ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 10 (473)

УДК 517.518

М.М. ДРАГИЛЕВ

О ПРОСТРАНСТВАХ КЁТЕ С ПРЕДЭКВИВАЛЕНТНЫМИ БЕЗУСЛОВНЫМИ БАЗИСАМИ

Два базиса в топологическом векторном пространстве называют *предэквивалентными*, если они приводятся к совпадению линейным автоморфизмом пространства и нормировкой элементов. Известно, что банахово пространство, имеющее безусловный базис, лишь в исключительных случаях обладает тем свойством, что все его безусловные базисы предэквивалентны [1]. В статье доказывается аналогичное утверждение для метризуемых пространств Кёте и сопряженных к ним.

1. Пусть ℓ — банахово пространство последовательностей чисел $(t_n)_1^\infty \in \mathbb{C}$ с безусловным базисом ортов $(e_n)_1^\infty$, $e_n = (\delta_{kn})_{k=1}^\infty$, с нормой $\|\cdot\|$, монотонной относительно базиса, удовлетворяющей условию $\|e_n\| = 1$ (сокращенно $\ell \in \Lambda$). Матрицу чисел

$$(a_{pn})_{\mathcal{P},N} = \{a_{pn} \geq 0 : p \in \mathcal{P},\ n \in \mathbb{N}\}$$

называют *матрицей Кёте*, если выполняются следующие условия:

$$\forall n \mid \sup_p a_{pn} > 0;\ \ \forall p_1, p_2\ \exists p, C > 0 \mid \max(a_{p_1 n}, a_{p_2 n}) \leq C a_{pn} \ \ (n = 1, 2, \dots).$$

Две матрицы называют *эквивалентными* ($(a_{pn})_{\mathcal{P},N} \sim (b_{qn})_{\mathcal{Q},N}$), если

$$\text{а)}\ \forall p\ \exists q, C \mid a_{pn} \leq C b_{qn};\quad \text{б)}\ \forall q\ \exists p, C \mid b_{qn} \leq C a_{pn}\ \ (n = 1, 2, \dots).$$

Пространством Кёте (*типа* (ℓ)) называют векторное пространство

$$\ell((a_{pn})_{\mathcal{P},N}) = \{(t_n)_1^\infty : (t_n a_{pn})_{n=1}^\infty \in \ell,\ \forall p \in \mathcal{P}\}$$

с локально выпуклой топологией, задаваемой системой преднорм

$$|(t_n)_1^\infty|_p = \|(t_n a_{pn})_{n=1}^\infty\| \quad (p \in \mathcal{P}),$$

где $\ell \in \Lambda$, $\|\cdot\|$ означает норму в ℓ, а $(a_{pn})_{\mathcal{P},N}$ — матрицу Кёте.

Эквивалентные матрицы, очевидно, порождают одно и то же пространство.

В частности, $\ell \in \Lambda$ есть пространство Кёте: $\ell = \ell((a_{pn})_{\mathcal{P},N})$, где $a_{pn} \equiv 1$. Вообще всякое бесконечномерное банахово пространство X, имеющее безусловный базис $(x_n)_1^\infty$, изоморфно некоторому пространству Кёте — именно, векторному пространству

$$\ell = \left\{(t_n)_1^\infty : \sum_1^\infty t_n \frac{x_n}{\|x_n\|} \overset{\text{def}}{=} x \in X\right\}$$

с нормой элемента $\|(t_n)_1^\infty\| = \|x\|$. Пространство Кёте метризуемо тогда и только тогда, когда его можно задать с помощью счетной матрицы. Приведем несколько примеров.

Для произвольного множества A числовых последовательностей обозначим: $|A| = \{(|t_n|)_1^\infty : (t_n)_1^\infty \in A\}$. Если $\sup\limits_A |t_n| > 0$ при всех n и выполнено условие

$$\forall\, (t'_n)_1^\infty, (t''_n)_1^\infty \in A\ \exists\, (t_n)_1^\infty \in A, C \mid \max(|t'_n|, |t''_n|) \leq C|t_n|,$$

то будем рассматривать $|A|$ как матрицу Кёте.

1) Если ω и φ — множества (векторные пространства) всех числовых последовательностей и соответственно всех финитных числовых последовательностей, то можно считать

$$\omega = \ell_1(|\varphi|), \quad \varphi = \ell_1(|\omega|).$$

Пространства Кёте ω и φ (а также матрицы $|\omega|$ и $|\varphi|$) называют *вырожденными*. Пространство ω метризуемо.

