И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2001 МАТЕМАТИКА № 7 (470)

УДК 514.75

С.Ю. ВОЛКОВА

СКОМПОНОВАННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Изучается специальный класс скомпонованных трехсоставных распределений проективного пространства P_n ([1], с. 115), который назван S-распределением [2]. Приведено задание S-распределения в репере первого порядка R_1. Дана геометрическая интерпретация голономности основных структурных распределений S-распределения. Рассмотрен двойственный образ регулярного S-распределения и двойственные проективные связности, ассоциированные с S-распределением. Во всей работе индексы пробегают следующие значения: $J, K, L = \overline{1, n}$; $\overline{J}, \overline{K}, \overline{L} = \overline{0, n}$; $p, q, s, t = \overline{1, r}$; $i, j, k, l = \overline{r+1, m}$; $u, v = \overline{r+1, n-1}$; $\alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n-1}$; $a, b, c = \overline{1, m}$; $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma} = \overline{m+1, n}$; $\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{w} = \overline{r+1, n}$; $\widehat{A} = (\overline{1, r}; \overline{m+1, n})$; $\rho, \sigma, \tau = \overline{1, n-1}$.

1. Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n, отнесенное к проективному точечному реперу $\{A_{\overline{J}}\}$, уравнения инфинитезимальных перемещений которого имеют вид

$$dA_{\overline{J}} = \omega_{\overline{J}}^{\overline{K}}\ A_{\overline{K}}, \quad D\omega_{\overline{J}}^{\overline{K}} = \omega_{\overline{J}}^{\overline{L}} \Lambda \omega_{\overline{L}}^{\overline{K}}, \quad \sum_{J} \omega_{J}^{J} = 0.$$

Определение. Тройка распределений

$$\nabla \Lambda_p^{\widehat{u}} - \Lambda_q^{\widehat{u}} \Lambda_p^{\widehat{v}} \omega_{\widehat{v}}^{q} + \omega_p^{\widehat{u}} = \Lambda_{pK}^{\widehat{u}} \omega_0^K, \quad \nabla M_a^{\widehat{\alpha}} - M_b^{\widehat{\alpha}} M_a^{\widehat{\beta}} \omega_{\widehat{\beta}}^{b} + \omega_a^{\widehat{\alpha}} = M_{aK}^{\widehat{\alpha}} \omega_0^K,$$
$$\nabla H_\sigma^n - H_\tau^n H_\sigma^n \omega_n^\tau + \omega_\sigma^n = H_{\sigma K}^n \omega_0^K$$

соответственно r-мерных плоскостей Λ (Λ-распределение), m-мерных плоскостей M (M-распределение), гиперплоскостей H (H-распределение) проективного пространства P_n с соотношениями инцидентности $X \in \Lambda(X) \subset M(X) \subset H(X)$ $(2 \le r < m < n-1)$ их соответствующих элементов в каждом центре X называется трехсоставным распределением или $\mathcal{H}$-распределением проективного пространства P_n ([1], с. 24), при этом Λ-распределение называется базисным распределением, а M-распределение и H-распределение — оснащающими распределениями.

Выделим специальный класс $\mathcal{H}$-распределений, для которых M-распределение скомпонованно [3], т. е. $\Lambda(X) \cap L(X) = X$, $[\Lambda(X),\ L(X)] = M(X)$. Этот класс $\mathcal{H}$-распределений обозначается символом $\mathcal{H}(\Lambda, L)$ ([1], с. 153). Кроме того, потребуем, чтобы а) характеристика $\Phi(X)$ (Φ-плоскость) гиперплоскости $H(X)$, полученная при смещении центра X вдоль интегральных линий Λ-распределения, проходила через плоскость $L(X)$; б) характеристика $\Psi(X)$ (Ψ-плоскость) гиперплоскости $H(X)$, полученная при смещении центра X вдоль линий $\mathcal{L}$-распределения, проходила через плоскость $\Lambda(X)$, что в результате приводит к условиям

$$L_{ip}^n = 0, \quad \Lambda_{pi}^n = 0. \tag{1}$$

Условия (1) выделяют специальный класс скомпонованных $\mathcal{H}(\Lambda, L)$-распределений, который назовем S-распределениями [2].

