ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 7 (470)

УДК 517.986

М.Е. ПОЛЯКОВ

КРИТЕРИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПРОЕКТИВНОСТИ ОПЕРАТОРНЫХ АЛГЕБР, ОБЛАДАЮЩИХ КАНОНИЧЕСКИМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ

1. Введение

Пусть $A \subset \mathcal{B}(H)$ — произвольная (вообще говоря, несамосопряженная) операторная алгебра, замкнутая относительно топологии равномерной сходимости. Тогда гильбертово пространство H является левым модулем над A с естественным умножением $a \cdot h = a(h)$, $a \in A$, $h \in H$. В работе исследуется вопрос о том, при каких условиях алгебра A пространственно проективна, т. е. модуль H проективен.

Напомним, что левый A-модуль H называется *проективным*, если любой сюръективный морфизм произвольного банахового A-модуля на H, имеющий правый обратный ограниченный оператор, имеет и правый обратный морфизм A-модулей ([1], с. 361). В этой работе символами $\dot{\otimes}$ и $\oplus$ будут обозначаться соответственно гильбертово тензорное произведение и ортогональная l^2-сумма гильбертовых пространств. Символом $\widehat{\otimes}$ будет обозначаться проективное тензорное произведение банаховых пространств. Оказывается, модуль H проективен тогда и только тогда, когда *каноническая проекция* $\pi : A_+\widehat{\otimes}H \to H : a\widehat{\otimes}h \mapsto a \cdot h$ имеет правый обратный морфизм модулей (здесь пространство $A_+\widehat{\otimes}H$ рассмотрено как левый A-модуль с умножением, корректно заданным формулой $a \cdot (b\widehat{\otimes}h) = ab\widehat{\otimes}h$, $a \in A$, $b \in A_+$, $h \in H$). В случае унитальной алгебры A можно рассмотреть и каноническую проекцию $\pi : A\widehat{\otimes}H \to H$.

Основные результаты при изучении проблемы пространственной проективности самосопряженных операторных алгебр получены в статьях [2], [3]. Пусть алгебра $A \subset \mathcal{B}(H)$ самосопряжена. Напомним, что левый модуль H над C*-алгеброй A называется *гильбертовым*, если он является гильбертовым пространством и для любых $x, y \in H$, $a \in A$ выполнено условие $\langle a\cdot x, y\rangle = \langle x, a^*\cdot y\rangle$. Проекторы $p, q \in A$ называются *эквивалентными по Мюррею–фон Нейману*, если существует такой элемент $u \in A$, что $p = u^*u$ и $q = uu^*$. Проектор $q \in A$ называется *элементарным*, если подалгебра qAq одномерна. В этом случае можно рассмотреть левый A-модуль $H_q = Aq$, который является гильбертовым относительно скалярного произведения $\langle aq, bq\rangle = qb^*aq$ (ср. [4], гл. IV, 10). Для любого гильбертова пространства K_q введем левый гильбертов модуль $H_q\dot{\otimes}K_q$, действие на котором корректно задано формулой $a \cdot (bq\dot{\otimes}k) = abq\dot{\otimes}k$, $a \in A$, $bq \in Aq$, $k \in K_q$. Таким образом, элемент $a \in A$ действует на $H_q\dot{\otimes}K_q$ как оператор вида $\mathbf{a} \otimes \mathbf{1}$, где $\mathbf{a} \in \mathcal{B}(H_q)$.

Известно [3], что для любой C*-алгебры $A \subset \mathcal{B}(H)$ гильбертов модуль H может быть представлен с точностью до изометрического изоморфизма гильбертовых модулей в виде прямой суммы $(\oplus_{q\in\Lambda} H_q\dot{\otimes}K_q) \oplus H_0$, где Λ — максимальное множество попарно неэквивалентных по Мюррею–фон Нейману элементарных проекторов из A, H_q — система левых A-модулей вида Aq, K_q — система произвольных гильбертовых пространств, а гильбертов модуль H_0 не содержит ни одного подмодуля, изометрически изоморфного левому подмодулю вида H_q ни для какого $q \in \Lambda$.

При этом для любого проектора $q \in \Lambda$ и векторов $h_1, h_2 \in H_q$ существует оператор $h_1 \diamond h_2 \in A$, который равен нулю на ортогональном дополнении к модулю $H_q\dot{\otimes}K_q$ и переводит произвольный элемент $h\dot{\otimes}k \in H_q\dot{\otimes}K_q$ в $\langle h, h_2\rangle h_1\dot{\otimes}k$. Множество операторов вида $h_1 \diamond h_2$, $h_1 \in H_q$ при фиксированном $h_2 \in H_q$ будем называть *локальным столбцом одномерных операторов*. Таким образом, алгебра A содержит локальный столбец одномерных операторов для любого модуля $H_q\dot{\otimes}K_q, q\in\Lambda$. Происхождение этого термина нетрудно пояснить с помощью матриц. Именно, при подходящем выборе базисов произвольный оператор $a\in A\subset\mathcal{B}(H)$ может быть записан следующей матрицей:

$$a=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots &&&&&&&&&&&& \\ 0 & 0 & \dots &&&&&&&&&&&& \\ && \ddots &&&&&&&&&&&& \\ & \dots & 0 & a_1 & 0 & \dots &&&&&&&&& \\ && \dots & 0 & a_1 & 0 & \dots &&&&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&&&&&& \\ &&&& \dots & 0 & a_2 & 0 & \dots &&&&&& \\ &&&&& \dots & 0 & a_2 & 0 & \dots &&&&& \\ &&&&&&&& \ddots &&&&&& \\ &&&&&&& \dots & 0 & a_3 & 0 & \dots &&& \\ &&&&&&&& \dots & 0 & a_3 & 0 &&& \\ &&&&&&&&&&& \ddots &&& \end{pmatrix},$$