2) Пусть X — отделимое локально выпуклое пространство (л. в. п.) с определяющей системой преднорм $(|\cdot|_p)_{\mathcal{P}}$. Последовательность $(x_n)_1^\infty$ элементов X, отличных от нуля, порождает пространство Кёте (не зависящее от выбора определяющей системы преднорм в X)

$$\ell((x_n)_1^\infty) = \ell((|x_n|_p)_{\mathcal{P},N}) \quad (\ell \in \Lambda).$$

3) Линейный непрерывный функционал x' в пространстве Кёте X реализуется в виде числовой последовательности $(u_n)_1^\infty$, обладающей свойством: ряд вида

$$\langle x, x' \rangle = \sum_1^\infty t_n u_n \quad (x = (t_n)_1^\infty \in X)$$

сходится при любом x. Как известно [2], система преднорм

$$|x'|_x = |\langle x, x' \rangle| = \Big| \sum_1^\infty t_n u_n \Big| \quad (x \in X)$$

задает *слабую* топологию $\sigma(X', X)$ в сопряженном к X пространстве X'. Положим для произвольного элемента $x' = (u_n)_1^\infty \in X'$

$$|x'|_x^* = \sum_1^\infty |t_n|\,|u_n| \quad (x = (t_n)_1^\infty \in X).$$

Соответствующая топология $\sigma^*(X', X)$ (согласующаяся с той же двойственностью) мажорирует слабую топологию $\sigma(X', X)$.

Замечание 1. Если $\ell \in \Lambda$, то топология $\sigma^*(\ell', \ell)$ в ℓ' не сильнее нормированной.

Пространство X' с топологией $\sigma^*(X', X)$ является пространством Кёте типа (ℓ_1):

$$(X', \sigma^*(X', X)) = \ell_1(|X|).$$

4) Бочечное л. в. п. X с абсолютным шаудеровским базисом $(x_n)_1^\infty$ изоморфно пространству Кёте $\ell_1((x_n)_1^\infty)$ [3].

Непосредственно проверяется

Предложение. *Пространство Кёте есть отделимое счетно-полное л. в. п. с безусловным шаудеровским базисом* $(e_n)_1^\infty$.

В частности, метризуемое пространство Кёте является F-пространством. Заметим, что не всякое F-пространство с безусловным базисом изоморфно некоторому пространству Кёте.

2. Матрицу Кёте $(a_{pn})_{\mathcal{P},N}$ называют

а) *нормированной*, если

$$\exists\, p \mid \inf_n a_{pn} > 0 \quad \text{и} \quad \forall\, p \mid \sup_n a_{pn} < \infty;$$

б) *почти нормированной*, если матрица $(\lambda_n a_{pn})_{\mathcal{P},N}$ нормирована при некоторых $\lambda_n > 0$;

в) *симметричной*, если $(a_{pn})_{\mathcal{P},N} \sim (a_{p\sigma(n)})_{\mathcal{P},N}$ для любой перестановки индексов $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

г) *почти симметричной*, если

$$\forall\, \sigma\ \exists\, (\lambda_n)_1^\infty \mid (a_{pn})_{\mathcal{P},N} \sim (\lambda_n a_{p\sigma(n)})_{\mathcal{P},N}.$$

Замечание 2. Свойства а), б), в), г) распространяются на эквивалентные матрицы, а свойства б) и г) — также на предэквивалентные матрицы (две матрицы $(a_{pn})_{\mathcal{P},N}$ и $(b_{qn})_{\mathcal{Q},N}$ называют *предэквивалентными*, если $(a_{pn})_{\mathcal{P},N} \sim (\lambda_n b_{qn})_{\mathcal{Q},N}$ при некоторых λ_n).

Для произвольной матрицы Кёте $(a_{pn})_{\mathcal{P},N}$ обозначим

$$\delta((a_{pn})_{\mathcal{P},N}) = \{(t_n)_1^\infty : \exists\, p_0\ \forall\, p\ \exists\, C\ \forall\, n \,|\, |t_n| a_{pn} \le C a_{p_0 n}\};$$
$$\delta'((a_{pn})_{\mathcal{P},N}) = \{(t_n)_1^\infty : \forall\, p\ \exists\, p_0,\, C\ \forall\, n \,|\, |t_n| a_{pn} \le C a_{p_0 n}\}.$$

Например, $\delta(|\omega|) = \delta(|\varphi|) = \varphi$, $\delta'(|\omega|) = \delta'(|\varphi|) = \omega$. Множества $\delta(\cdot)$ и $\delta'(\cdot)$, очевидно, сохраняются при переходе к эквивалентным и предэквивалентным матрицам.