Репер 1-го порядка выбираем так, что $X \equiv A_0$, $\{\mathcal{A}_p\} \subset \Lambda(A_0)$, $\{\mathcal{A}_i\} \subset L(A_0)$, $A_\alpha \subset \chi_{n-m-1}(A_0) \overset{\text{def}}{=} \chi(A_0)$, где $\chi(A_0)$ (χ-плоскость) — характеристика гиперплоскости $H(A_0)$ при смещении центра A_0 вдоль интегральных кривых M-распределения. Имеем

$$\omega^p_\alpha = H^p_{\alpha K}\omega^K_0, \quad \omega^i_\alpha = H^i_{\alpha K}\omega^K_0, \quad H^n_{\alpha p} = 0, \quad H^n_{\alpha j} = 0. \tag{2}$$

В силу (1), (2) S-распределение в P_n относительно репера R_1 задается следующим образом:

$$\begin{gathered}
\omega^n_p = \Lambda^n_{p\widehat{A}}\omega^{\widehat{A}}_0 = M^n_{p\widehat{A}}\omega^{\widehat{A}}_0 = H^n_{p\widehat{A}}\omega^{\widehat{A}}_0, \quad \omega^n_i = L^n_{i\widehat{u}}\omega^{\widehat{u}}_0 = M^n_{i\widehat{u}}\omega^{\widehat{u}}_0 = H^n_{i\widehat{u}}\omega^{\widehat{u}}_0, \\
\omega^\alpha_p = \Lambda^\alpha_{pK}\omega^K_0 = M^\alpha_{pK}\omega^K_0, \quad \omega^\alpha_i = L^\alpha_{iK}\omega^K_0 = M^\alpha_{iK}\omega^K_0, \\
\omega^i_p = \Lambda^i_{pK}\omega^K_0, \quad \omega^p_i = L^p_{iK}\omega^K_0, \quad \omega^n_\alpha = H^n_{\alpha\widehat{\beta}}\omega^{\widehat{\beta}}_0, \\
\omega^p_\alpha = H^p_{\alpha K}\omega^K_0, \quad \omega^i_\alpha = H^i_{\alpha K}\omega^K_0,
\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla\Lambda^n_{p\widehat{A}} + \Lambda^n_{p\widehat{A}}\omega^0_0 - \omega^0_p\delta^n_{\widehat{A}} = \Lambda^n_{p\widehat{A}L}\omega^L_0, \\
&\nabla\Lambda^\alpha_{pK} + \Lambda^\alpha_{pK}\omega^0_0 + \Lambda^n_{pK}\omega^\alpha_n - \omega^0_p\delta^\alpha_K = \Lambda^\alpha_{pKL}\omega^L_0, \\
&\nabla\Lambda^i_{pK} + \Lambda^i_{pK}\omega^0_0 + \Lambda^n_{pK}\omega^i_n - \omega^0_p\delta^i_K = \Lambda^i_{pKL}\omega^L_0, \\
&\nabla L^n_{i\widehat{u}} + L^n_{i\widehat{u}}\omega^0_0 - \omega^0_i\delta^n_{\widehat{u}} = L^n_{i\widehat{u}L}\omega^L_0, \\
&\nabla L^\alpha_{iK} + L^\alpha_{iK}\omega^0_0 + L^n_{iK}\omega^\alpha_n - \omega^0_i\delta^\alpha_K = L^\alpha_{iKL}\omega^L_0, \\
&\nabla L^p_{iK} + L^p_{iK}\omega^0_0 + L^n_{iK}\omega^p_n - \omega^0_i\delta^p_K = L^p_{iKL}\omega^L_0, \\
&\nabla H^n_{\alpha\beta} + H^n_{\alpha\beta}\omega^0_0 = H^n_{\alpha\beta K}\omega^K_0, \\
&\nabla H^n_{\alpha n} + H^n_{\alpha n}\omega^0_0 + H^n_{\alpha\beta}\omega^\beta_n - \omega^0_\alpha = H^n_{\alpha nK}\omega^K_0, \\
&\nabla H^p_{\alpha K} + H^p_{\alpha K}\omega^0_0 + H^n_{\alpha K}\omega^p_n - \omega^0_\alpha\delta^p_K = H^p_{\alpha KL}\omega^L_0, \\
&\nabla H^i_{\alpha K} + H^i_{\alpha K}\omega^0_0 + H^n_{\alpha K}\omega^i_n - \omega^0_\alpha\delta^i_K = H^i_{\alpha KL}\omega^L_0,
\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered}
L^n_{ij}\Lambda^j_{[pq]} + \Lambda^n_{s[p}L^s_{|i|q]} + L^n_{in}\Lambda^n_{[pq]} + L^n_{i\alpha}\Lambda^\alpha_{[pq]} = 0, \\
\Lambda^n_{pq}L^q_{[ij]} + L^n_{k[i}\Lambda^K_{|p|j]} + \Lambda^n_{pn}L^n_{[ij]} + \Lambda^n_{p\alpha}L^\alpha_{[ij]} = 0, \\
H^n_{\alpha n}\Lambda^n_{[pq]} + H^n_{\alpha\beta}\Lambda^\beta_{[pq]} + \Lambda^n_{t[p}H^t_{|\alpha|q]} = 0, \\
H^n_{\alpha n}L^n_{[ij]} + H^n_{\alpha\beta}L^\beta_{[ij]} + L^n_{k[i}H^k_{|\alpha|j]} = 0.
\end{gathered}$$

