ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 10 (485)

УДК 517.518

С.Я. ХАВИНСОН

АППРОКСИМАЦИЯ ЭЛЕМЕНТАМИ КЛИНА С УЧЕТОМ ВЕЛИЧИН АППРОКСИМИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Введение

В работах [1]–[5] была разработана теория таких аппроксимационных процессов, в которых в расчет принимается не только сходимость аппроксимирующих агрегатов к приближаемому элементу, но и величины самих аппроксимирующих агрегатов. При этом величины аппроксимирующих элементов измеряются, вообще говоря, в метрике, отличающейся от той, в которой ведется аппроксимация. Наиболее полное изложение этих вопросов имеется в [4] и ([5], § 2). В [6] эта теория распространена на случай, когда приближение должно происходить с наперед заданной скоростью; здесь в расчет принимались величины именно тех аппроксимирующих элементов, которые осуществляют приближение с заданной скоростью. Во всех этих работах аппроксимация велась элементами какого-то линейного подпространства. Указанная теория имела достаточно многообразные приложения и, в частности, оказалась полезной при изучении важного для теории аналитических функций понятия аналитической емкости множеств и различных модификаций этого понятия. Эти вопросы подробно разбираются в [5], где имеется обширная библиография. Другие применения указанной теории изложены в [4], там также даны подробные библиографические ссылки. В данной статье теория аппроксимации, с учетом величин аппроксимирующих элементов, распространяется на случай, когда аппроксимация ведется элементами некоторого выделенного в пространстве клина, а не подпространства, как это делалось прежде.

Стимулом к рассмотрению подобных задач служит возможность изучить на их основе новые полезные модификации понятия аналитической емкости. Эти модификации будут подробно изложены в другой нашей работе, отправным пунктом которой явятся соотношения § 4 данной статьи.

1. Теорема двойственности Гаркави в случае выпуклого, но не обязательно симметричного функционала

Рассмотрим вещественное линейное пространство X, и пусть X' — пространство всех линейных функционалов над X. В X задан выпуклый неотрицательный функционал $r(x)$, $r(x) \geq 0$ (функционал $r(x)$ выпуклый, если $\forall x_1, x_2 \;\; r(x_1+x_2) \leq r(x_1)+r(x_2)$ и $\forall \alpha \;\; r(\alpha x) = \alpha r(x)$). Задано также выпуклое множество $E \subset X$, и для некоторого элемента $\omega \in X$ рассматривается задача наилучшего приближения

$$\inf_{x \in E} r(\omega - x). \tag{1.1}$$

В случае, если X — нормированное пространство, а $r(x)$ — норма в X, то задача (1.1) есть обычная задача наилучшего приближения. В данном случае она осложнена тем, что $r(x)$ не предполагается симметричным, т.е., вообще говоря, $r(-x) \neq r(x)$. Наша ближайшая цель —

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00608.

вывести двойственные выражения для (1.1). В случае, когда E — линейное подпространство нормированного пространства X, а $r(x)$ — норма в X, двойственные соотношения были выведены в хорошо известных классических работах М.Г. Крейна [7] и С.М. Никольского [8]. В работе А.Л. Гаркави [9] эти соотношения были обобщены на случай, когда E — выпуклое множество в нормированном пространстве X. В [5] рассмотрена задача (1.1), когда E — линейное подпространство, а $r(x)$, как и сейчас, — выпуклый функционал (симметричность $r(x)$ не предполагается). Наша ближайшая цель — распространить теорему Гаркави на задачу (1.1). Изложение будет вестись по плану ([10], § 3), где излагалась теорема Гаркави, и будет использовать некоторые понятия из ([5], § 2). Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} R(r,M)=\{l\in X',\ l(x)\le Mr(x)\ \forall x\in X\},\quad M\ge 0 \text{ — константа,}\\ R(r)=\bigcup_M R(r,M),\quad \|l\|=\inf M : l\in R(r,M),\quad l\in R(r). \end{gathered} \tag{1.2}$$