Лемма 1 ([4]). $\delta((a_{pn})_{\mathcal{P},N}) \subset \ell_\infty \subset \delta'((a_{pn})_{\mathcal{P},N})$.

Доказательство. Если $(t_n)_1^\infty \in \delta((a_{pn})_{\mathcal{P},N})$, то

$$\exists\, p_0\ \forall\, p,\ \exists\, C\ \forall\, n \,|\, |t_n| a_{pn} \le C a_{p_0 n}.$$

Если $a_{p_0 n} \ne 0$, то, полагая $p = p_0$, получим $|t_n| \le C$. В противном случае найдется p, при котором $a_{pn} \ne 0$. Тогда будет $t_n = 0$, следовательно, $(t_n)_1^\infty \in \ell_\infty$, чем доказано первое включение. Второе включение вытекает из свойства матрицы Кёте

$$\forall\, p\, \exists\, p_0, C\ \forall\, n \mid a_{pn} \le C a_{p_0 n}.$$

Лемма 2 ([4]). *Матрица $(a_{pn})_{\mathcal{P},N}$ тогда и только тогда почти нормирована, когда $\delta((a_{pn})_{\mathcal{P},N}) = \ell_\infty$. При этом пространство Кёте $\ell((a_{pn})_{\mathcal{P},N})$ изоморфно банаховому пространству ℓ.*

Доказательство. Если при некоторых λ_n матрица $(\lambda_n a_{pn})_{\mathcal{P},N}$ нормирована, то выполняются условия

$$\forall\, p\ \exists\, C\ \forall\, n \mid \lambda_n a_{pn} \le C, \quad \exists\, p_0, C_0 \mid \inf_n \lambda_n a_{p_0 n} = C_0 > 0.$$

Для произвольной последовательности $(t_n)_1^\infty \in \ell_\infty$ имеем $t_n \lambda_n a_{pn} \le \frac{C}{C_0} \lambda_n a_{p_0 n}$ или, что то же самое, $t_n a_{pn} \le \frac{C}{C_0} a_{p_0 n}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Это означает $(t_n)_1^\infty \in \delta((a_{pn})_{\mathcal{P},N})$, и в силу леммы 1 $\delta((a_{pn})_{\mathcal{P},N}) = \ell_\infty$. Обратно, если это равенство выполняется, то, в частности, $(1, 1, \dots) \in \delta((a_{pn})_{\mathcal{P},N})$. Следовательно, $\exists\, p_0\ \forall\, p,\ \exists\, C\ \forall\, n \mid a_{pn} \le C a_{p_0 n}$. Отсюда можно заключить, что $a_{p_0 n} \ne 0$ $(n = 1, 2, \dots)$. Положив $\lambda_n = a_{p_0 n}^{-1}$, получаем $\lambda_n a_{p_0 n} = 1$, $\lambda_n a_{pn} \le C$ $(n = 1, 2, \dots)$, т. е. матрица $(\lambda_n a_{pn})_{\mathcal{P},N}$ нормирована. Так как она эквивалентна матрице, состоящей из одних единиц, то $\ell((\lambda_n a_{pn})_{\mathcal{P},N}) = \ell$ и, тем более, пространства $\ell((a_{pn})_{\mathcal{P},N})$ и ℓ изоморфны.

Лемма 3. *Если матрица $(a_{pn})_{\mathcal{P},N}$ невырождена и почти симметрична, то $\delta'((a_{pn})_{\mathcal{P},N}) = \ell_\infty$. При этом либо $\delta((a_{pn})_{\mathcal{P},N}) \subset c_0$, либо $\delta((a_{pn})_{\mathcal{P},N}) = \ell_\infty$. Последнее выполняется тогда и только тогда, когда пространство Кёте $\ell((a_{pn})_{\mathcal{P},N})$ метризуемо.*

Доказательство. Если $\delta'((a_{pn})_{\mathcal{P},N}) \ne \ell_\infty$, то по лемме 1 найдется последовательность $(t'_{n_k})_1^\infty \in \delta'((a_{pn_k})_{\mathcal{P},N})$ такая, что $t'_{n_k} \to \infty$ (при этом, не уменьшая общности, можно считать, что индексы n_k возрастают, а дополнительная до $\mathbb{N}$ последовательность $(\overline{n}_k)_1^\infty$ бесконечна). Возможны два случая.