где $a_1,a_2,a_3,\dots$ — это некоторые операторы из $\mathcal{B}(H_{q_1})$, $\mathcal{B}(H_{q_2})$, $\mathcal{B}(H_{q_3}),\dots$, а начальный блок из нулей соответствует модулю H_0. При этом для всякого элемента $q\in\Lambda$ и любого вектора $(x_1,x_2,x_3,\dots)^\top\in H_q$ найдется оператор $a_q\in\mathcal{B}(H_q)$ вида

$$a_q=\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях алгебра A пространственно проективна тогда и только тогда, когда для любого проектора $q\in\Lambda$ справедливо неравенство $\min\{\dim(H_q),\dim(K_q)\}<\infty$, а подмодуль H_0 обладает тривиальным умножением и в случае неунитальной алгебры A равен нулю.

Естественным образом возникает вопрос о справедливости подобного критерия для несамосопряженных операторных алгебр $A\subset\mathcal{B}(H)$. Нам потребуются следующие определения. *Каноническим представлением* модуля H будем называть его разложение с точностью до изометрического изоморфизма A-модулей в виде прямой суммы гильбертовых пространств $H=(\oplus_{p\in\Phi}H_p\dot{\otimes}K_p)\oplus H_0$, для которой выполнены следующие условия:

1) для каждого индекса $p\in\Phi$ элемент $a\in A$ действует на A-модуле $H_p\dot{\otimes}K_p$ как оператор вида $\mathbf{a}\otimes\mathbf{1}$, где $\mathbf{a}\in\mathcal{B}(H_p)$. Кроме того, H_0 — тривиальный модуль относительно действия алгебры A;
2) для каждого индекса $p\in\Phi$ существует вектор $h_2\in H_p$ такой, что для любого вектора $h_1\in H_p$ алгебра A содержит оператор $h_1\diamond h_2$.

(Здесь, как и выше, символом $h_1\diamond h_2$ обозначен оператор из A, равный нулю на ортогональном дополнении к модулю $H_p\dot{\otimes}K_p$ и переводящий произвольный элемент $h\dot{\otimes}k\in H_p\dot{\otimes}K_p$ в $\langle h,h_2\rangle h_1\dot{\otimes}k$.) Множество всех удовлетворяющих условию 2) векторов h_2 образует замкнутое линейное подпространство в H_p, которое мы обозначим через B_p.

Как показано в [5], для несамосопряженной операторной подалгебры в $\mathcal{B}(H)$ условие проективности модуля H уже не влечет существование канонического представления для этого модуля. Простейшим примером служит алгебра матриц вида $\left(\begin{smallmatrix}\lambda & \mu \\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right)$ над двумерным гильбертовым пространством $H=\mathbb{C}^2$. Существуют и полупростые алгебры, обладающие этим свойством. Соответствующим примером является *пространство Соболева*, состоящее из абсолютно непрерывных функций на отрезке $[a,b]$, производные которых принадлежат пространству $L^2[a,b]$ [5]. Оно является гильбертовым относительно скалярного произведения $\langle f,g\rangle = \int\limits_{x=a}^{b} f(x)g(x)\,dx + \int\limits_{x=a}^{b} f'(x)g'(x)\,dx$. Поточечное умножение функций превращает это пространство в банахову алгебру, которая является левым модулем над собой.

Пусть теперь модуль H обладает каноническим представлением. Для этого случая автором предъявлен критерий проективности модуля H. Напомним, что тривиальный A-модуль $H_0 \neq 0$ проективен тогда и только тогда, когда алгебра A обладает правой единицей ([3], с. 13–15). Поэтому в дальнейшем можно не включать H_0 в каноническое представление. Тогда для проективности модуля H достаточными являются следующие условия [6]:

1) для любого индекса $p \in \Phi$ верно неравенство $\min(\dim(H_p), \dim(K_p)) < \infty$;
2) существует некоторое положительное число N такое, что для любого индекса $p \in \Phi$ справедливо неравенство $\min(\dim(H_p), \dim(K_p)) \leq N\dim(B_p)$.

В данной работе будет доказана необходимость указанных условий. Ранее это было сделано для C*-алгебр [3], где $H_p = B_p$, и потому условие 2) всегда верно, а также для CSL-алгебр с атомным коммутантом [7].

Данный критерий получен автором из анализа предложенных А.Я. Хелемским примеров пространственно непроективных операторных алгебр, для которых не выполняется первое или второе условие. Соответствующий пример для первого условия был впервые рассмотрен в статье [6]. Это фактор $\mathfrak{R}_{m,n}$ типа I, где оба числа m, n (размерности фактора и его коммутанта) бесконечны. Примером для второго условия является гильбертово пространство $H = \oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{C}^n$ и несамосопряженная алгебра $A = \oplus_{n\in\mathbb{N}}A_n \subset \mathcal{B}(H)$, где $A_n \subset \mathcal{B}(H_n)$ — алгебры треугольных матриц (в этом случае размерность соответствующего пространства B_n не меньше единицы, а потому условие 2), очевидно, нарушается) [8].