Лемма 1.1. *Пусть $l\in R(r)$ и в X задана гиперплоскость*

$$\pi=\{x\in X : l(x)=1\}. \tag{1.3}$$

Тогда

$$\inf_{x\in\pi} r(x)=\frac{1}{\|l\|}. \tag{1.4}$$

Доказательство. Имеем $1=l(x)\le\|l\|r(x)\quad\forall x\in\pi$ и, значит,

$$\inf_{x\in\pi} r(x)\ge\frac{1}{\|l\|}. \tag{1.5}$$

В силу определения $\|l\|\ \ \forall\varepsilon>0$ найдется элемент y_ε, для которого

$$l(y_\varepsilon)\ge(\|l\|-\varepsilon)r(y_\varepsilon). \tag{1.6}$$

Не может быть, что для всех y, для которых имеет место (1.6), $l(y)=0$, т. к. тогда должно быть $r(y)=0$ и, следовательно, для всех $x\in X$ будет выполняться неравенство, противоположное (1.6), что противоречило бы определению $\|l\|$. Итак, можно считать, что $l(y_\varepsilon)>0$, тогда $x_\varepsilon=\frac{y_\varepsilon}{l(y_\varepsilon)}\in\pi$ и

$$r(x_\varepsilon)=\frac{r(y_\varepsilon)}{l(y_\varepsilon)}\le\frac{l(y_\varepsilon)}{(\|l\|-\varepsilon)l(y_\varepsilon)}=\frac{1}{\|l\|-\varepsilon}. \tag{1.7}$$

Сопоставление (1.5) и (1.7) дает (1.4). $\square$

Теорема 1.1 (обобщенная теорема двойственности Гаркави). *Пусть $E\subset X$ — выпуклое множество, $\omega\in X$ — произвольный элемент и d — нижняя грань в* (1.1). *Определим следующие множества линейных функционалов*:

$$\begin{aligned} E_0^*(\omega)&=\{l\in R(r,1) : \inf_{x\in E} l(\omega-x)\ge 0\},\\ E^*(\omega)&=\{l\in R(r) : \inf_{x\in E} l(\omega-x)\ge 1\},\\ E_1^*(\omega)&=\{l\in R(r) : \inf_{x\in E} l(\omega-x)=1\}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Всегда

$$d=\max_{l\in E_0^*(\omega)}\inf_{x\in E} l(\omega-x). \tag{1.9}$$

Если же $d>0$, то

$$d=\max_{l\in E^*(\omega)}\left(\frac{1}{\|l\|}\right)=\max_{l\in E_1^*(\omega)}\left(\frac{1}{\|l\|}\right). \tag{1.10}$$

Обозначение $\max$ *вместо* $\sup$ *в* (1.9) *и* (1.10) *означает существование экстремальных функционалов* l *в этих соотношениях.*

Доказательство. Рассмотрим ситуацию, когда $d > 0$. Построим (открытый) "шар" $S(\omega, d)$ с центром в ω и радиусом d

$$S(\omega, d) = \{x \in X : r(\omega - x) < d\}. \tag{1.11}$$

Легко проверяется, что ω является C-внутренней точкой $S(\omega, d)$ (см. [11], с. 445). Поскольку выпуклое множество S обладает C-внутренней точкой и не пересекается с выпуклым множеством E, то эти два множества можно разделить гиперплоскостью π ([11], с. 446; см. также [12]). Таким образом, $\exists L \in X'$ такой, что

$$\pi = \{x : L(x) = \text{const} = C\}, \quad L(x) \geq C : x \in S(\omega, d), \quad L(x) \leq C : x \in E. \tag{1.12}$$