а) Существует последовательность $(t_{n_k})_1^\infty \notin \delta'((a_{pn_k})_{\mathcal{P},N})$. Так как $t'_{n_k} \to \infty$, то можно выделить такую подпоследовательность $(t'_{n_{k_j}})_1^\infty$, что

$$|t'_{n_{k_j}}| \ge |t_{n_j}| \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Пусть σ — перестановка индексов такая, что $\sigma(n_j) = n_{k_j}$ $(j = 1, 2, \dots)$. С одной стороны, имеем

$$(t'_{n_{k_j}})_1^\infty \in \delta'((a_{pn_{k_j}})_{\mathcal{P},N}) = \delta'((a_{p\sigma(n_j)})_{\mathcal{P},N}).$$

С другой стороны,

$$(t'_{n_{k_j}})_1^\infty \notin \delta'((a_{pn_j})_{\mathcal{P},N}),$$

и, таким образом, $\delta'((a_{pn})_{\mathcal{P},N}) \neq \delta'((a_{p\sigma(n)})_{\mathcal{P},N})$. Так как это противоречит предположению о том, что матрица $(a_{pn})_{\mathcal{P},N}$ почти симметрична, то случай а) не имеет места.

б) $(t_{n_k})_1^\infty \in \delta'((a_{pn_k})_{\mathcal{P},N})$, какова бы ни была последовательность $(t_{n_k})_1^\infty$, или, что то же самое, $\delta'((a_{pn_k})_{\mathcal{P},N}) = \omega$. Положив $\sigma(n_k) = \overline{n}_k$, $\sigma(\overline{n}_k) = n_k$ $(k = 1, 2, \dots)$, получим

$$\delta'((a_{p\overline{n}_k})_{\mathcal{P},N}) = \delta'((a_{p\sigma(n_k)})_{\mathcal{P},N}) = \delta'((a_{pn_k})_{\mathcal{P},N}) = \omega.$$

Отсюда следует, что $\delta'((a_{pn})_{\mathcal{P},N}) = \omega$. Но это для почти симметричной матрицы возможно лишь при одном из двух условий: $(a_{pn})_{\mathcal{P},N} \sim \omega$ или $(a_{pn})_{\mathcal{P},N} \sim |\varphi|$, т. е. матрица является вырожденной. Тем самым доказано, что $\delta'((a_{pn})_{\mathcal{P},N}) = \ell_\infty$.

Если $\delta((a_{pn})_{\mathcal{P},N}) \not\subset c_0$, то найдется последовательность $(t_n)_1^\infty \in \delta((a_{pn})_{\mathcal{P},N})$, не принадлежащая c_0, т. е. такая, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |t_n| > 0.$$

Тогда $|t_{n_k}| > \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и бесконечной последовательности $(n_k)_1^\infty$ (с бесконечной же дополнительной последовательностью $(\overline{n}_k)_1^\infty$). Пусть σ — перестановка, меняющая местами n_k и $\overline{n}_k$, и пусть $t_n^0 = \varepsilon$ $(n = 1, 2, \dots)$. Тогда $(t^0_{n_k})_1^\infty \in \delta((a_{pn_k})_{\mathcal{P},N})$, $(t^0_{\overline{n}_k})_1^\infty = (t^0_{\sigma(n_k)})_1^\infty \in \delta((a_{p\sigma(n_k)})_{\mathcal{P},N}) = \delta((a_{p\overline{n}_k})_{\mathcal{P},N})$ и, следовательно, $(t_n)_1^\infty \in \delta((a_{pn})_{\mathcal{P},N})$. Отсюда вытекает, что $\ell_\infty \subset \delta((a_{pn})_{\mathcal{P},N})$ и в силу леммы 1 $\delta((a_{pn})_{\mathcal{P},N}) = \ell_\infty$.

