n$ (свободным переменным) $x_{r+1} = \alpha_{r+1},\ x_{r+2} = \alpha_{r+2},\ \ldots,\ x_n = \alpha_n,$ получаем однозначно (например, по правилу Крамера) $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ x_r = \alpha_r.$ Тогда $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$ - решение исходной системы.

Метод Гаусса

Метод Гаусса - метод последовательного исключения переменных. С помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы D системы матрицу A системы приводят к ступенчатому виду:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2r} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{rr} & \dots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & d_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & d_m \end{array}\right]$$

$(c_{ii} \neq 0,\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ r)$ Если среди чисел $d_{r+1},\ d_{r+2},\ \dots,\ d_m$ есть отличные от нуля, система несовместна.

Если $d_{r+1} = d_{r+2} = \dots = d_m = 0,$ то:

1) при $r = n$ исходная система равносильна системе:

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n &= d_1, \\ c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n &= d_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{nn}x_n &= d_n, \end{aligned}$$

имеющей единственное решение (сначала находим из последнего уравнения x_n, из предпоследнего x_{n-1} и т. д.);

2) при $r < n$ исходная система равносильна системе:

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1r}x_r &= d_1 - c_{1r+1}x_{r+1} - \dots - c_{1n}x_n, \\ c_{22}x_2 + \dots + c_{2r}x_r &= d_2 - c_{2\,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{rr}x_r &= d_r - c_{r\,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{rn}x_n, \end{aligned}$$

имеющей бесчисленное множество решений ($x_{r+1},\ x_{r+2},\ \dots,\ x_n$ - свободные переменные).

Однородные системы линейных уравнений

Однородная система линейных уравнений $AX = 0$ всегда совместна. Она имеет нетривиальные (ненулевые) решения, если $r = \operatorname{rank} A < n$.

Для однородных систем базисные переменные (коэффициенты при которых образуют базисный минор) выражаются через свободные переменные соотношениями вида:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= d_{11}x_{r+1} + d_{12}x_{r+2} + \ldots + d_{1n-r}x_n,\\
x_2 &= d_{21}x_{r+1} + d_{22}x_{r+2} + \ldots + d_{2n-r}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_r &= d_{r1}x_{r+1} + d_{r2}x_{r+2} + \ldots + d_{rn-r}x_n.
\end{aligned}
$$

Тогда *n* - *r* линейно независимыми вектор-решениями будут:

$$
c_1 = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ \vdots \\ d_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ \vdots \\ d_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad c_{n-1} = \begin{bmatrix} d_{1n-r} \\ d_{2n-r} \\ \vdots \\ d_{rn-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}
$$

а любое другое решение является их линейной комбинацией. Вектор-решения $(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{n-r})$ образуют нормированную фундаментальную систему.

В линейном пространстве V_n множество решений однородной системы линейных уравнений образует подпространство размерности *n* - *r*; $(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{n-r})$ - базис этого подпространства.

ТЕМА 3. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Определение линейного пространства

Пусть *V* - непустое множество (его элементы будем называть векторами и обозначать $\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z},$ ...), в котором установлены правила:

1) любым двум элементам $\bar{x},\ \bar{y} \in V$ соответствует третий элемент $\bar{x} + \bar{y} \in V,$ называемый суммой элементов $\bar{x},\ \bar{y}$ (внутренняя операция);

2) каждому $\bar{x} \in V$ и каждому $\alpha \in R$ отвечает определенный элемент $\alpha\bar{x}$ (внешняя операция).

Множество *V* называется действительным линейным (векторным) пространством, если выполняются аксиомы:

I. $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x} \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in V.$

II. $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) \quad \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V.$

III. $\exists\ \bar{0} \in V$ (нулевой элемент, такой, что $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}, \quad \forall \bar{x} \in V$).

IV. $\forall \bar{x} \in V \quad \exists\ (-\bar{x}) \in V$ (элемент, противоположный элементу $\bar{x}$), такой, что $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}.$

V. $1 \cdot \bar{x} = \bar{x} \quad \forall \bar{x} \in V.$

VI. $\alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x} \quad \forall \bar{x} \in V,\ \forall \alpha,\ \beta \in R.$

VII. $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y} \quad \forall \bar{x},\ \bar{y} \in V,\ \forall \alpha \in R.$

VIII. $(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x} \quad \forall \bar{x} \in V,\ \forall \alpha,\ \beta \in R.$

Аналогично определяется комплексное линейное пространство (вместо *R* рассматривается *C*).

Подпространство линейного пространства

Множество $V' \in V$ называется подпространством линейного пространства *V*, если:

1) $\forall \bar{x},\ \bar{y} \in V' \Rightarrow \bar{x} + \bar{y} \in V';$

2) $\forall x \in V',\ \forall \alpha \in R(C) \Rightarrow \alpha\bar{x} \in V'.$

Линейная комбинация векторов

Линейной комбинацией векторов $\overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\ \ldots,\ \overline{x}_r$ называют вектор

$$\overline{y} = \alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_r\overline{x}_r = \sum_{k=1}^{r}\alpha_k\overline{x}_k,$$

где $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_r \in R(C)$ - коэффициенты линейной комбинации. Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0,$ комбинация называется тривиальной, если $\exists\,\alpha_i \neq 0,$ - нетривиальной.

Линейная зависимость и независимость векторов

Система $\overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\ \ldots,\ \overline{x}_r \in V$ линейно зависима $\Leftrightarrow \exists\,\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_r \in R(C),$ $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2 > 0,$ что $\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_r\overline{x}_r = \sum_{k=1}^{r}\alpha_k\overline{x}_k = 0.$

Система $\overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\ \ldots,\ \overline{x}_r \in V$ линейно независима $\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{r}\alpha_k\overline{x}_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0\right).$

Критерий линейной зависимости векторов

Для того чтобы векторы $\overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\ \ldots,\ \overline{x}_r$ (*r* > *1*) были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из этих векторов являлся линейной комбинацией остальных.