Перед началом рассуждений сделаем некоторые предварительные замечания. Пусть алгебра $A \subset \mathcal{B}(H)$ не унитальна. Тогда можно отождествить ее унитализацию A_+ с операторной подалгеброй в $\mathcal{B}(H)$. По сделанным выше предположениям каноническое представление модуля H не содержит тривиального подмодуля H_0. Но тогда оно является каноническим представлением и над A_+. При этом для любого индекса $p \in \Phi$ пространства B_p и B_p^+, соответствующие алгебрам A и A_+, совпадают. Действительно, пусть $x \in B_p, y \in B_p^+$, $z \in H_p$. Тогда $z \diamond x \in A$ и потому $z \diamond y = (z \diamond x)(x \diamond y) \in A$. Таким образом, выполнение условий 1) и 2) над алгеброй A эквивалентно их выполнению над алгеброй A_+. Следовательно, в дальнейшем алгебру A можно считать унитальной и рассматривать каноническую проекцию $\pi : A\widehat{\otimes}H \to H$.

Далее все базисы гильбертовых пространств по умолчанию предполагаются ортонормированными.

2. Свойства правого обратного к канонической проекции морфизма

Основной метод этой работы впервые введен в [2], но здесь излагается заново со значительными изменениями.

Фиксируем произвольный элемент $p \in \Phi$. Понятно, что если модуль H проективен, то и его подмодуль $H' = H_p\dot{\otimes}K_p$ тоже проективен (как прямое слагаемое, а потому и ретракт H). Введем базисы $e'_i \in H_p$, $e''_j \in K_p$, $e_{i,j} := e'_i\dot{\otimes}e''_j \in H_p\dot{\otimes}K_p$, где $i \in I$, $j \in J$.

Исследуем морфизм $\rho : H' \to A\widehat{\otimes}H'$, правый обратный к канонической проекции $\pi : A\widehat{\otimes}H' \to H'$. Предварительно для полноты изложения докажем несколько промежуточных лемм согласно ([2], с. 390).

Пусть H — произвольное гильбертово пространство с базисом $e_m, m \in I$, E — произвольное банахово пространство. Для каждого m рассмотрим оператор $\sigma_m : E\widehat{\otimes}H \to E$, корректно заданный формулой $\sigma_m(f\widehat{\otimes}h) = \langle h, e_m\rangle f$, $f \in E$, $h \in H$. Тем самым, для всякого представления элемента $u \in E\widehat{\otimes}H$ в виде суммы

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \widehat{\otimes} x_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| \, \|x_k\| < \infty, \ \ y_k \in E, \ \ x_k \in H,$$

верна формула

$$\sigma_m(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, e_m \rangle y_k. \tag{1}$$

Лемма 1. *Для каждого $u \in E\widehat{\otimes}H$ справедливо равенство $u = \sum\limits_{m \in I} \sigma_m(u) \widehat{\otimes} e_m$.*

(Иными словами, если $\lambda = (m_1, \dots, m_k)$ — сеть всех конечных подмножеств в I, упорядоченная по прямому включению, то направленность

$$u_\lambda = \sigma_{m_1}(u)\widehat{\otimes}e_{m_1} + \dots + \sigma_{m_k}(u)\widehat{\otimes}e_{m_k}$$

сходится к u.)

Доказательство. Для заданного подмножества $\lambda = (m_1, \dots, m_k)$ обозначим через q_λ проекцию пространства H на замкнутое подпространство, натянутое на векторы $e_{m_1}, \dots, e_{m_k}$. Тогда для любого элементарного тензора $u = y\widehat{\otimes}x$ верна формула

$$u_\lambda := \sum_{i=1}^{k} \sigma_{m_i}(u)\widehat{\otimes}e_{m_i} = \sum_{i=1}^{k} y\langle x, e_{m_i}\rangle \widehat{\otimes}e_{m_i} = y\widehat{\otimes}(\sum_{i=1}^{k}\langle x, e_{m_i}\rangle e_{m_i}) = y\widehat{\otimes}q_\lambda(x) = (\mathbf{1}\widehat{\otimes}q_\lambda)u.$$

В то же время направленность $q_\lambda(x)$ стремится к x. Поэтому направленность $(\mathbf{1}\widehat{\otimes}q_\lambda)u$ стремится к u. Так как для любого конечного подмножества $\lambda \subset I$ норма оператора $\mathbf{1}\widehat{\otimes}q_\lambda$ равна единице, то для любого элемента $u \in E\widehat{\otimes}H$ направленность $u_\lambda = (\mathbf{1}\widehat{\otimes}q_\lambda)u$ стремится к u. □

Лемма 2. *Для каждого $u \in E\widehat{\otimes}H$ справедливо неравенство $\sum\limits_{m\in I} \|\sigma_m(u)\|^2 \le \|u\|^2$.*

Доказательство. Для любого представления u в виде суммы $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k\widehat{\otimes}x_k$ без ограничения общности можно считать, что $\|x_k\| = \|y_k\|$. Из формулы (1) получаем цепочку неравенств

$$\sum_{m\in I} \|\sigma_m(u)\|^2 \le \sum_{m\in I} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x_k, e_m\rangle| \cdot \|y_k\| \right)^2 \le$$

$$\le \sum_{m\in I} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x_k, e_m\rangle|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\|^2 \right) \right] = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 \right).$$

Но т. к. $\|x_k\| = \|y_k\|$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 \right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| \, \|x_k\| \right)^2.$$

В то же время $\|u\| = \inf \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|y_k\| \, \|x_k\|$, где нижняя грань взята по всем представлениям $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k\widehat{\otimes}x_k$. □

Следующая лемма следует из теоремы Рисса о непрерывных функционалах на гильбертовом пространстве.