Если пространство Кёте $\ell((a_{pn})_{\mathcal{P},N})$ метризуемо, то можно считать, что числа α_{pn} $(p, n = 1, 2, \dots)$ не убывают по p. Так как матрица $(a_{pn})_{p,n=1}^\infty$ невырождена, то для некоторого p найдется последовательность $(n_k)_1^\infty$ с бесконечным дополнением $(\overline{n}_k)_1^\infty$ и такая, что $a_{pn_k>0}$. Пусть, как и выше, σ — перестановка, меняющая местами n_k и $\overline{n}_k$, и пусть λ_n таковы, что матрицы $(a_{pn})_{p,n=1}^\infty$ и $(\lambda_n a_{pn})_{p,n=1}^\infty$ эквивалентны. Найдутся $p_1 \geqslant p$ и C такие, что $a_{pn} \leqslant C a_{p_1\sigma(n)}$, и, следовательно, $a_{p_1\overline{n}_k} \geqslant C^{-1} a_{pn_k} > 0$. Так как и $a_{p_1 n_k} \geqslant a_{pn_k} > 0$, то $a_{p_1 n} \neq 0$ при всех n. Предположим, что для любого $p_2 > p_1$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{p_2 n}}{a_{p_1 n}} < \infty.$$

Тогда $\delta((a_{pn})_{p,n=1}^\infty) = \ell_\infty$. В противном случае найдутся p_2 и подпоследовательность $(n_k)_1^\infty$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{p_2 n_k}}{a_{p_1 n_k}} = \infty.$$

Имеются две возможности.

а) Для любого $p_3 > p_2$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{a_{p_3 n_k}}{a_{p_2 n_k}} < \infty.$$

Тогда $\delta((a_{pn_k})_{p,k=1}^\infty) = \ell_\infty$, а поскольку матрица $(a_{pn})_{p,n=1}^\infty$ почти симметрична, также и $\delta((a_{p\overline{n}_k})_{p,k=1}^\infty) = \ell_\infty$, где $(\overline{n}_k)_1^\infty$ — последовательность, дополнительная к $(n_k)_1^\infty$. Следовательно, $\delta((a_{pn})_{p,n=1}^\infty) = \ell_\infty$.

б) Найдутся p_3 и последовательность $(n_{k_j})_1^\infty$ такие, что

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_{p_3 n_{k_j}}}{a_{p_2 n_{k_j}}} = \infty.$$

Продолжая этот процесс, либо убедимся после конечного числа шагов в том, что $\delta((a_{pn})_{p,n=1}^\infty) = \ell_\infty$, либо выделим последовательность индексов $\nu \subset \mathbb{N}$ и последовательность $(p_k)_1^\infty$, обладающие свойством

$$\lim_{n\in\nu} \frac{a_{p_{k+1},n}}{a_{p_k,n}} = \infty \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Обозначим

$$t_n = \min\left(\frac{a_{p_2 n}}{a_{p_1 n}}, \frac{a_{p_3 n}}{a_{p_2 n}}, \ldots, \frac{a_{p_{k+1} n}}{a_{p_k n}}\right) \ \ (n \in \nu,\ n_{k-1} \leqslant n < n_k,\ n_0 = 1,\ k = 1, 2, \ldots),$$

где $n_k \in \nu$ выбираются так, что $t_n > k$ при $n_{k-1} \leqslant n < n_k$. Если теперь p произвольно и $p_k > p$, то

$$|t_n| \leqslant \frac{a_{p_{k+1} n}}{a_{p_k n}} \leqslant \frac{a_{p_{k+1} n}}{a_{pn}},$$

и, следовательно, $(t_n)_1^\infty \in \delta'((a_{pn})_{p,n=1}^\infty)$. Но это противоречит доказанному.

Таким образом, для метризуемого пространства Кёте $\ell((a_{pn})_{p,n=1}^\infty)$ имеем $\delta((a_{pn})_{p,n=1}^\infty) = \ell_\infty$. Обратно, из этого условия в силу леммы 2 следует, что пространство банахово и, тем более, метризуемо.