На самом деле для $x \in S$ имеет место строгое неравенство

$$L(x) > C : x \in S = S(\omega, d). \tag{1.13}$$

Действительно, допустим, что для $x_0 \in S$ будет $L(x_0) = C$. Поскольку $L \not\equiv 0$, то $\exists y_0 \in X$ такой, что $L(y_0) < 0$. При достаточно малом $t > 0$ элемент $x_0 + ty_0 \in S$, т.к. $r(\omega - (x_0 + ty_0)) \leq r(\omega - x_0) + tr(-y_0) < d$. Однако $L(x_0 + ty_0) = L(x_0) + tL(y_0) < C$, поскольку $tL(y_0) < 0$. Но этого не может быть для точки из S в силу условия разделения (1.12). В частности, $L(\omega) > C$ и для $x \in S$ имеем

$$L(\omega - x) = L(\omega) - L(x) < L(\omega) - C = C_1, \quad C_1 > 0. \tag{1.14}$$

Положим $y = \omega - x$, тогда из (1.14) получим

$$r(y) < d \implies L(y) < C_1. \tag{1.15}$$

Но $\forall y \in X$ и $\forall \varepsilon > 0$ вектор $\frac{dy}{r(y)+\varepsilon}$ удовлетворяет условию $r\left(\frac{dy}{r(y)+\varepsilon}\right) < d$ и, значит, $L\left(\frac{dy}{r(y)+\varepsilon}\right) < C_1$, $L(y) < \frac{C_1}{d}(r(y) + \varepsilon)$. Наконец, $\forall y \in X$

$$L(y) \leq \frac{C_1}{d} r(y). \tag{1.16}$$

Таким образом, $L \in R(r, \frac{C_1}{d}) \subset R(r)$. Перепишем (см. (1.14)) уравнение гиперплоскости π (1.12)

$$L(\omega - x) = C_1 > 0 : x \in \pi \tag{1.17}$$

и положим $l_0 = \frac{L}{C_1}$. Тогда имеем

$$\pi : l_0(\omega - x) = 1. \tag{1.18}$$

Для ω получим $l_0(\omega - \omega) = 0 < 1$, а для $x \in E$ (E лежит по другую сторону от π, чем ω) будет

$$l_0(\omega - x) \geq 1. \tag{1.19}$$

В силу (1.19) $l_0 \in E^*(\omega)$. Для любого $l \in E^*(\omega)$ и $\forall x \in E$ имеем

$$1 \leq l(\omega - x) \leq \|l\| r(\omega - x) \implies d = \inf_{x \in E} r(\omega - x) \geq \frac{1}{\|l\|}.$$

Таким образом,

$$d \geq \sup_{l \in E^*(\omega)} \left(\frac{1}{\|l\|}\right) \geq \frac{1}{\|l_0\|} = \inf_{x \in \pi} r(\omega - x). \tag{1.20}$$

Последнее равенство в (1.20) выполняется в силу уравнения (1.18) и леммы 1.1. Покажем, что $\inf$ в (1.20) есть d. Если бы $\inf\limits_{x\in\pi} r(\omega - x) < d$, то $\exists x^* \in \pi$ такой, что $r(\omega - x^*) < d$ (и, значит, $x^* \in S$). Но тогда в силу (1.15) и определения l_0 будет

$$l_0(\omega - x^*) = \frac{1}{C_1} L(\omega - x^*) < \frac{1}{C_1} \cdot C_1 = 1,$$

чего не может быть, т. к. $x^* \in \pi$, а там выполняется (1.18). Мы доказали первое из равенств (1.10). Чтобы доказать второе, заметим прежде всего, что т. к. $E_1^*(\omega) \subset E^*(\omega)$, то второй из $\max$ в (1.10) не больше первого. С другой стороны, если $\inf\limits_{x\in E} l(\omega - x) = p > 1$ для $l \in E^*(\omega)$, то $l_1 = \frac{l}{p} \in E_1^*(\omega)$ и $\|l_1\| = \frac{\|l\|}{p} < \|l\|$, следовательно, второй $\max$ в (1.10) не меньше первого. Соотношение (1.10) доказано полностью. Если теперь $l \in E_1^*(\omega)$, то $\lambda = \frac{l}{\|l\|} \in E_0^*(\omega)$ и $\inf\limits_{x\in E} \lambda(\omega - x) = \frac{1}{\|l\|}$. Поэтому

$$\max_{\lambda \in E_0^*(\omega)} \inf_{x\in E} \lambda(\omega - x) \geq \max_{l\in E_1^*(\omega)} \left(\frac{1}{\|l\|}\right) = d. \tag{1.21}$$