Размерность линейного пространства

Линейное пространство *V* называется *n*-мерным (имеет размерность *n*), если в нем:

1) существует *n* линейно независимых векторов;

2) любая система *n + 1* векторов линейно зависима.

Обозначения : *n* = dim *V*; V_n.

Базис пространства V_n. Координаты вектора

Базис - любая упорядоченная система $\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \ldots,\ \bar{e}_n$ из *n* линейно независимых векторов пространства V_n.

Обозначение: $(\bar{e}) = (\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \ldots,\ \bar{e}_n)$.

Для каждого вектора $\bar{x} \in V_n$ существуют числа $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in R(C)$, такие что

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\bar{e}_k =$$

$$= (\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \ldots,\ \bar{e}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\bar{e})(\bar{x}).$$

Числа $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ называются координатами вектора $\bar{x}$ в базисе ($\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \ldots,\ \bar{e}_n$) (определяются однозначно), *X = (x)* - координатный столбец вектора $\bar{x}$ в этом базисе. Употребляется запись: $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$.

Справедливы формулы:

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k\bar{e}_k,\quad \bar{y} = \sum_{k=1}^{n} y_k\bar{e}_k \Rightarrow \bar{x} + \bar{y} = \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)\bar{e}_k,$$

$$\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x_k = y_k,\quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k\bar{e}_k \Rightarrow \lambda\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k)\bar{e}_k.$$

Матрица системы векторов

Для векторов $\bar{x}_1 = (a_{11};\ a_{21};\ \ldots;\ a_{n1}),\ \bar{x}_2 = (a_{12};\ a_{22};\ \ldots;\ a_{n2}),\ \ldots,\ \bar{x}_m = (a_{1m};\ a_{2m};\ \ldots;\ a_{nm})$ в базисе ($\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \ldots,\ \bar{e}_n$) - матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix};$$

m векторов пространства V_n линейно независимы тогда и только тогда, когда rank *A* = *m*.

Матрица *S* перехода от базиса $(\bar{e}) = (\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \dots,\ \bar{e}_n)$ к базису $(\bar{e}') = (\bar{e}'_1,\ \bar{e}'_2,\ \dots,\ \bar{e}'_n)$ - матрица системы векторов $(\bar{e}')$ в базисе $(\bar{e})$

Если $S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix}$, то:

$$\begin{aligned} \bar{e}'_1 &= s_{11}\bar{e}_1 + s_{21}\bar{e}_2 + \dots + s_{n1}\bar{e}_n, \\ \bar{e}'_2 &= s_{12}\bar{e}_1 + s_{22}\bar{e}_2 + \dots + s_{n2}\bar{e}_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{e}'_n &= s_{1n}\bar{e}_1 + s_{2n}\bar{e}_2 + \dots + s_{nn}\bar{e}_n, \end{aligned}$$

или кратко:

$$\bar{e}'_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ji}\bar{e}_j, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n; \quad (\bar{e}') = (\bar{e})S.$$

Если $\det S \neq 0,$ то $(\bar{e}) = (\bar{e}')S^{-1},$ т. е. S^{-1} - матрица перехода от базиса $(\bar{e}')$ к базису $(\bar{e})$.

Преобразование координат вектора

Если $\bar{x} = (\bar{e})X = (\bar{e}')X',$ то $X = SX'.$ В развернутой записи:

$$x_1 = s_{11}x_1' = s_{12}x_2' + \ldots + s_{1n}x_n',$$
$$x_2 = s_{21}x_1' = s_{22}x_2' + \ldots + s_{2n}x_n',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = s_{n1}x_1' = s_{n2}x_2' + \ldots + s_{nn}x_n'.$$

Очевидно, что $X' = S^{-1}X.$

ТЕМА 4. ОПЕРАТОР

Определение линейного оператора

Преобразование (оператор, отображение) *f* линейного пространства в себя (запись $f : V \to V$) называется линейным, если:

1) $f(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2), \quad \forall f \bar{x}_1, \ \bar{x}_2 \in V;$
2) $f(\lambda \bar{x}) = \lambda f(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in V, \ \forall \lambda \in R(C).$

Условия 1 и 2 равносильны соотношению

$$f(\alpha \bar{x}_1 + \beta \bar{x}_2) = \alpha f(\bar{x}_1) + \beta f(\bar{x}_2), \quad \forall f \bar{x}_1, \ \bar{x}_2 \in V, \ \forall \alpha_1, \ \beta \in R(C).$$

Матрица линейного оператора

Матрица линейного оператора $f : V_n \to V_n$ в базисе ($\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$) - матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

столбцами которой являются столбцы образов базисных векторов $f(\bar{e}_i) = \bar{e}_i'$ оператора *f*, т. е. $\bar{e}_i' = f(\bar{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \bar{e}_j .$

Линейный оператор называется невырожденным, если $\det A \neq 0.$

Связь между координатами вектора и его образа

Если $\bar{x} \in V_n$ в базисе ($\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$) имеет координатный столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^T$, f - линейный оператор с матрицей *A* в данном базисе, $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix}^T$ - координатный столбец вектора $\bar{y} = f(\bar{x})$, то $Y = AX$ (употребляется также запись $\bar{y} = A\bar{x}$). Более подробно:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{aligned}$$

Связь между матрицами одного и того же линейного оператора в разных базисах

Если в базисе $\left(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\right)$ линейный оператор $f: V_n \to V_n$ имеет матрицу *A*, в базисе $\left(\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \ldots, \bar{e}'_n\right)$ - матрицу *B*, а *S* - матрица перехода от первого базиса ко второму, то

$$B = S^{-1}AS.$$

Произведение и сумма линейных операторов

Если *f* и *g* - линейные операторы пространства V_n с матрицами *A* и *B* в базисе $\left(\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \ldots, \bar{e}'_n\right)$, то операторы произведения $g \circ f \left((g \circ f)(\bar{x}) = g(f(x))\right)$ и суммы $f + g \left((f+g)(\bar{x}) = f(\bar{x}) + g(\bar{x})\right)$ - линейные и имеют в том же базисе матрицы *BA* и *A* + *B* соответственно.