3. Как известно [5], в вырожденных пространствах Кёте ω и φ (и только в них) все безусловные базисы эквивалентны. Будем рассматривать невырожденные метризуемые пространства и сопряженные к ним. В основе дальнейшего лежит

Лемма 4 ([1] (см. также [6]–[10])). *Банахово бесконечномерное пространство с предэквивалетными безусловными базисами изоморфно одному из пространств ℓ_1, ℓ_2, c_0.*

Теорема 1. *В метризуемом пространстве Кёте тогда и только тогда все безусловные базисы предэквивалентны, когда оно изоморфно одному из пространств ω, ℓ_1, ℓ_2, c_0.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть невырожденные пространства. Из того, что в пространстве $\ell((a_{pn})_{p,n=1}^\infty)$ базис ортов предэквивалентен любой своей перестановке, следует, что матрица $(a_{pn})_{p,n=1}^\infty$ почти симметрична. По лемме 3 заключаем, что $\delta((a_{pn})_{p,n=1}^\infty) = \ell_\infty$. Тогда $\ell((a_{pn})_{p,n=1}^\infty)$ в силу леммы 2 изоморфно пространству ℓ, а по лемме 4 — одному из пространств ℓ_1, ℓ_2, c_0. Обратное утверждение содержится в [5] и лемме 4.

Лемма 5. *Если $\ell \in \Lambda$ и $\ell' \in \Lambda$, то безусловный базис в ℓ (соответственно в ℓ') является также безусловным базисом в слабой топологии $\sigma(\ell, \ell')$ (соответственно $\sigma(\ell', \ell)$) и наоборот.*

Действительно, разложение по базису произвольного элемента пространства безусловно сходится в слабой топологии, а единственность разложения следует из того, что коэффициентные функционалы базиса слабо непрерывны (напр., [2], с. 55), т. е. базис является также слабым базисом. Обратное утверждение доказывается в ([11], с. 622).

Следствие 1. Если топология τ в одном из векторных пространств ℓ, ℓ' слабее исходной, но мажорирует соответствующую слабую топологию $\sigma(\ell, \ell')$ или $\sigma(\ell', \ell)$ и если два базиса этого пространства эквивалентны в топологии τ, то они также эквивалентны в исходной и слабой топологиях.

Доказательство следует из того факта, что базисные ряды с одинаковыми соответствующими коэффициентами одновременно сходятся или расходятся во всех трех топологиях.

Теорема 2. *Пусть $X' = (X', \sigma^*(X', X))$ — пространство Кёте, сопряженное к невырожденному метризуемому пространству Кёте $X = \ell((a_{pn})_{p,n=1}^\infty)$, где $\ell' \in \Lambda$ и $\ell' \neq c_0$. В пространстве X' все безусловные шаудеровские базисы предэквивалентны тогда и только тогда, когда оно изоморфно одному из пространств $(\ell_1, \sigma^*(\ell_1, c_0))$ или $(\ell_2, \sigma^*(\ell_2, \ell_2))$.*

Доказательство. Если в пространстве $X' = \ell_1(|X|)$ все безусловные шаудеровские базисы предэквивалентны, то матрица $|X|$, а значит, и матрица $(a_{pn})_{p,n=1}^\infty$ почти симметричны. Применяя леммы 2 и 3, найдем, что пространство X изоморфно ℓ. В силу леммы 5 и следствия 1 все безусловные базисы в пространстве $X' = \ell'$ предэквивалентны. По лемме 4 X' изоморфно одному из пространств ℓ_1, ℓ_2, c_0. Последнее исключается, т. к. в противном случае получили бы $\ell' = c_0$.

Таким образом, X' изоморфно либо пространству $(\ell_1, \sigma^*(\ell_1, c_0)) = \ell_1(|c_0|)$, либо пространству $(\ell_2, \sigma^*(\ell_2, \ell_2)) = \ell_1(|\ell_2|)$.

С другой стороны, все безусловные шаудеровские базисы в каждом из этих пространств предэквивалентны. Это следует из леммы 4 с учетом того, что базисы пространств ℓ_1 и ℓ_2 являются базисами также в соответствующих топологиях σ^* и обратно, и аналогичным свойством обладает отношение предэквивалентности базисов.

Замечание 3. В пространстве $(c_0, \sigma^*(c_0, \ell_1)) = \ell_1(|\ell_1|)$, не являющемся сопряженным к метризуемому пространству Кёте [12], как и в пространствах $(\ell_1, \sigma^*(\ell_1, c_0))$ и $(\ell_2, \sigma^*(\ell_2, \ell_2))$, все безусловные шаудеровские базисы предэквивалентны. Доказательство аналогично предыдущему. То же относится и к каждому из пространств $(\ell_1, \sigma(\ell_1, c_0))$, $(\ell_2, \sigma(\ell_2, \ell_2))$, $(c_0, \sigma(c_0, \ell_1))$, сопряженых соответственно к ℓ_1, ℓ_2 и c_0, не являющихся пространствами Кёте.