Лемма 3. *Для непрерывного функционала f, который действует на гильбертовом пространстве H с базисом e_i, $i \in I$, выполняется неравенство $\sum\limits_{i\in I} |f(e_i)|^2 \le \|f\|^2$.*

Рассмотрим теперь морфизм левых A-модулей $\rho : H' \to A\widehat{\otimes}H'$, правый обратный к канонической проекции $\pi : A\widehat{\otimes}H' \to H'$ (напомним, что символом H' обозначается модуль $H_p\dot{\otimes}K_p$). Фиксируем произвольный элемент $e' \in B_p$. Тогда для любого индекса $t \in I$ элемент $e'_t \diamond e'$ лежит в A в силу определения пространства B_p. Аналогично, $e' \diamond e' \in A$.

Применяя к образу $\rho(e'\dot{\otimes}e''_j)$ лемму 1, можно записать формулу

$$\rho(e'\dot{\otimes}e''_j) = \sum_{i\in I, k\in J} b^j_{i,k}\widehat{\otimes}e_{i,k}, \quad b^j_{i,k} \in A.$$

Применяя к ней оператор $e' \diamond e' \in A$, получаем равенство

$$\rho(e'\dot{\otimes}e''_j) = \sum_{i\in I,\ k\in J} (e' \diamond y^j_{i,k})\widehat{\otimes}e_{i,k},$$

где $y^j_{i,k} := (b^j_{i,k})^*(e') \in H_p$. Далее, применяя к полученной формуле оператор $e'_t \diamond e'$, окончательно имеем

$$\rho(e_{t,j}) = \sum_{i\in I,\ k\in J} (e'_t \diamond y^j_{i,k})\widehat{\otimes}e_{i,k}. \tag{2}$$

Удобно выписать еще одно простое равенство. В дальнейшем будем неоднократно использовать функционалы, корректно заданные формулой

$$f : A\widehat{\otimes}H' \to \mathbb{C} : a\widehat{\otimes}z \mapsto \langle a \cdot e'_{m_0}, e'_{t_0}\rangle\langle z, e_{i_0,k_0}\rangle. \tag{3}$$

Тогда в силу равенства (2) получаем формулы

$$\begin{array}{rcll} f(\rho(e_{t,j})) &=& \langle e'_{m_0}, y^j_{i_0,k_0}\rangle & \text{при} \quad t = t_0, \\ f(\rho(e_{t,j})) &=& 0 & \text{при} \quad t \neq t_0. \end{array} \tag{4}$$

Теперь приступим к изучению системы элементов $y^j_{i,k}$, $i \in I$, $j, k \in J$, однозначно задающей морфизм ρ. Напомним, что обозначение $\lim\limits_k \lambda_k = 0$ для произвольного числового семейства $\{\lambda_k \in \mathbb{C},\ k \in K\}$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ множество элементов $\{k \in K : |\lambda_k| \geq \varepsilon\}$ конечно.

Следующие три леммы описывают “предельные свойства” системы $y^j_{i,k}$ при достаточно больших значениях параметров j, i, k.

Лемма 4. *Для любых фиксированных индексов $i_0, m_0 \in I$ справедливо неравенство $\sum\limits_{j\in J} |\langle e'_{m_0}, y^j_{i_0,j}\rangle|^2 \leq \|\rho\|^2$, откуда $\lim\limits_j \langle e'_{m_0}, y^j_{i_0,j}\rangle = 0$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любой последовательности различных индексов $j_n \in J$, $n = 1, 2\dots$, выполняется условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e'_{m_0}, y^{j_n}_{i_0,j_n}\rangle|^2 \leq \|\rho\|^2.$$

Выберем произвольную последовательность различных индексов $i_n \in I$, $n = 1, 2\dots$, и введем для нее функционал

$$F : A\widehat{\otimes}H' \to \mathbb{C} : a\widehat{\otimes}z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \langle a \cdot e'_{m_0}, e'_{i_n}\rangle\langle z, e_{i_0,j_n}\rangle.$$

Оценим сверху норму этого функционала. В силу неравенства Коши–Буняковского верна оценка

$$|F(a\widehat{\otimes}z)|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle a \cdot e'_{m_0}, e'_{i_n}\rangle|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, e_{i_0,j_n}\rangle|^2. \tag{5}$$

А т. к. системы $e'_{i_n} \in H_p$ и $e_{i_0,j_n} \in H' = H_p \dot{\otimes} K_p$ ортонормированы, то первый сомножитель формулы (5) не превосходит $\|a\|^2$, а второй не превосходит $\|z\|^2$. Поэтому $\|F\| \leq 1$. Но F есть сумма функционалов вида (3) при $t_0 = i_n$, $k_0 = j_n$, $n = 1, 2 \ldots$ По формуле (4) получаем

$$F(\rho(e_{i_n,j_n})) = \langle e'_{m_0}, y^{j_n}_{i_0,j_n} \rangle.$$

Однако норма функционала $F \circ \rho : H' \to \mathbb{C}$ не больше $\|\rho\|$. По лемме 3 справедлива оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(F \circ \rho)(e_{i_n,j_n})|^2 \leq \|\rho\|^2,$$

откуда и вытекает искомое. $\square$

Лемма 5. *Для любых фиксированных индексов* $i_0, m_0 \in I$, $k_0 \in J$ *справедливо неравенство* $\sum\limits_{j \in J} |\langle e'_{m_0}, y^j_{i_0,k_0} \rangle|^2 \leq \|\rho\|^2$, *откуда* $\lim\limits_j \langle e'_{m_0}, y^j_{i_0,k_0} \rangle = 0$.