Оператор, обратный данному линейному оператору

$\varphi: V_n \to V_n$

$f: V_n \to V_n$ операт $(f \circ \varphi)(\bar{x}) = (\varphi \circ f)(\bar{x}) = \bar{x}: \forall \bar{x} \in V_n$. линейному оператору

, если

Обозначение: $\varphi = f^{-1}$.

Для существования f^{-1} необходимо и достаточно, чтобы *f* был невырожденным оператором. Если *A* - матрица оператора *f* в некотором базисе, то оператор f^{-1} в том же базисе имеет матрицу A^{-1}.

Ядро и область значений линейного оператора

Ядро оператора: $f: V \to V$ - множество, обозначаемое Ker *f*:

$$Kerf = \{\bar{x} \in V \mid f(\bar{x}) = \bar{0}\}$$

Область значений (образ) оператора $f: V \to V$ - множество, обозначаемое Im *f*:

$$\mathbf{Im}\, f = \{\bar{y} \in V \mid \bar{y} = f(\bar{x}),\ \bar{x} \in V\}$$

Множества Ker *f* и Im *f* являются подпространствами пространства *V*.

Ранг оператора $f: V_n \to V_n$ (обозначение: dim Im *f*) - ранг матрицы *A* линейного оператора *f*,

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} A.$$

Дефектом оператора $f: V_n \to V_n$ называют dim Ker *f*,

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = n.$$

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Ненулевой вектор $\bar{x} \in V_n$ называется собственным вектором линейного оператора $f: V_n \to V_n$, если $\exists \lambda \in R$ ($\lambda \in C$ для комплексного V_n), такое, что $f(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$.

Число λ называется собственным числом (собственным значением) оператора *f*, соответствующим этому собственному вектору.

Если в некотором базисе оператор *f* имеет матрицу *A* и в том же базисе вектор $\bar{x}$ имеет координатный столбец *X*, то $AX = \lambda X$ или $(A - \lambda E)X = O.$

Собственные числа λ линейного оператора $f: V_n \to V_n$ - корни характеристического уравнения $\det\left|a_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right| = 0,$, где (a_{ij}) - матрица оператора *f*, δ_{ij} - символ Кронекера.

Для каждого собственного значения λ_0 соответствующие собственные векторы могут быть найдены из матричного уравнения $(A - \lambda_0 E)X = O$ или соответствующей ему системы линейных уравнений

$$\begin{array}{llll}
(a_{11} - \lambda_0)x_1 + & a_{12}x_2 + \ldots + & a_{1n}x_n & = 0, \\
a_{21}x_1 + & (a_{22} - \lambda_0)x_2 + \ldots + & a_{2n}x_n & = 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \\
a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + \ldots + & (a_{nn} - \lambda_0)x_n & = 0.
\end{array}$$

Линейный оператор называется оператором простой структуры, если существует базис, состоящий из собственных векторов этого оператора. Матрица линейного оператора в этом базисе имеет вид

$$\begin{bmatrix}
\lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & \lambda_n
\end{bmatrix},$$

где λ_i - соответствующие собственные значения.

ТЕМА 5. ПЕРЕХОД К НОВОМУ БАЗИСУ

Преобразование координат вектора при переходе к новому базису

Пусть $\overline{e}_1, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e}_n$ и $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$ — два базиса в n-мерном линейном пространстве L.

Матрицей перехода от базиса $\overline{e}_1, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e}_n$ к базису $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$ называется матрица C, столбцами которой являются координаты векторов $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$ в базисе $\overline{e}_1, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e}_n$:

$$\begin{array}{ll} \overline{f}_1 = f_{11}e_1 + f_{21}e_2 + \ldots + f_{n1}e_n, & \overline{f}_1 = (f_{11}, f_{21}, \ldots, f_{n1})^T, \\ \overline{f}_2 = f_{12}e_1 + f_{22}e_2 + \ldots + f_{n2}e_n, & \overline{f}_2 = (f_{12}, f_{22}, \ldots, f_{n2})^T, \\ \ldots, & \ldots, \\ \overline{f}_n = f_{1n}e_1 + f_{2n}e_2 + \ldots + f_{nn}e_n, & \overline{f}_n = (f_{1n}, f_{2n}, \ldots, f_{nn})^T, \end{array} \quad C = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}, \quad \det C \neq 0,$$

Вектор $\overline{x} \in L$ линейно выражается через векторы обоих базисов. Тогда, если

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + \ldots + x_n\overline{e_n} = y_1\overline{f_1} + y_2\overline{f_2} + \ldots + y_n\overline{f_n}$$

то координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вектора в базисе $\overline{e}_1, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e}_n$, и его координаты $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в базисе $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$ связаны соотношениями

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad C_{e\to f} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}, \quad \det C_{e\to f} \neq 0$$

,

или $\overline{x_e} = C_{e\to f}\,\overline{x_f}, \quad \overline{x_f} = C_{e\to f}{}^{-1}\,\overline{x_e},$

где $C_{e\to f}$, $C_{e\to f}{}^{-1}$ — матрица перехода от базиса $\overline{e}_1, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e}_n$ к базису $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$ и обратная к ней; $\overline{x_e} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $\overline{x_f} = (y_1, y_2, \ldots y_n)^T$ — векторы-столбцы координат вектора $\overline{x}$ в соответствующих базисах.