Наоборот, пусть $\lambda \in E_0^*(\omega)$ и $m(\lambda) = \inf\limits_{x\in E} \lambda(\omega - x)$. В силу (1.21) и предположения $d > 0$, при котором пока ведется рассуждение, можно считать, что $m(\lambda) > 0$ (строгое неравенство). Тогда $l = \frac{\lambda}{m(\lambda)} \in E_1^*(\omega)$. Так как $\lambda \in R(r,1)$, то $\|\lambda\| \leq 1$, и поэтому $\frac{1}{\|l\|} \geq m(\lambda)$. Следовательно,

$$\max_{\lambda \in E_0^*(\omega)} \inf_{x\in E} \lambda(\omega - x) \leq \max_{l\in E_1^*(\omega)} \left(\frac{1}{\|l\|}\right) = d. \tag{1.22}$$

Из (1.21) и (1.22) следует (1.9) пока в предположении $d > 0$. Если $d = 0$, то из неравенства

$$l(\omega - x) \leq r(\omega - x) : l \in R(r,1), \quad x \in E, \tag{1.23}$$

следует

$$\max_{l \in E_0^*(\omega)} \inf_{x\in E} l(\omega - x) \leq \inf_{x\in E} r(\omega - x) = 0. \tag{1.24}$$

При $l \equiv 0$ теперь в (1.24) реализуется равенство. □

2. Специальные случаи. Аппроксимация элементами клина

Пусть в задаче предыдущего параграфа множество E — клин. (Напомним, что выпуклое множество E называется клином, если $\alpha E \subset E$ $\forall \alpha \geq 0$. Конусом называется такой клин E, что из включений $x \in E$ и $-x \in E$ следует, что x — нулевой элемент пространства [13].) Рассмотрим следующие множества линейных функционалов:

$$\begin{aligned} E^+ &= \{l \in X' : l(x) \geq 0,\ x \in E\}, \\ E^- &= \{l \in X' : l(x) \leq 0,\ x \in E\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *Пусть E — клин в вещественном линейном пространстве X. Имеет место соотношение двойственности $\forall \omega \in X$*

$$d = \inf_{x\in E} r(\omega - x) = \max_{l \in R(r,1)\cap E^-} l(\omega). \tag{2.2}$$

Если $d > 0$, то

$$d = \max \frac{1}{\|l\|} : l \in R(r) \cap E^- \quad и \quad l(\omega) = 1. \tag{2.3}$$

В случае, когда E — линейное подпространство в X, в формулах (2.2) и (2.3) надо E^- заменить на $E^\perp$ — аннулятор E.

Доказательство. Если $\inf\limits_{x\in E} l(\omega - x) \geq 0$, то $l(x) \leq l(\omega)$, $x \in E$. Но поскольку E — клин, это возможно, как легко видеть, лишь тогда, когда $l \in E^-$. В этом случае

$$\inf_{x\in E} l(\omega - x) = \inf_{x\in E}[l(\omega) - l(x)] = l(\omega) \tag{2.4}$$

достигается при $x = 0$. Значит, $E_0^*(\omega) = R(r,1) \cap E^-$, а $E_1^*(\omega) = R(r) \cap E^-$ и $l \in E_1^*(\omega)$ удовлетворяет в силу (2.4) дополнительно условию $l(\omega) = 1$. Поэтому (1.9) теперь обращается в (2.2), а (1.10) в (2.3). В случае, когда клин E является линейным подпространством, ясно, что $E^- = E^\perp$. $\square$