Доказательство. Фиксируем произвольный элемент $t_0 \in I$. Рассмотрим функционал

$$F : A \widehat{\otimes} H' \to \mathbb{C} : a \widehat{\otimes} z \mapsto \langle a \cdot e'_{m_0}, e'_{t_0} \rangle \langle z, e_{i_0,k_0} \rangle.$$

Очевидно, что его норма не превосходит 1. Значение данного функционала на элементе $\rho(e_{t_0,j})$ по формуле (4) равно $\langle e'_{m_0}, y^j_{i_0,k_0} \rangle$. Так как система векторов $e_{t_0,j}$, $j \in J$, ортонормирована, то, применяя к функционалу $F \circ \rho : H' \to \mathbb{C}$ лемму 3, получаем неравенство

$$\sum_{j \in J} |(F \circ \rho)(e_{t_0,j})|^2 \leq \|F \circ \rho\|^2 \leq \|\rho\|^2. \quad \square$$

Лемма 6. *Для любых фиксированных индексов* $i_0, m_0 \in I$, $j_0 \in J$ *справедливо неравенство* $\sum\limits_{k \in J} |\langle e'_{m_0}, y^{j_0}_{i_0,k} \rangle|^2 \leq \|\rho\|^2$, *откуда* $\lim\limits_k \langle e'_{m_0}, y^{j_0}_{i_0,k} \rangle = 0$.

Доказательство. Фиксируем произвольный элемент $t \in I$. Воспользовавшись леммой 1 и формулой (2), получаем равенство

$$\sum_{i \in I, k \in J} \sigma_{i,k}(\rho(e_{t,j_0})) \widehat{\otimes} e_{i,k} = \rho(e_{t,j_0}) = \sum_{i \in I, k \in J} (e'_t \diamond y^{j_0}_{i,k}) \widehat{\otimes} e_{i,k}.$$

Отсюда $\sigma_{i,k}(\rho(e_{t,j_0})) = e'_t \diamond y^{j_0}_{i,k}$. По лемме 2 верна оценка

$$\sum_{i \in I, k \in J} \|e'_t \diamond y^{j_0}_{i,k}\|^2 = \sum_{i \in I, k \in J} \|\sigma_{i,k}(\rho(e_{t,j_0}))\|^2 \leq \|\rho(e_{t,j_0})\|^2 \leq \|\rho\|^2.$$

Осталось заметить, что для любого $k \in J$ справедливо неравенство $|\langle e'_{m_0}, y^{j_0}_{i_0,k} \rangle| \leq \|y^{j_0}_{i_0,k}\| = \|e'_t \diamond y^{j_0}_{i_0,k}\|$. $\square$

Теперь запишем формулы, отражающие тот факт, что морфизм $\rho : H' \to A \widehat{\otimes} H'$ является правым обратным к канонической проекции.

Лемма 7. *Для любых различных индексов* $j, k \in J$ *справедливы формулы*

$$\sum_{i \in I} \langle e'_i, y^j_{i,k} \rangle = 0$$

и

$$\sum_{i \in I} \langle e'_i, y^j_{i,j} \rangle = 1.$$

Доказательство. Фиксируя произвольный индекс $t \in I$, с учетом (2) получаем

$$e_{t,j} = \pi(\rho(e_{t,j})) = \sum_{i\in I, k\in J} \pi[(e'_t \diamond y^j_{i,k})\widehat{\otimes} e_{i,k}] = \sum_{i\in I, k\in J} (e'_t \diamond y^j_{i,k}) \cdot e_{i,k} = \sum_{i\in I, k\in J} \langle e'_i, y^j_{i,k}\rangle e_{t,k}.$$

Осталось воспользоваться ортогональностью системы элементов $e_{t,k}$, $k \in J$, и сравнить коэффициенты в правой и левой частях полученного равенства. $\square$

3. Первое условие проективности

Основным техническим средством для доказательства первого критерия проективности будет формулируемая ниже теорема о "лакунизации". Для ее формулировки и доказательства введем систему чисел $c^j_{i,k} := \langle e'_i, y^i_{j,k}\rangle$. Из лемм 4–7 заключаем, что введенная система обладает следующими свойствами:

1) для любых индексов $i_0 \in I$, $j_0, k_0 \in J$ справедливы предельные равенства

$$\text{a) } \lim_{j\in J} c^{\,j}_{\,i_0,j} = 0, \quad \text{b) } \lim_{j\in J} c^{\,j}_{\,i_0,k_0} = 0, \quad \text{c) } \lim_{k\in J} c^{\,j_0}_{\,i_0,k} = 0; \tag{6}$$

2) для любых различных индексов $j, k \in J$ справедливы равенства

$$\text{a) } \sum_{i\in I} c^{\,j}_{\,i,k} = 0, \qquad \text{b) } \sum_{i\in I} c^{\,j}_{\,i,j} = 1. \tag{7}$$

Теорема 1 (лакунизация). *Пусть числовая система $c^{\,j}_{\,i,k} \in \mathbb{C}$, $j,k \in J$, $i \in I$, удовлетворяет условиям (6), (7). Тогда для любого натурального числа l и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие система различных индексов $j_1, \dots, j_l \in J$ и система непересекающихся конечных подмножеств $A_1, \dots, A_l \subset I$, что для любых различных натуральных чисел $m, n \le l$ справедливы неравенства*

$$\text{a) } \Big|\sum_{i\in A_m} c^{\,j_n}_{\,i,j_m}\Big| \le \varepsilon, \quad \text{b) } \Big|\sum_{i\in A_m} c^{\,j_m}_{\,i,j_m} - 1\Big| \le \varepsilon. \tag{8}$$

Доказательство проведем индукцией по l.