Замечание 4. Условие теоремы 2, согласно которому $\ell' \in \Lambda$, существенно.

Пример. В пространстве Кёте $(\ell_\infty, \sigma^*(\ell_\infty, \ell_1))$ все безусловные шаудеровские базисы предэквивалентны.

Действительно, шаудеровский безусловный базис в пространстве ℓ_∞ с топологией $\sigma^*(\ell_\infty, \ell_1)$ остается таковым и в топологии $\sigma(\ell_\infty, \ell_1)$. Обратное также верно, ибо, как нетрудно проверить, сходимость последовательности элементов пространства ℓ_∞ в топологии $\sigma(\ell_\infty, \ell_1)$ совпадает со сходимостью в топологии $\sigma^*(\ell_\infty, \ell_1)$. Коэффициентные функционалы слабого базиса в ℓ_∞ образуют слабый базис в ℓ_1, а следовательно, и базис в исходной банаховой топологии, причем данное рассуждение обратимо. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между шаудеровскими безусловными базисами в $(\ell_\infty, \sigma^*(\ell_\infty, \ell_1))$ и безусловными базисами в ℓ_1, которое распространяется также на эквивалентные (предэквивалентные) базисы. Остается применить лемму 4.

Следствие 2. В пространстве Кёте X', сопряженном к метризуемому пространству Кёте X, все безусловные шаудеровские базисы предэквивалентны тогда и только тогда, когда X' изоморфно одному из пространств φ, $(\ell_1, \sigma^*(\ell_1, c_0))$, $(\ell_2, \sigma^*(\ell_2, \ell_2))$, $(\ell_\infty, \sigma^*(\ell_\infty, \ell_1))$.

Целесообразно рассматривать две разновидности пространств Кёте $\ell((a_{pn})_{\mathcal{P},N})$ с почти симметричной матрицей, для которых соответственно $\delta((a_{pn})_{\mathcal{P},N}) = \ell_\infty$ и $\delta((a_{pn})_{\mathcal{P},N}) \neq \ell_\infty$ или, что то же самое, $\delta((a_{pn})_{\mathcal{P},N}) \subseteq c_0$. Пространства первого рода с предэквивалентными безусловными базисами исчерпываются банаховыми пространствами ℓ_1, ℓ_2, c_0. Пространствами второго рода являются, в частности, ω и φ. Неизвестно, существуют ли пространства Кёте второго рода с предэквивалентными безусловными базисами, алгебраически не изоморфные ни одному из векторных пространств ω, φ, ℓ_1, ℓ_2, c_0, ℓ_∞.

Литература

1. Lindenstrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach spaces.* I. *Sequence spaces* // Ergeb. Math. – 1977. – V. 92. – 190 p.
2. Робертсон А.П, Робертсон В.Дж. *Топологические векторные пространства.* – М.: Мир, 1967. – 257 с.
3. Митягин Б.С. *Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах* // УМН. – 1961. – Т. 16. – Вып. 4. – С. 63–132.
4. Драгилев М.М. *Базисы в пространстве Кёте.* – Ростов-на-Дону: Изд-во ун-та, 1983. – 144 с.
5. Драгилев М.М. *Топологические векторные пространства с эквивалентными базисами* // Матем. заметки. – 1980. – Т. 28. – Вып. 6. – С. 945–951.
6. Pelczinski A. *Projection in certain Banach spaces* // Studia Math. – 1960. – V. 19. – P. 209–228.

7. Lorch E. *Bicontinuous linear transformation in certain vector spaces* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1939. – V. 45. – P. 564–569.
8. Lindenstrauss J., Pelczinski A. *Absolutely summing operators in L_p-spaces and their applications* // Studia Math. – 1968. – V. 29. – P. 275–326.
9. Zippin M. *On perfectly homogeneus bases in Banach spaces* // Israel J. Math. – 1966. – V. 4. – P. 265–272.
10. Lindenstrauss J., Zippin M. *Banach spaces with a unique unconditional basis* // J. Funct. Anal. – 1969. – V. 3. – P. 115–125.
11. Эдвардс Р. *Функциональный анализ. Теория и приложения.* – М.: Мир, 1969. – 1071 с.
12. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. *Теоремы и задачи функционального анализа.* – М.: Наука, 1989. – 384 с.

Ростовский государственный университет

Поступила 03.07.2000