В случае, когда $r(x)$ — норма в X, а E — линейное подпространство, соотношения (2.2) и (2.3), где вместо E^- фигурирует $E^\perp$, — классические соотношения двойственности теории наилучших приближений соответственно в форме С.М. Никольского [8] и М.Г. Крейна [7]. Задачу наилучшего приближения в нормированном пространстве элементами конуса возможно первым рассмотрел Г. Години [14]. Ряд связанных с этим вопросом результатов имеется у В.А. Каминского [15], [16]. Близкие задачи аппроксимации с дополнительными условиями на коэффициенты приближающих агрегатов рассматривались в ряде работ Е.Г. Гольштейна, подытоженных в его монографии [17].

Рассмотрим теперь интерпретацию задачи наилучшего приближения, когда измеряющий выпуклый функционал $r(x)$ связан с некоторым конусом K. Полученные соотношения явятся обобщением соотношений (2.38)–(2.39) статьи [5], в которых E было подпространством (сейчас E — клин).

Лемма 2.1. *Пусть K — конус в вещественном линейном пространстве X, содержащий C-внутреннюю точку x_0. Положим*

$$K_0 = K - x_0, \tag{2.5}$$

и пусть $r_0(x)$ — функционал Минковского (опорный функционал) для K_0. Тогда $r_0(x)$ — неотрицательный выпуклый функционал в X, причем

$$r_0(x) = 0 : x \in K, \quad r_0(-x_0) = 1. \tag{2.6}$$

Доказательство. Напомним, что по определению опорного функционала

$$r_0(x) = \inf t : t > 0, \quad x \in tK_0. \tag{2.7}$$

Поскольку $tK_0 = t(K - x_0) = K - tx_0$, то (2.7) можно переписать в виде

$$r_0(x) = \inf t : t > 0, \quad x + tx_0 \in K. \tag{2.8}$$

Выпуклость и неотрицательность $r_0(x)$ доказаны в лемме из ([11], с. 445). Если $x \in K$, то $x + tx_0 \in K \quad \forall t > 0$. Поэтому для $x \in K \quad r_0(x) = 0$. Далее, $-x_0 + 1 \cdot x_0 = 0 \in K$, но при $0 < t < 1$ $-x_0(1-t) \notin K$, поскольку $x_0(1-t) \in K$. Следовательно, согласно (2.8) $1 = \inf t : t > 0$, $-x_0 + tx_0 \in K$, т. е. $r_0(-x_0) = 1$. $\square$

Для дальнейших приложений нам удобнее вместо функционала $r_0(x)$ использовать его двойник

$$r(x) = r_0(-x). \tag{2.9}$$

Лемма 2.2. *В условиях предыдущей леммы*

$$K^+ = R(r), \quad R(r, M) = \{l : l \in K^+, \ l(x_0) \leq M\}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Пусть $l \in K^+$ и $\varepsilon > 0$ произвольно. В силу определений (2.7), (2.8) функционала $r_0(x)$ $\forall x$

$$x + (r_0(x) + \varepsilon)x_0 \in K$$

и, следовательно, $l(x) + (r_0(x) + \varepsilon)l(x_0) \geq 0$. В силу произвольности ε отсюда получим

$$l(x) \geq -l(x_0)r_0(x), \quad l(-x) \geq -l(x_0)r_0(-x) = -l(x_0)r(x), \quad l(x) \leq l(x_0)r(x). \tag{2.11}$$

Последняя оценка означает, что

$$l \in R(r, l(x_0)) \subset R(r). \tag{2.12}$$

Пусть, наоборот, $l \in R(r)$, т. е. $l \in R(r, M)$ с некоторым $M \geq 0$. Для $x \in K$ в силу (2.6) $r_0(x) = 0$ и тогда

$$l(x) \leq Mr(x), \quad -l(x) = l(-x) \leq Mr(-x) = Mr_0(x) = 0,$$

т. е. $l(x) \geq 0$ и $l \in K^+$. Доказано первое из соотношений (2.10). Докажем второе. Если $l \in R(r, M)$, то по уже доказанному $l \in K^+$ и

$$l(x_0) \leq Mr(x_0) = Mr_0(-x_0) = M.$$

Если же $l \in K^+$ и $l(x_0) \leq M$, то из (2.11) следует, что $l \in R(r, M)$. $\square$