Коэффициенты в правых частях уравнений (4), вообще говоря, не симметричны по нижним индексам.

Системы величин $\Gamma_1 = \{\Lambda^n_{p\widehat{A}}, L^n_{i\widehat{u}}, \Lambda^\alpha_{aK}, \Lambda^i_{pK}, L^p_{iK}, H^n_{\alpha\widehat{\beta}}\}$, $\Gamma_2 = \{\Gamma_1, H^a_{\alpha K}, \Lambda^n_{p\widehat{A}K}, L^n_{i\widehat{u}K}, \Lambda^\alpha_{aKL}, L^i_{pKL}, L^p_{iKL}, H^n_{\alpha\widehat{\beta}L}\}$ образуют геометрические объекты [4] соответственно 1-го и 2-го порядков S-распределения.

2. Система уравнений $\omega^{\widehat{v}}_0 = 0$, ассоциированная [5] с S-распределением, вполне интегрируема тогда и только тогда, когда обращается в нуль тензор неголономности базисного Λ-распределения $r^{\widehat{v}}_{pq} = \frac{1}{2}(\Lambda^{\widehat{v}}_{pq} - \Lambda^{\widehat{v}}_{qp})$. В этом случае проективное пространство P_n расслаивается 1) на $(n-r)$-параметрическое семейство a) регулярных гиперполос $H_r(L)$ специального класса, b) регулярных r-мерных гиперполос $H_r(M)$ специального класса, c) r-мерных полос $V_{r(m)}(H)$ порядка m, оснащенных полем гиперплоскостей H_j; 2) на $(n-m)$-параметрическое семейство вырожденных центрированных распадающихся m-мерных гиперполос H^r_m ранга r ([1], с. 121). Система уравнений $\omega^{\widehat{A}}_0 = 0$, ассоциированная с S-распределением (L-распределением), вполне интегрируема тогда и только тогда, когда тензор неголономности $r^{\widehat{A}}_{ij}$ оснащающего M-распределения равен нулю и M-распределение несет двухкомпонентную сопряженную систему (Λ, L) [2]. Проективное пространство P_n в этом случае расслаивается на $(n-m)$-параметрическое семейство

m-мерных гиперполос H_m, базисная поверхность каждой из которых несет двухкомпонентную сопряженную систему $S_{(r,l)}$ [2].