Таким образом доказана следующая

Теорема. *Пусть* (e)={ $\overline{e}_1, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e}_n$ } *и* (f)={ $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$ }— *два базиса в n-мерном линейном пространстве L.*

Координаты $\overline{x_e} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ *вектора* $\overline{x}$ *в базисе* (e) *и координаты* $\overline{x_f} = (y_1, y_2, \ldots y_n)^T$ *вектора* $\overline{x}$ *в базисе* (f) *связаны соотношением*

$$\overline{x_f} = C_{e\to f}{}^{-1}\,\overline{x_e},$$

где $C_{e\to f}$, $C_{e\to f}{}^{-1}$ — *матрица перехода от базиса* (e) *к базису* (f) *и обратная к ней.*

Пространство строк (столбцов) матрицы. Линейная зависимость и линейная независимость строк (столбцов) матрицы

Пусть A — прямоугольная матрица из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Строки $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ матрицы A можно рассматривать как элементы пространства арифметических векторов R^n, а столбцы $A^{(j)} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$ — как элементы R^m.

Строки и столбцы матрицы, рассматриваемые как элементы (векторы) соответствующих пространств арифметических векторов обладают всеми свойствами арифметических векторов, для них определены понятия линейной зависимости и линейной независимости и справедливы все, приведенные выше, утверждения для линейно зависимых и линейно независимых систем векторов линейного пространства.

Минор матрицы. Ранг матрицы

Определение. *Минором матрицы порядка r называется определеитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении любых r строк и r столбцов матрицы*; *обозначаем* M_r.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \\ 9 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

минор M_2 расположен на пересечении 2-й и 5-й строк с 3-м и 5-м столбцами, а минор M_4 — на пересечении 1-й, 3-й, 4-й и 5-й строк с 1-м, 2-м, 4-м и 5-м столбцами.

Минор M_r, расположенный в первых r строках и в первых r столбцах, называется *угловым* или *главным* минором.

Определение. *Рангом матрицы называется наивысший порядок отличных от нуля миноров. Т.е. если у матрицы порядка (m, n) есть отличный от нуля минор порядка r, r<= min(m, n), а все миноры более высоких порядков равны нулю, то r — ранг матрицы.*

Определение. *Если ранг матрицы равен r, то любой отличный от нуля минор матрицы порядка r называется базисным минором, а входящие в него столбцы и строки называются базисными.*

Используя свойства определителей нетрудно доказать, что элементарные преобразования строк (столбцов) матрицы не изменяют ее ранга.

Теорема о базисном миноре

Теорема. *Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы. Все остальные строки (столбцы) матрицы линейно выражаются через базисные.*

Из теоремы о базисном миноре, в частности, следует, что строки и столбцы квадратной матрицы линейно независимы тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля.

Важным следствием теоремы о базисном миноре является следующее утверждение:

ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых сторк (столбцов) матрицы, т.е. если r — ранг матрицы, то в матрице есть r линейно независимых строк (столбцов), а любые r+1 *строк (столбцов) — линейно зависимы.*

Вспомним, что матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3r} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \ r \le \min(m,n), \ a_{ij} \ne 0 \text{ только если } i < j \le r$$

называется *ступенчатой матрицей.*

Очевидно, что ранг ступенчатой матрицы равен числу ненулевых строк.

Поскольку доказано, что любую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду, то можно дать еще одно эквивалентное определение ранга матицы: *ранг матрицы равен числу ненулевых строк в ступенчатой форме матрицы.*

Это последнее определение позволяет вычислять ранг матрицы с помощью Гауссова исключения:

для того, чтобы вычислить ранг матрицы, приводим ее Гауссовым исключением к ступенчатому виду и подсчитываем количество ненулевых строк.

ТЕМА 6. БИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА

Определение билинейной функции. Общие свойства.

Определение. *Билинейной функцией f* на линейном пространстве *L* над полем ***P***

называется функция от двух векторных аргументов $f: L\times L \to \mathbf{P}$, $(x, y) \to f(x, y) \in \mathbf{P}$, удовлетворяющая условию линейности по каждому аргументу:

1. $f(\alpha x+\beta y, z) = \alpha f(x, z)+ \beta f(y, z)\ \forall x, y, z \in L,\ \forall \alpha,\beta \in \mathbf{P}$,
2. $f(x, \alpha y+\beta z) = \alpha f(x, y)+ \beta f(x, z)\ \forall x, y, z\in L,\ \forall \alpha,\beta\in \mathbf{P}$.

Следствия. Для билинейной функции f выполняются свойства

1. $f(0_L , y) = f(x, 0_L) = 0\ \forall x, y \in L$.

2. $\forall m, n \in \mathbf{N}$,

$\forall \alpha_i, \beta_j \in \mathbf{P},\ \forall u_i, v_j \in L$.

Упражнение. Доказать следствия.

Примеры.

1. Скалярное произведение (x,y) на евклидовом пространстве является билинейной функцей.

2. Если f_1, f_2 - линейные функции на L, то $f(x, y)= f_1(x)f_2(y)$ – билинейная функция на L.

2. Матрица билинейной формы.