При $l = 1$ необходимо показать, что для некоторых индекса $j_1 \in J$ и конечного подмножества $A_1 \subset I$ выполняется неравенство

$$\Big|\sum_{i\in A_1} c^{\,j_1}_{\,i,j_1} - 1\Big| \le \varepsilon.$$

Но в силу (7, b)) для любого индекса $j_1 \in J$ справедливо равенство

$$\sum_{i\in I} c^{\,j_1}_{\,i,j_1} = 1,$$

откуда и следует искомое.

Пусть теорема доказана для $l-1$. Докажем ее для l. Нам необходимо найти индекс $i_l \in I$ (отличный от уже построенных $i_1, \dots, i_{l-1}$) и конечное множество $A_l \subset J$ (не пересекающееся с уже построенными $A_1, \dots, A_{l-1}$) так, чтобы условие (8, a)) выполнялось при 1) $n = l$, $m < l$, 2) $n < l$, $m = l$, а условие (8, b)) выполнялось при $m = l$. Обозначим $X = A_1 \cup \dots \cup A_{l-1}$.

Предельные отношения типа (6) справедливы и для конечных сумм в случае, когда индекс i_0 пробегает некоторое конечное множество. Поэтому можно выбрать индекс j_l так, чтобы для любых натуральных чисел $m, n \le l$ одновременно выполнялись следующие неравенства:

$$\text{a) } \Big|\sum_{i\in A_m} c^{\,j_l}_{\,i,j_m}\Big| \le \varepsilon, \quad \text{b) } \Big|\sum_{i\in X} c^{\,j_n}_{\,i,j_l}\Big| \le \varepsilon, \quad \text{c) } \Big|\sum_{i\in X} c^{\,j_l}_{\,i,j_l}\Big| \le \varepsilon. \tag{9}$$

Первое из этих неравенств — это в точности неравенство (8, a)) для случая $n = l$, $m < l$. Далее, в силу (7) при $n < l$ справедливы равенства

$$\text{a)}\ \sum_{i \in I} c_{i,j_l}^{j_n} = 0, \quad \text{b)}\ \sum_{i \in I} c_{i,j_l}^{j_l} = 1,$$

откуда с учетом (9, b), c)) получаем неравенства

$$\text{a)}\ \left| \sum_{i \in I \setminus X} c_{i,j_l}^{j_n} \right| \le \varepsilon, \quad \text{b)}\ \left| \sum_{i \in I \setminus X} c_{i,j_l}^{j_l} - 1 \right| \le \varepsilon.$$

Следовательно, существует конечное множество $A_l \subset I \setminus X$, для которого выполняются следующие неравенства:

$$\text{a)}\ \left| \sum_{i \in A_l} c_{i,j_l}^{j_n} \right| \le \varepsilon, \quad \text{b)}\ \left| \sum_{i \in A_l} c_{i,j_l}^{j_l} - 1 \right| \le \varepsilon.$$

Но это и есть неравенство (8, a)) для случая $n < l, m = l$ и неравенство (8, b)) для случая $m = l$. $\square$

Далее следует основная

Теорема 2. *Если размерности пространств H_p и K_p равны бесконечности, то модуль $H' = H_p \dot{\otimes} K_p$ не является проективным.*

Доказательство. Предположим, что существует морфизм $\rho : H' \to A \widehat{\otimes} H'$, правый обратный к канонической проекции $\pi : A \widehat{\otimes} H' \to H'$. Тогда справедлива формула (2). Фиксируем произвольный элемент $t \in I$. Для любого натурального числа l определим $\varepsilon = 1/(2l)$ и построим согласно теореме 1 последовательность индексов $j_1, \ldots, j_l \in J$ и систему непересекающихся конечных подмножеств $A_1, \ldots, A_l \subset I$. Рассмотрим функционал

$$F : A \widehat{\otimes} H' \to \mathbb{C} : a \widehat{\otimes} z \mapsto \sum_{n=1}^{l} \sum_{i \in A_n} \langle a \cdot e_i', e_t' \rangle \langle z, e_{i,j_n} \rangle.$$

Докажем, что его норма не превосходит 1. Так как системы векторов e_i', $i \in \cup_{n=1}^{l} A_n$ и e_{i,j_n}, $i \in A_n$, $n = 1, \ldots, l$ ортонормированы, то в силу неравенства Коши–Буняковского справедлива оценка

$$|F(a \widehat{\otimes} z)|^2 \le \sum_{n=1}^{l} \sum_{i \in A_n} |\langle e_i', a^* \cdot e_t' \rangle|^2 \cdot \sum_{n=1}^{l} \sum_{i \in A_n} |\langle z, e_{i,j_n} \rangle|^2 \le \|a\|^2 \|z\|^2.$$

Вычислим значение этого функционала на элементе $\rho(e_{t,j_{n_0}})$, $n_0 \le l$. Функционал F есть сумма функционалов вида (3) при $i_0 = m_0 = i$, $k_0 = j_n$, $t = t_0$, $n = 1, 2, \ldots$ Для любого натурального числа $s \le l$ согласно формуле (4) справедливо равенство

$$(F \circ \rho)(e_{t,j_s}) = \sum_{n=1}^{l} \sum_{i \in A_n} \langle e_i', y_{i,j_n}^{j_s} \rangle = \sum_{n=1}^{l} \sum_{i \in A_n} c_{i,j_n}^{j_s}.$$