3. Используем систему из $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\overline{w}_{\overline{K}}^{\overline{J}}$ [5]

$$\begin{aligned}
&\overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0 - \frac{1}{n+1}\Phi_K^0\omega_0^K, \ \ \overline{\omega}_0^n = \omega_0^n, \ \ \overline{\omega}_n^0 = \omega_n^0;\\
&\overline{\omega}_0^p = \omega_0^p + \Lambda_n^{pq}\Lambda_{q\alpha}^n\omega_0^\alpha + \Lambda_n^{pq}\Lambda_{qn}^n\omega_0^n, \ \ \overline{\omega}_n^p = -\Lambda_n^{pq}\omega_q^0;\\
&\overline{\omega}_0^i = \omega_0^i + L_n^{ik}L_{k\alpha}^n\omega_0^\alpha + L_n^{ik}L_{kn}^n\omega_0^n, \ \ \overline{\omega}_0^\alpha = \omega_0^\alpha + H_n^{\alpha\beta}H_{\beta n}^n\omega_0^n;\\
&\overline{\omega}_n^i = -L_n^{ik}\omega_k^0, \ \ \overline{\omega}_n^\beta = -H_n^{\beta\alpha}\omega_\alpha^0, \ \ \overline{\omega}_p^0 = \Lambda_{qp}^n\omega_n^q, \ \ \overline{\omega}_p^i = -\Lambda_{qp}^n L_n^{ik}\omega_k^q;\\
&\overline{\omega}_n^n = \omega_n^n - \frac{1}{n+1}\Phi_K^0\omega_0^K, \ \ \overline{\omega}_p^\alpha = -\Lambda_{qp}^n H_n^{\alpha\beta}\omega_\beta^q, \ \ \overline{\omega}_i^0 = L_{ki}^n\omega_n^k;\\
&\overline{\omega}_p^n = -\Lambda_{qp}^n\omega_0^q, \ \ \overline{\omega}_p^t = \omega_p^t + \Lambda_n^{tq}\Lambda_{qpK}^n\omega_0^K - \frac{1}{n+1}\delta_p^t\Phi_K^0\omega_0^K;\\
&\overline{\omega}_i^l = \omega_i^l + L_n^{lj}L_{jiK}^n\omega_0^K - \frac{1}{n+1}\delta_i^l\Phi_K^0\omega_0^K, \ \ \overline{\omega}_i^p = -L_{ji}^n\Lambda_n^{pq}\omega_q^j;\\
&\overline{\omega}_i^\alpha = -L_{ki}^n H_n^{\alpha\beta}\omega_\beta^k, \ \ \overline{\omega}_i^n = -L_{ji}^n\omega_0^j, \ \ \overline{\omega}_\alpha^0 = H_{\beta\alpha}^n\omega_n^\beta;\\
&\overline{\omega}_\alpha^i = -L_n^{ik}H_{\beta\alpha}^n\omega_k^\beta, \ \ \overline{\omega}_\alpha^p = -\Lambda_n^{pq}H_{\beta\alpha}^n\omega_q^\beta, \ \ \overline{\omega}_\alpha^n = -H_{\beta\alpha}^n\omega_0^\beta;\\
&\overline{\omega}_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\beta - \frac{1}{n+1}\delta_\alpha^\beta\Phi_K^0\omega_0^K + H_n^{\beta\gamma}H_{\gamma\alpha K}^n\omega_0^K.
\end{aligned} \tag{5}$$

Формы $\overline{\omega}_{\overline{J}}^{\overline{K}}$ удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства и задают инфинитезимальные перемещения тангенциального репера $\{\tau_{\overline{J}}\}$, где $D\tau_{\overline{J}} = \overline{\omega}_{\overline{J}}^{\overline{K}}\tau_{\overline{K}}$. В [5] доказано, что преобразование $J : \omega_{\overline{J}}^{\overline{K}} \longrightarrow \overline{\omega}_{\overline{J}}^{\overline{K}}$ форм $\omega_{\overline{J}}^{\overline{K}}$ проективного пространства по закону (5) является инволютивным, т. е. $J = J^{-1}$. Имея в виду эту инволютивность, будем говорить, что пространства P_n и $\overline{P}_n$ являются двойственными ([6], с. 143). Дифференциальные уравнения регулярного $\overline{S}$-распределения, двойственного данному регулярному S-распределению, имеют вид, аналогичный (3) (только все формы и функции, входящие в уравнения (3) пишутся с чертой сверху). Доказана