Теорема 2.2. *Пусть в вещественном линейном пространстве X заданы конус K и клин E, причем конус K имеет C-внутреннюю точку x_0. Пусть ω — произвольный элемент X. Положим*

$$d = \inf_{x \in E} \inf t : t > 0, \quad -\omega + x + tx_0 \in K. \tag{2.13}$$

Тогда

$$d = \max l(\omega) : l \in K^+ \cap E^-, \quad l(x_0) \leq 1. \tag{2.14}$$

Если E — линейное подпространство в X, то в (2.14) надо E^- заменить на $E^\perp$.

Доказательство. Вспомним формулы (2.7), (2.8) для опорного функционала $r_0(x)$ конуса $K - x_0$ и определение (2.9) функционала $r(x)$. Тогда видно, что в (2.13)

$$d = \inf_{x \in E} r_0(-\omega + x) = \inf_{x \in E} r(\omega - x). \tag{2.15}$$

Согласно формуле (2.2) нижняя грань в (2.15) равна $\max l(\omega) : l \in R(r, 1) \cap E^-$. Но из (2.10) следует

$$R(r, 1) = \{l : l \in K^+, \ l(x_0) \leq 1\}.$$

Собирая вместе всю эту информацию, приходим к (2.14). $\square$

Отметим, что задача приближения произвольного элемента ω элементами клина (или подпространства) E получила здесь новую интерпретацию, став задачей об оптимальном "загонянии" элемента $-\omega$ в конус K с помощью сдвигов на $x + tx_0$ — надо так распорядиться элементами $x \in E$, чтобы элемент $-\omega + x + tx_0$, $t > 0$, попадал в конус при как можно меньшей добавке tx_0. Впервые подобная задача по-видимому была рассмотрена в ([5], § 2), где E было подпространством.

3. Усложненная задача аппроксимации элементами клина: учет величин аппроксимирующих элементов

Пусть снова X — вещественное линейное пространство, Y — линейное подпространство в X, $r(x) \geq 0$ — выпуклый функционал в X, $p(y) \geq 0$ — выпуклый функционал в Y и, наконец, $E \subset Y$ — клин. Классы линейных функционалов l из $R(r, M)$ и $R(r)$ определены формулами (1.2), а классы линейных функционалов λ из Y' определим аналогичными формулами

$$R(p, M) = \{\lambda \in Y' : \lambda(y) \leq Mp(y)\ \forall y \in Y,\ M \geq 0\},$$
$$R(p) = \bigcup_{M} R(p, M). \tag{3.1}$$

Рассмотрим задачу аппроксимации $\forall \omega \in X$ в метрике, определяемой функционалом r, элементами клина E, но при этом будем учитывать и рост аппроксимирующих элементов $y \in E$ с помощью $p(y)$. Говоря конкретно, рассматривается задача

$$d = \inf_{y \in E}[r(\omega - y) + p(y)]. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1 (двойственность в задаче (3.2)). *Имеет место*

$$d = \max l(\omega), \tag{3.3}$$

где max *берется по таким линейным функционалам $l \in R(r, 1)$, для которых можно найти функционал $\lambda \in R(p, 1)$ такой, что $l - \lambda \in E^-$. Если $E = Y$ — линейное подпространство в X, то* max *в* (3.3) *следует брать по линейным функционалам $l \in R(r, 1) \cap R(p, 1)$.*