По теореме 1 верна оценка

$$|(F \circ \rho)(e_{t,j_s}) - 1| \le \left| \sum_{i \in A_s} c_{i,j_s}^{j_s} - 1 \right| + \sum_{n=1,\ldots,l,\ n \ne s} \left| \sum_{i \in A_n} c_{i,i_n}^{j_s} \right| \le (1/2l) \cdot l = 1/2. \tag{10}$$

Обозначим $z_l := \sum_{s=1}^{l} e_{t,j_s}$. Очевидно, $\|z_l\| = \sqrt{l}$. В то же время, согласно (10) справедливо неравенство $|(F \circ \rho)(z_l) - l| \le l/2$, откуда $|(F \circ \rho)(z_l)| \ge l/2$ и $\sqrt{l}/2 \le \|F \circ \rho\| \le \|\rho\|$. Устремляя l к бесконечности, получаем противоречие, которое доказывает теорему. $\square$

4. Второе условие проективности

В этом параграфе будет доказана необходимость второго условия проективности, которое выражается соотношением $\min(\dim(H_p), \dim(K_p)) \leq N \cdot \dim(B_p)$. Более точно, покажем, что параметр N в этом соотношении может быть взят равным $\|\rho\|^2$, где $\rho : H \to A \widehat{\otimes} H$ — правый обратный морфизм к канонической проекции $\pi : A \widehat{\otimes} H \to H$ (ср. также доказательство достаточности в [6]). Указанные рассуждения являются обобщением контрпримера статьи ([8], с. 22–24).

Итак, фиксируем индекс $p \in \Phi$ и рассмотрим пространства H_p, K_p и соответствующее им пространство $B_p \subset H_p$. Напомним, что B_p определяется как множество всех векторов $h_2 \in H_p$ таких, что для любого вектора $h_1 \in H_p$ алгебра A содержит оператор $h_1 \diamond h_2$. Если пространство B_p бесконечномерно, то второе условие проективности выполняется всегда. Пусть это пространство конечномерно. Дополним его ортонормированный базис до базиса e'_i, $i \in I$ в пространстве H_p. В этих обозначениях пусть базис пространства B_p есть e'_i, $i = 1, \ldots, k$. Рассмотрим также ортонормированный базис e''_j, $j \in J$, в пространстве K_p. Тогда система элементов $e_{i,j} := e'_i \dot{\otimes} e''_j$, $i \in I$, $j \in J$, будет ортонормированным базисом в пространстве $H_p \dot{\otimes} K_p$.

Напомним, что в силу определения канонического представления каждый элемент алгебры A действует на модуле $H_p \dot{\otimes} K_p$ как оператор вида $\mathbf{a} \otimes \mathbf{1}$, где $\mathbf{a} \in \mathcal{B}(H_p)$.

Сделаем сначала следующее замечание. Пусть $x \in B_p$, тогда для любого вектора $y \in H$ оператор $y \diamond x$ принадлежит A. Пусть $a \in A$, тогда $(y \diamond x) \circ (\mathbf{a} \otimes \mathbf{1}) = y \diamond a^*(x) \in A$. Поэтому $a^*(x) \in B_p$. Напомним, что в силу проективности H существует морфизм $\rho : H \to A \widehat{\otimes} H$, правый обратный к канонической проекции $\pi : A \widehat{\otimes} H \to H$.

Лемма 8. *Для любых индексов $t \in I$, $j \in J$ справедлива формула*

$$\rho(e_{t,j}) = \sum_{i=1}^{k} (e'_t \diamond e'_i) \widehat{\otimes} x_i^j \tag{11}$$

при некоторых $x_i^j \in H$.

Доказательство. Пусть $e'_1 \in B_p$. Заметим, что $e_{1,j} = (e'_1 \diamond e'_1)(e_{1,j})$. Элемент $\rho(e_{1,j}) \in A \widehat{\otimes} H$ можно представить в виде суммы

$$\rho(e_{1,j}) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r^j \widehat{\otimes} h_r^j, \quad \sum_{r=1}^{\infty} \|a_r^j\| \cdot \|h_r^j\| < \infty.$$

Применяя к данному равенству оператор $e'_1 \diamond e'_1$, получаем формулу

$$\rho(e_{1,j}) = \sum_{r=1}^{\infty} (e'_1 \diamond (a_r^j)^* e'_1) \widehat{\otimes} h_r^j. \tag{12}$$

Но $e'_1 \in B_p$. Поэтому и $(a_r^j)^* e'_1 \in B_p$. Следовательно, этот вектор можно разложить по базису $e'_1, \ldots, e'_k$. Выписав это разложение для каждого из элементов суммы (12) и перегруппировав слагаемые, получаем формулу

$$\rho(e_{1,j}) = \sum_{i=1}^{k} (e'_1 \diamond e'_i) \widehat{\otimes} x_i^j$$

для некоторых $x_i^j \in H$. Отсюда применением оператора $e'_t \diamond e'_1$ выводим искомое. □

Применяя к формуле (11) при $t = 1$ оператор канонической проекции π, получаем

$$e_{1,j} = \sum_{i=1}^{k} (e'_1 \diamond e'_i) \cdot x_i^j.$$

Но

$$x_i^j = \sum_{m\in I, l\in J} \langle x_i^j, e_{m,l}\rangle e_{m,l} + y_i^j,$$

где вектор y_i^j ортогонален подпространству $H_p \dot{\otimes} K_p$. А поскольку $(e_1' \diamond e_i')e_{m,l}$ равняется $e_{1,l}$ при $i = m$ и нулю в противном случае, то

$$e_{1,j} = \sum_{i=1}^{k} (e_1' \diamond e_i') x_i^j = \sum_{i=1}^{k} \sum_{m\in I, l\in J} (e_1' \diamond e_i') \cdot (\langle x_i^j, e_{m,l}\rangle e_{m,l}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{l\in J} \langle x_i^j, e_{i,l}\rangle e_{1,l}.$$