Теорема 1. *Регулярное скомпонованное S-распределение проективного пространства P_n во второй дифференциальной окрестности его образующего элемента индуцирует 1) проективное пространство $\overline{P}_n$, двойственное исходному проективному пространству P_n относительно инволютивного преобразования J форм $\omega_{\overline{J}}^{\overline{K}}$ по закону (5), 2) скомпонованное распределение $\overline{S} \subset \overline{P}_n$, двойственное исходному.*

Теорема 2. *Нормализация одного из регулярных скомпонованных распределений $S \subset P_n$ или $\overline{S} \subset \overline{P}_n$ равносильна нормализации другого, при этом компоненты полей оснащающих объектов связаны соотношениями*

$$\overline{\nu}_n^p = -\Lambda_n^{pq}\nu_q^0, \ \ \overline{\nu}_p^0 = \Lambda_{qp}^n\nu_n^q, \ \ \overline{\nu}_n^i = -L_n^{ik}\nu_k^0,$$
$$\overline{\nu}_i^o = L_{ki}^n\nu_n^k, \ \ \overline{\nu}_n^\alpha = -H_n^{\alpha\beta}\nu_\beta^0, \ \ \overline{\nu}_\alpha^0 = H_{\beta\alpha}^n\nu_n^\beta.$$

На основе [6] доказаны следующие три теоремы.

Теорема 3. *На оснащенном в смысле Картана базисном Λ-распределении данного S-распределения индуцируется первая линейная проективная связность $\overset{1}{\gamma}$, определенная путем проектирования. Слоевые формы $\overset{1}{\omega}{}_{\overline{p}}^{\overline{q}}$ соответствующего пространства проективной связности $\overset{1}{P}_{n,r}$ имеют вид*

$$\overset{1}{\omega}{}_0^p = \omega_0^p - \nu_n^p\omega_0^n, \ \ \overset{1}{\omega}{}_p^q = \omega_p^q - \nu_n^q\omega_p^n,$$
$$\overset{1}{\omega}{}_p^0 = \omega_p^0 - x_v^0\omega_p^v - \mu_n^0\omega_p^n, \ \ \overset{1}{\omega}{}_0^0 = \omega_0^0 - x_v^0\omega_0^v - \mu_n^0\omega_0^n,$$

где $\mu_n^0 = x_n^0 - x_v^0\Lambda_n^v$, $\nabla\mu_n^0 + \nu_n^p\omega_p^0 - x_v^0\omega_n^v + \omega_n^0 = \mu_{nK}^0\omega_0^K$. *При любом смещении центра S-распределения оснащающая плоскость $C_{n-r-1}(\nu_n^p)$ в смысле Картана Λ-распределения не выходит из нормали 1-го рода ν_n^p тогда и только тогда, когда она неподвижна. При этом плоскость $C_{n-r-1}(\nu_n^p)$ является плоскостью Кенигса нормали ν_n^p, а пространство $\overset{1}{P}_{n,r}$ является плоским.*