Доказательство. Рассмотрим линейное пространство $Z = X \times Y$. Элементами Z являются всевозможные пары $z = (x, y) : x \in X,\ y \in Y$. Двойственное пространство Z' состоит из пар $\Lambda = (l, \lambda)$: $l \in X'$, $\lambda \in Y'$, действующих на элементы пространства Z по правилу

$$\Lambda(z) = \Lambda((x, y)) = l(x) + \lambda(y). \tag{3.4}$$

В пространстве Z определим выпуклый функционал $q(z)$

$$q(z) = q((x, y)) = r(x) + p(y). \tag{3.5}$$

С помощью q выделим в Z' совокупности линейных функционалов $R(q, M)$ и $R(q)$ формулами, аналогичными (1.2) и (3.1). Нетрудно видеть, что

$$\Lambda = (l, \lambda) \in R(q, M) \iff l \in R(r, M), \quad \lambda \in R(p, M). \tag{3.6}$$

Множество

$$\mathcal{E} = \{(y, -y)\}\ \forall y \in E \tag{3.7}$$

является клином в Z. Наконец, рассмотрим в Z элемент $\Omega = (\omega, 0)$ и его аппроксимацию относительно выпуклого функционала q элементами клина $\mathcal{E}$

$$\inf_{z \in \mathcal{E}} q(\Omega - z) = \inf_{y \in E}[r(\omega - y) + p(y)]. \tag{3.8}$$

Таким образом, имеем дело с интересующей нас задачей (3.2). Согласно (2.2) получим

$$\inf_{z \in \mathcal{E}} q(\Omega - z) = \max_{\Lambda \in R(q,1) \cap \mathcal{E}^-} \Lambda(\Omega). \tag{3.9}$$

Что означает включение $\Lambda = (l, \lambda) \in \mathcal{E}^-$? Для $y \in E$ должно быть $\Lambda(y, -y) = l(y) + \lambda(-y) = l(y) - \lambda(y) \leq 0$. Таким образом, для $l \in X'$ должен найтись такой функционал $\lambda \in Y'$, что

$$l - \lambda \in E^-. \tag{3.10}$$

Вспоминая (3.6), (3.4) и устройство $\Omega = (\omega, 0)$, получим из (3.9) и (3.10) соотношение (3.3) с перечисленными в теореме 3.1 свойствами перебираемых функционалов l. Если теперь клин

$E = Y$ — линейное подпространство в X, то $\mathcal{E}$ — линейное подпространство в Z, и в (3.9) $\mathcal{E}^-$ заменяется на $\mathcal{E}^\perp$. Вместо (3.10) получим

$$l - \lambda \in E^\perp, \tag{3.11}$$

т. е. l, рассматриваемый только на E (сужение l на E), входит в $R(p,1) : l \in R(r,1) \cap R(p,1)$. $\square$

Положим в предположениях теоремы 3.1 $\forall \omega \in X$

$$\widetilde{p}(\omega) = \inf \varliminf_{k\to\infty} p(y_k), \tag{3.12}$$

где inf в (3.12) берется по всем таким последовательностям $\{y_k\} \subset E$, что

$$r(\omega - y_k) \to 0, \quad k \to \infty. \tag{3.13}$$

Если последовательностей $\{y_k\} \subset E$, аппроксимирующих ω как в (3.13), вообще нет, то полагаем

$$\widetilde{p}(\omega) = \infty. \tag{3.14}$$

Конечно, может случиться, что и при наличии последовательностей, аппроксимирующих ω как в (3.13), все-таки $\widetilde{p}(\omega) = \infty$. Если $\widetilde{p}(\omega) < \infty$, то будем иногда говорить, что элемент ω является $O(r,p)$-аппроксимируемым клином E, а если $\widetilde{p}(\omega) = 0$, то $o(r,p)$-аппроксимируемым E.