Пусть f - билинейная функция на n-мерном пространстве $L=L^n$ над полем $\mathbf{P}$, $\mathbf{e}=\{e_1,\ldots,e_n\}$ - произвольный базис в L. Для любых $x,\ y\in L$ имеем $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\ ,\ y=\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\ ,$ где все $x_i\ ,y_j\in \mathbf{P}$.

Тогда

$$f(x, y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)=\sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j f(e_i,e_j) . \qquad (24.1)$$

Формула (24.1) показывает, что функция $f(x, y)$ является многочленом от координат x, y, все одночлены которого – первой степени по x и первой степени по y. Такой многочлен называется *формой* первой степени (то есть линейной) по x, и первой степени (то есть линейной) по y, то есть *билинейной формой*. Такие билинейные формы мы и будем изучать.

Очевидно, значение билинейной формы $f(x,y)$ для произвольных $x, y \in L$ полностью и однозначно определяется n^2 значениями $f(e_i,e_j)$ на упорядоченных парах базисных векторов e_i, e_j.

Определим квадратную матрицу $[f]_e = (f_{ij})$ порядка n, где $f_{ij} = f(e_i, e_j)$, $i,j = 1,\ldots,n$. Матрица $[f]_e$ называется матрицей билинейной формы f в базисе $\boldsymbol{e}$.

Из формулы (24.1) $f(x, y)=\sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j f(e_i,e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j f_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i(\sum_{j=1}^{n} f_{ij} y_j) = [x]_e^t \cdot [f]_e \cdot [y]_e$.

Упражнение. Доказать обратное утверждение: если функция f задается формулой $f(x, y)=\sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j f_{ij}$, то f – билинейная функция, и матрица $[f]_e = (f_{ij})$.

^ 24.3. Изменение матрицы билинейной формы при изменении базисов. Ранг билинейной формы.

Пусть $\boldsymbol{e}' = \{e'_1,\ldots,e'_n\}$ – ещё один базис в L, и $T_{e\to e'} = T = (t_{ij})$ - матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{e}'$: $e'_j=\sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i$. Тогда $\forall\ x, y \in L$ имеем $[x]_e = T[x]_{e'}$, $[y]_e = T[y]_{e'}$, и

$f(x,y) = [x]_e^t [f]_e [y]_e = (T[x]_{e'})^t [f]_e (T[y]_{e'}) = [x]_{e'}^t \cdot T^t [f]_e T \cdot [y]_{e'} =$

$= [x]_{e'}^t [f]_{e'} [y]_{e'}$. Следовательно, из единственности матрицы билинейной формы, $[f]_{e'} = T^t [f]_e T$.

Следствие. $\det [f]_{e'} = \det [f]_e \cdot (\det T)^2$.

Определение. Пусть $f(x, y)$ - билинейная форма на L. *Рангом билинейной формы* f называется ранг ее матрицы в каком-либо базисе пространства L: $rg\ f = rg\ [f]_e$.

Корректность определения следует из того, что ранг матрицы билинейной формы не зависит от выбора базиса: $rg\ [f]_{e'} = rg\ [f]_e$ для любых базисов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$, так как умножение матрицы $[f]_e$ на невырожденные матрицы T^t и T слева и справа соответственно не меняет ранга матрицы билинейной формы.

ТЕМА 7. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Определение

Действительное линейное пространство *E* называется евклидовым, если каждой паре векторов $\bar{x},\ \bar{y} \in E$ сопоставляется число $\bar{x} \cdot \bar{y} \in E$ так, что $\forall \bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z} \in V$ и $\forall \lambda \in R$ выполняются аксиомы:

I. $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}.$

II. $\left(\bar{x} + \bar{y}\right) \cdot \bar{z} = \bar{x} \cdot \bar{z} + \bar{y} \cdot \bar{z}.$

III. $\left(\lambda \bar{x}\right) \cdot \bar{y} = \lambda\left(\bar{x} \cdot \bar{y}\right).$

IV. $\bar{x} \cdot \bar{x} \geq 0,\ \bar{x} \cdot \bar{x} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 0.$

Число $\bar{x} \cdot \bar{y}$ называют скалярным произведением векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$, $\bar{x} \cdot \bar{x}$ - скалярным квадратом вектора $\bar{x}$ (пишут $\bar{x}^2$). Введенная операция называется скалярным умножением векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$.

Длина вектора

Длина вектора $\bar{x} \in E$ - число $\left|\bar{x}\right| = \sqrt{\bar{x}^2}.$

Свойства:

1) $\left|\bar{x}\right| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0};$

2) $\left|\lambda \bar{x}\right| = \left|\lambda\right|\ \left|\bar{x}\right| \quad \forall \bar{x} \in E \quad \forall \lambda \in R;$

3) $\left|\bar{x}\cdot\bar{y}\right| \le \left|\bar{x}\right| \; \left|\bar{y}\right| \;\; \forall \bar{x},\; \bar{y}\in E$ (неравенство Коши-Буняковского);

4) $\left|\bar{x}+\bar{y}\right| \le \left|\bar{x}\right| + \left|\bar{y}\right| \;\; \forall \bar{x},\; \bar{y}\in E$ (неравенство треугольника).