Теорема 4. *Оснащенное в смысле Картана регулярное базисное Λ-распределение данного S-распределения в P_n, кроме первой линейной связности проективного типа $\overset{1}{\gamma}$ в случае симметрии основного тензора Λ_{pq}^n, индуцирует еще две линейные связности $\overset{2}{\gamma}$, $\overset{3}{\gamma}$ проективного типа, определяемые соответственно системами форм*

$$\begin{aligned}
&\overset{2}{\omega}{}_0^p = \overset{1}{\omega}{}_0^p, \quad \overset{2}{\omega}{}_0^0 = \overset{1}{\omega}{}_0^0, \quad \overset{2}{\omega}{}_p^t = \overset{1}{\omega}{}_p^t + b_n^{ts}C_{spq}^n\overset{1}{\omega}{}_0^q + \Phi_{pv}^t\overset{1}{\omega}{}_0^v,\\
&\overset{2}{\omega}{}_p^0 = \overset{1}{\omega}{}_p^0 + (b_n^{ts}C_{spq}^n b_t + C_{spq}^n\nu_n^s)\overset{1}{\omega}{}_0^q + \Phi_{pv}^t(b_t + b_{st}^n\nu_n^s)\overset{1}{\omega}{}_0^v;\\
&\overset{3}{\omega}{}_0^p = \overset{1}{\omega}{}_0^p, \quad \overset{3}{\omega}{}_0^0 = \overset{1}{\omega}{}_0^0, \quad \overset{3}{\omega}{}_p^t = \overset{1}{\omega}{}_p^t + b_n^{ts}C_{spq}^n\overset{1}{\omega}{}_0^q + C_{pv}^t\overset{1}{\omega}{}_0^v,\\
&\overset{3}{\omega}{}_p^0 = \overset{1}{\omega}{}_p^0 + (b_n^{ts}C_{spq}^n b_t + C_{spq}^n\nu_n^s)\overset{1}{\omega}{}_0^q + C_{pv}^t(b_t + b_{st}^n\nu_n^s)\overset{1}{\omega}{}_0^v,
\end{aligned} \tag{6}$$

где $\overset{1}{\omega}{}_0^v = \omega_0^v - \Lambda_n^v\omega_0^n$. При этом

a) *пространства $\overset{1}{P}_{n,r}$ и $\overset{3}{P}_{n,r}$ являются двойственными,* b) *соответствующие пространства проективной связности $\overset{1}{P}_{n,r}$ и $\overset{2}{P}_{n,r}$ двойственны тогда и только тогда, когда $\Phi_{pv}^t = H_{vp}^t + x_v^0\delta_p^t = 0$. В этом случае все три пространства $\overset{1}{P}_{n,r}$, $\overset{2}{P}_{n,r}$, $\overset{3}{P}_{n,r}$ попарно двойственны между собой.*

Теорема 5. *Оснащение в смысле Картана* a) *регулярной r-мерной гиперполосы $H_r(M)$, оснащенной полем касательных m-мерных плоскостей M, $2 \le r < m < n-1$,* b) *регулярной r-мерной гиперполосы $H_r(L)$,* c) *r-мерной полосы $V_{r(m)}$ порядка m, оснащенной полем касательных гиперплоскостей H,* d) *вырожденной центрированной распадающейся m-мерной гиперполосы ранга r индуцирует два пространства проективной связности $\overset{1}{P}_{rr}$ и $\overset{2}{P}_{rr}$, ассоциированных с указанными многообразиями a) – d), причем эти пространства двойственны относительно преобразований J_2* (6).

Литература

1. Попов Ю.И. *Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства.* – С.-П.: Изд-во СПбГУ, 1992. – 172 с.
2. Волкова С.Ю. *$\widehat{\mathcal{H}}(\Lambda, L)$-распределения проективного пространства* // Дифференц. геометрия многообразий фигур. – Калининград, 1991. – Вып. 22 – С. 23–25.
3. Норден А.П. *Теория композиций* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1978. – Т. 10. – С. 117–145.
4. Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований* // Тр. Моск. матем. об–ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
5. Волкова С.Ю. *О двойственных проективных связностях $\widehat{\mathcal{H}}(\Lambda, L)$-распределения* // Дифференц. геометрия многообразий фигур. – Калининград, 1993. – Вып. 24. – С. 28–37.
6. Столяров А.В. *Двойственная теория оснащенных многообразий.* – Чебоксары: Изд-во Чебоксарск. гос. пед. ин-та, 1992. – 290 с.

Балтийский военно-морской институт

Поступили
полный текст 27.01.2000
краткое сообщение 18.12.2000