Так как система $e_{1,l}, l \in J$, ортонормирована, то

$$\sum_{i=1}^{k} \langle x_i^j, e_{i,j}\rangle = 1. \tag{13}$$

Теорема 3. *Если A-модуль $H = \oplus_{p\in\Phi}(H_p \dot{\otimes} K_p)$ проективен, то для любого индекса $p \in \Phi$ выполняется неравенство* $\min(\dim(H_p), \dim(K_p)) \leq \|\rho\|^2 \cdot \dim(B_p)$.

Доказательство. Выберем произвольное натуральное число n, не превосходящее $\min(\dim(H_p), \dim(K_p))$. Из введенных выше базисов e_i', e_j'', $i \in I$, $j \in J$, можно выбрать ортонормированные подсистемы $e_1', \ldots, e_n' \in H_p$, $e_1'', \ldots, e_n'' \in K_p$ так, чтобы при $k < n$ подсистема $e_1', \ldots, e_n'$ содержала базис $e_1', \ldots, e_k'$ пространства B_p, а при $k \geq n$ содержалась в нем. Очевидно, норма вектора $y_n = \sum\limits_{j=1}^{n} e_{j,j}$ равна $\sqrt{n}$. Оценим снизу норму его образа $\rho(y_n)$.

Для этого введем функционал

$$F : A \widehat{\otimes} H \to \mathbb{C} : a \widehat{\otimes} z \mapsto \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{k} \langle a \cdot e_s', e_r'\rangle \langle z, e_{s,r}\rangle$$

(напомним, что $e_{s,r} := e_s' \dot{\otimes} e_r''$). Оценим его норму. В силу неравенства Коши–Буняковского получаем формулу

$$|F(a \widehat{\otimes} z)| \leq \sqrt{\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{k} |\langle a \cdot e_s', e_r'\rangle|^2} \sqrt{\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{k} |\langle z, e_{s,r}\rangle|^2}.$$

Но система векторов $e_r' \in K_p$ ортонормирована, поэтому

$$\sum_{r=1}^{n} |\langle a \cdot e_s', e_r'\rangle|^2 \leq \|a \cdot e_s'\|^2 \leq \|a\|^2.$$

Таким образом,

$$\sqrt{\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{k} |\langle a \cdot e_s', e_r'\rangle|^2} \leq \sqrt{k} \|a\|.$$

Так как система $e_{s,r} \in H$ ортонормирована, то

$$\sqrt{\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{k} |\langle z, e_{s,r}\rangle|^2} \leq \|z\|.$$

Поэтому норма функционала F не превосходит $\sqrt{k}$.

Вычислим значение $F(\rho(y_n))$. По формуле (11) справедливо равенство

$$\rho(y_n) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} (e_j' \diamond e_i') \widehat{\otimes} x_i^j.$$

Используя равенство (13), получаем формулу

$$F(\rho(y_n)) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} F((e'_j \diamond e'_i)\widehat{\otimes} x_i^j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\langle e'_j, (e'_j \diamond e'_i)\cdot e'_i\rangle\langle x_i^j, e_{i,j}\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\langle x_i^j, e_{i,j}\rangle = n.$$

Но $\|F \circ \rho\| \leq \sqrt{k}\|\rho\|$, а $\|y_n\| = \sqrt{n}$. Отсюда $\|\rho\| \geq \sqrt{n/k}$ и $n \leq \|\rho\|^2 k$. $\square$

Автор приносит благодарность профессору А.Я. Хелемскому за постановку задачи и ценные советы.

Литература

1. Хелемский А.Я. *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии.* – М.: Наука, 1989. – 464 с.
2. Helemskii A.Ya. *A description of spatially projective von Neumann algebras* // J. Operator Theory. – 1994. – V. 32. – P. 391–398.
3. Helemskii A.Ya. *Projective homological classification of* C*-*algebras* // Comm. in Algebra. – 1998. – V. 26. – № 3. – P. 977–996.
4. Rickart C.E. *General Theory of Banach algebras.* – New York: Van Nostrand, 1960. – 394 p.
5. Tabaldyev S.B. *The Sobolev algebra and indecomposable spatially projective algebras* // Topological Homology. Helemskii's Moscow Seminar. – Huntington, N. Y.: Nova Science Publishers Inc., 2000. – P. 201–210.
6. Helemskii A.Ya. *Description of spatially projective operator* C*-*algebras, and around it* // Banach Algebras 97. Proc. of the 13th International Conference on Banach Algebras. Offprint. – Berlin: Walter de Gruyter, 1998. – P. 261–272.
7. Головин Ю.О. *Свойство пространственной проективности в классе CSL-алгебр с атомным коммутантом* // Фундамент. и прикл. матем. – 1995. – Т. 1. – № 1. – С. 147–159.
8. Helemskii A.Ya. *Wedderburn type theorems for operator algebras and modules: traditional and "quantized" homological approaches* // Topological Homology: Helemskii's Moscow Seminar. – Huntington, N. Y.: Nova Science Publisher Inc., 2000. – P. 57-92.

Московский государственный университет

Поступила
25.05.2000