Угол между векторами

Углом между векторами $\bar{x}\in E$ и $\bar{y}\in E$ называют угол φ, для которого

$$\cos\varphi = \frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{\left|\bar{x}\right|\cdot\left|\bar{y}\right|},\quad 0\le\varphi<2\pi.$$

Ортогональные векторы

Векторы $\bar{x},\; \bar{y}\in E$ ортогональны, если $\bar{x}\cdot\bar{y}=0.$

Нормированные векторы

Вектор $\bar{x}\in E$ называется нормированным или единичным, если $\left|\bar{x}\right|=1.$

Если $\bar{x}\ne\bar{0},$ то соответствующими этому вектору нормированными векторами будут $\bar{x}_0=\bar{x}/\left|\bar{x}\right|,\;\; \bar{x}_0'=-\bar{x}/\left|\bar{x}\right|.$

Нормированный базис

Система векторов $\bar{x}_1,\; \bar{x}_2,\; \ldots,\; \bar{x}_n,\;\; n\ge 2,$ для которой

$$\bar{x}_i\cdot\bar{x}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\ne j,\end{cases}$$

называется ортонормированной.

Во всяком пространстве $E_n,\ n \ge 2,$ существует ортонормированный базис. Из произвольного базиса $\left(\overline{g}_1,\ \overline{g}_2,\ \ldots,\ \overline{g}_n\right)$ пространства E_n ортогональный базис может быть построен с помощью процесса ортогонализации:

$$\overline{f}_1 = \overline{g}_1,$$

$$\overline{f}_2 = \overline{g}_2 + \lambda_1^{(2)}\overline{f}_1,$$ где $$\lambda_1^{(2)} = -\frac{\overline{f}_1 \cdot \overline{g}_2}{\overline{f}_1^{\,2}},$$

$$\overline{f}_3 = \overline{g}_3 + \lambda_1^{(3)}\overline{f}_1 + \lambda_2^{(3)}\overline{f}_2,$$ где $$\lambda_1^{(3)} = -\frac{\overline{f}_1 \cdot \overline{g}_3}{\overline{f}_1^{\,2}},\quad \lambda_2^{(3)} = -\frac{\overline{f}_2 \cdot \overline{g}_3}{\overline{f}_2^{\,2}},$$

. . . .

$$\overline{f}_k = \overline{g}_k + \lambda_1^{(k)}\overline{f}_1 + \lambda_2^{(k)}\overline{f}_2 + \ldots + \lambda_{k-1}^{(k)}\overline{f}_{k-1},$$ где

$$\lambda_j^{(k)} = -\frac{\overline{f}_j \cdot \overline{g}_k}{\overline{f}_j^{\,2}},\quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1.$$

Пронормировав каждый вектор $\overline{f}_k,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$ получим ортонормированный базис. В ортонормированном базисе ($\overline{e}_1,\ \overline{e}_2,\ \ldots,\ \overline{e}_n$) для векторов $\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n,\ \overline{y} = y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + \ldots + y_n\overline{e}_n$ имеем:

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = Y^T X = X^T Y,$$
$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

ТЕМА 8. СИММЕТРИЧНЫЙ И САМОСОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОРЫ

Сопряженные операторы

Оператор $f^*:\ E_n \to E_n$ называется сопряженным линейному оператору $f:\ E_n \to E_n$, если

$$f(\overline{x})\cdot \overline{y} = \overline{x}\cdot f^*(\overline{y}) \quad \forall \overline{x},\ \overline{y} \in E_n.$$

Оператор f^* также является линейным оператором. Если *f* в некотором ортогональном базисе имеет матрицу *A*, то в этом базисе оператор f^* имеет матрицу f^* .

Свойства сопряженных операторов: $(f^*)^* = f, (fg)^* = g^* f^*,$ $(f+g)^* = f^* + g^*, (\alpha f)^* = \alpha f^* \quad \forall \alpha \in R, (f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$ (*f* - невырожденный).

Самосопряженные операторы

Линейный оператор $f : E_n \to E_n$ называется самосопряженным (симметрическим), если

$$f(\overline{x})\cdot \overline{y} = \overline{x}\cdot f(\overline{y}) \quad \forall \overline{x},\ \overline{y} \in E_n.$$

Для самосопряженного оператора $f^* = f.$

Оператор $f : E_n \to E_n$ является самосопряженным тогда и только тогда, когда его матрица в некотором ортонормированном базисе симметрическая.

Свойства самосопряженных операторов: 1) самосопряженный оператор имеет только действительные собственные числа; 2) всякий самосопряженный оператор является оператором простой структуры; 3) для всякого самосопряженного оператора существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого оператора.

Ортогональные операторы

Линейный оператор $f : E_n \to E_n$ называется ортогональным, если

$$\overline{x}\cdot \overline{y} = f(\overline{x})\cdot f(\overline{y}) \quad \forall \overline{x},\ \overline{y} \in E_n.$$

Для того чтобы оператор $f : E_n \to E_n$ был ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в ортонормированном базисе была ортогональной.

Ортогональные операторы и только они сохраняют длину вектора, т. е.

$$\left|f\left(\bar{x}\right)\right| = \left|\bar{x}\right| \quad \forall \bar{x} \in E_n.$$

ТЕМА 9. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $0xyz$. Поверхность называется ***поверхностью второго порядка***, если она задается уравнением второй степени относительно текущих координат x, y, z.

Сферой называется множество точек в пространстве, удаленных от данной точки (называемой центром) на одно и то же расстояние (называемое радиусом).

Выведем уравнение сферы. Пусть $S(a, b, c)$ – центр сферы, R – радиус сферы, $M(x, y, z)$ – произвольная точка сферы. По определению сферы $|SM| = R$. Так как $|SM| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, то получаем: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$. Возведя обе части этого уравнения в квадрат, имеем:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

– уравнение сферы с центром в точке $S(a, b, c)$ и радиусом R. Если центр совпадает с началом координат $0(0, 0, 0)$, то получаем

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

– каноническое уравнение сферы.
^
Цилиндрические поверхности*

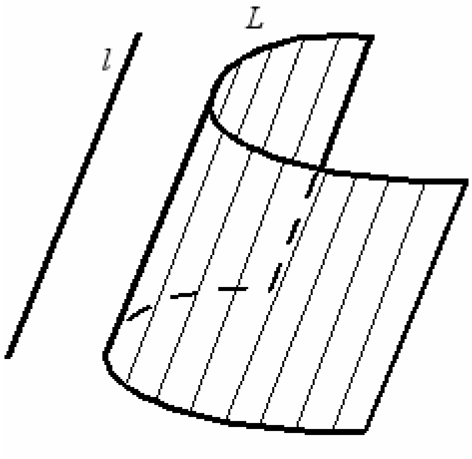

Рис. 3.28

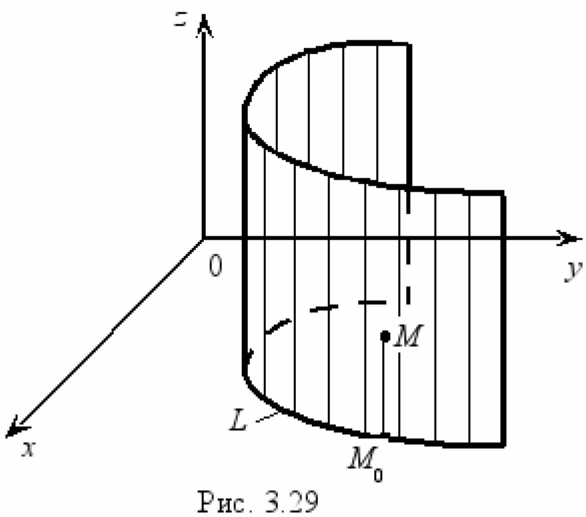

Рис. 3.29

Ц

илиндрической поверхностью называется множество всех прямых, пересекающих данную линию L и параллельных данной прямой l. Линия L называется ***направляющей*** для цилиндрической поверхности, а прямые, составляющие ее (параллельные прямой l), называются ее ***образующими*** (рис. 3.28).

Зададим в пространстве систему координат $0xyz$, направляющую линию L будем располагать в одной из координатных плоскостей (например, в плоскости $0xy$), а образующие направим параллельно оси координат, которая перпендикулярна этой плоскости (ось $0z$).

Пусть в плоскости $0xy$ задана линия L с уравнением $F(x, y) = 0$ (рис. 3.29). Построим цилиндрическую поверхность с направляющей L и образующими, параллельными $0z$. Покажем, что эта цилиндрическая поверхность задается тем же уравнением $F(x, y) = 0$, что и направляющая линия L, если точки рассматривать в пространстве.

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка цилиндрической поверхности, а M_0 – ее проекция на плоскость $0xy$, она является точкой пересечения L и образующей, проходящей через M, поэтому точки M и M_0 имеют одну и ту же абсциссу x, одну и ту же ординату y. Поскольку M_0 лежит на линии L, то ее координаты x, y удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, поэтому и координаты точки $M(x, y, z)$ также удовлетворяют этому уравнению (ведь z в нем не встречается). Координаты всякой точки, не лежащей на данной цилиндрической поверхности, не будут удовлетворять уравнению $F(x, y) = 0$, так как эти точки не будут проецироваться на линию L.

Итак, данная цилиндрическая поверхность в пространстве задается уравнением: $F(x, y) = 0$ (как и ее направляющая L в плоскости $0xy$).

В
пространстве $0xyz$ линия L будет задаваться системой уравнений:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0; \\ z = 0. \end{cases}$$

Нас интересуют цилиндрические поверхности второго порядка, следовательно, их направляющими будут: окружность, эллипс, гипербола, парабола. Сами поверхности будут называться соответственно: круговым цилиндром, эллиптическим цилиндром, гиперболическим цилиндром и параболическим цилиндром.

Примеры цилиндрических поверхностей:

1) Направляющая ^ L в плоскости $0xy$ имеет уравнение $x^2 + y^2 = 1$, т.е. является окружностью, образующие параллельны 0z. Имеем круговой цилиндр (рис. 3.30).

2) Направляющая линия L – эллипс в плоскости $0xz$ с уравнением $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$, образующие параллельны оси $0y$. Имеем эллиптический цилиндр (рис. 3.31).

3) Гиперболический цилиндр, заданный уравнением $\frac{z^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, имеет направляющей линией гиперболу в плоскости 0*yz* с действительной полуосью $a = 3$ и мнимой полуосью $b = 2$. Образующие параллельны оси 0*x* (рис. 3.32).

4) Для параболического цилиндра (рис. 3.33) направляющей линией является парабола: $y^2 = z$, лежащая в плоскости 0*yz*, его образующие параллельны оси 0*x*.
^

КОНИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ*

Конической поверхностью называется множество прямых, проходящих через данную точку *P* и пересекающих данную линию *L*. Точка *P* называется вершиной, линия *L* – направляющей, а прямые – образующими конической поверхности (рис. 3.34).

P

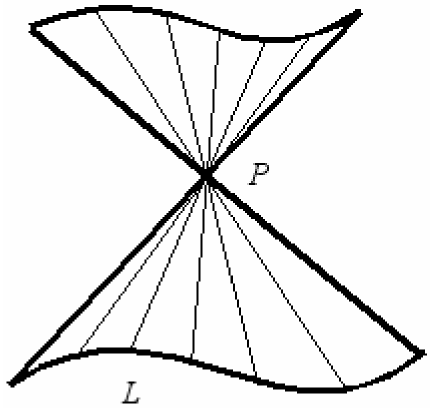

Рис. 3.34

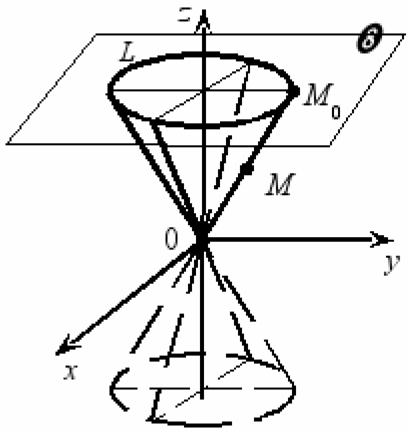

Рис. 3.35

ассмотрим коническую поверхность второго порядка, у которой вершиной будет служить начало координат 0(0, 0, 0), а в качестве направляющей *L* будет эллипс, расположенный в плоскости ϑ, параллельной плоскости 0*xy* и отстоящей от нее на расстоянии *c* (рис. 3.35). Такой эллипс задается системой:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1; \\ z = c. \end{cases} \qquad (3.23)$$

Выведем уравнение этой конической поверхности. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка поверхности, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка пересечения эллипса с образующей *OM*. Координаты точки M_0 удовлетворяют системе (3.23), поэтому

$$z_0 = c, \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \qquad (3.24)$$

Запишем уравнения прямой OM_0: $\frac{x-0}{x_0-0}=\frac{y-0}{y_0-0}=\frac{z-0}{z_0-0}$ или $\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{c}.$ Выразим из этих уравнений x_0 и y_0: $\frac{x}{x_0}=\frac{z}{c}$, отсюда $x_0=\frac{xc}{z}$; $\frac{y}{y_0}=\frac{z}{c}$, получаем $y_0=\frac{yc}{z}$. Подставим найденные значения x_0, y_0 в равенство (3.24):

$$\frac{x^2c^2}{a^2z^2}+\frac{y^2c^2}{b^2z^2}=1.$$

Умножим последнее равенство на $\frac{z^2}{c^2}$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}. \quad (3.25)$$

Уравнение (3.25) является уравнением конуса второго порядка.

В частности, если $a=b$, то имеем круговой конус, который задается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2}.$$

ЭЛЛИПСОИДЫ*

Эллипсоидом называется поверхность, задаваемая в некоторой декартовой системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \quad (3.26)$$

Числа a, b, c называются полуосями эллипсоида.

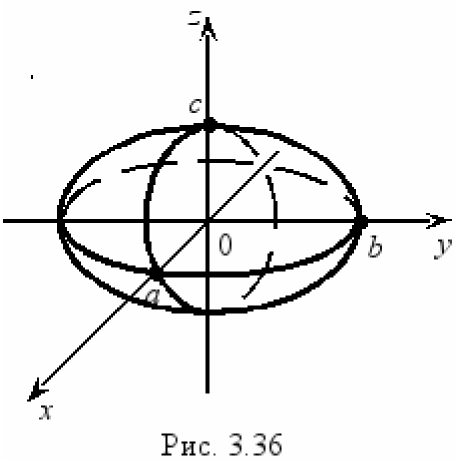

Рис. 3.36

Выясним форму эллипсоида. Поскольку текущие переменные x, y, z входят в уравнение (3.26) в четных степенях, эллипсоид симметричен относительно каждой координатной плоскости. Рассмотрим сечение эллипсоида координатными плоскостями. Плоскость $0xy$ имеет уравнение $z=0$, поэтому сечение эллипсоида плоскостью $0xy$ задается системой уравнений:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;\\ z=0,\end{cases}$$

откуда имеем

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1; \\ z=0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Система (3.27) показывает, что плоскость $0xy$ пересекает эллипсоид по эллипсу с полуосями a, b. Аналогично для плоскостей $0yz$, $0xz$ соответственно получаем в сечении эллипсы:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ и } \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Можно показать, что любая плоскость, параллельная координатной плоскости, пересекает эллипсоид по некоторому эллипсу. Общий вид эллипсоида представлен на рис. 3.36.

ГИПЕРБОЛОИДЫ*

Однополостным гиперболоидом называется поверхность, задаваемая в некоторой декартовой системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \quad (3.28)$$

Эта поверхность имеет три плоскости симметрии (координатные плоскости). Выясним, какую форму имеет однополостный гиперболоид, для этого рассмотрим сечения его координатными плоскостями. В плоскости $0yz$ получаем:

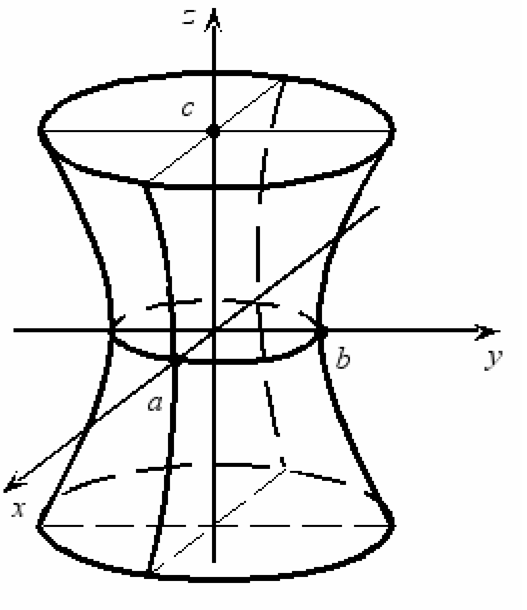

Рис. 3.37

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1; \\ x=0 \end{cases}$$

(3.29)

– гиперболу с действительной полуосью b и мнимой полуосью c (в плоскости $0yz$) (рис. 3.37).