Введем еще следующие множества линейных функционалов $l \in X'$:

$$R(M)\ (M \geq 0) : l \in R(M) \iff l \in R(r,M) \ \text{ и } \ \exists \lambda \in R(p,1) : l - \lambda \in E^-, \tag{3.15}$$

$$R = \bigcup_M R(M) : l \in R \iff \exists M \geq 0 : l \in R(r,M) \ \text{ и } \ \exists \lambda \in R(p,1) : l - \lambda \in E^-. \tag{3.16}$$

В случае, когда $E = Y$ — линейное подпространство в X, определения $R(M)$ и R упрощаются и имеют вид

$$R(M) = R(r,M) \cap R(p,1), \quad R = R(r) \cap R(p,1). \tag{3.17}$$

Теорема 3.2. *Справедливо равенство*

$$\widetilde{p}(\omega) = \sup_{l\in R} l(\omega). \tag{3.18}$$

Доказательство. Согласно теореме 3.1 $\forall M > 0$ имеем

$$\inf_{y\in E}[Mr(\omega - y) + p(y)] = \max_{l\in R(M)} l(\omega). \tag{3.19}$$

(Вместо функционала $r(x)$ необходимо рассмотреть функционал $Mr(x)$.) Предположим сначала, что $\widetilde{p}(\omega) < \infty$. Если $l \in R$, то $\exists M > 0$ такое, что $l \in R(M)$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in E$ такой, что

$$r(\omega - y) < \frac{\varepsilon}{M}, \quad p(y) < \widetilde{p}(\omega) + \varepsilon. \tag{3.20}$$

Для взятого $l \in R$ получим

$$\begin{aligned} l(\omega) = l(\omega - y) + l(y) = l(\omega - y) + \lambda(y) + (l - \lambda)(y) \leq \\ \leq l(\omega - y) + \lambda(y) \leq Mr(\omega - y) + p(y) < \widetilde{p}(\omega) + 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.21}$$

В (3.21) λ — такой функционал из $R(p,1)$, что $l - \lambda \in E^-$ (и поэтому $(l-\lambda)(y) \leq 0$). Существование такого λ вытекает из определения $R(M)$ ((3.15) или (3.17)). Из (3.21) следует, что правая часть в (3.18) не более левой. Если $\widetilde{p}(\omega) = 0$, то (3.18) уже доказано, т. к. $l \equiv 0 \in R$ (в этом случае в качестве λ можно взять $\lambda \equiv 0$). Пусть теперь $0 < \widetilde{p}(\omega) < \infty$. Допустим, что правая часть в (3.18) строго меньше левой

$$\sup_{l\in R} l(\omega) \leq \widetilde{p}(\omega) - \varepsilon_0 = A, \quad \varepsilon_0 > 0. \tag{3.22}$$

Тогда тем более при любом фиксированном $M > 0$ согласно (3.19) получим

$$\inf_{y\in E}[Mr(\omega - y) + p(y)] = \max_{l\in R(M)} l(\omega) \le A. \tag{3.23}$$

Возьмем ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2$, а $M > 0$ столь большим, что во всяком случае $(A+\varepsilon)M^{-1} < \varepsilon$. Из (3.23) следует, что $\exists y \in E$ такой, что

$$r(\omega - y) < \varepsilon, \quad p(y) \le A + \varepsilon = \widetilde{p}(\omega) - \varepsilon_0 + \varepsilon < \widetilde{p}(\omega) - \varepsilon_0/2. \tag{3.24}$$

Из соотношений (3.24) получим противоречие

$$\widetilde{p}(\omega) \le \widetilde{p}(\omega) - \varepsilon_0/2.$$

Итак, соотношение (3.18) в случае, когда $\widetilde{p}(\omega) < \infty$, доказано. Пусть $\widetilde{p}(\omega) = \infty$ и допустим, что

$$\sup_{\operatorname{lin} R} l(\omega) = A < +\infty. \tag{3.25}$$

Тогда из (3.19) тем более получим $\forall M > 0 \quad \inf\limits_{y\in E}[Mr(\omega - y) + p(y)] \le A$ и, значит, существует элемент $y_M \in E$, для которого

$$Mr(\omega - y_M) + p(y_M) \le A + 1.$$

Отсюда имеем

$$r(\omega - y_M) \le (A+1)M^{-1}, \quad p(y_M) \le A + 1. \tag{3.26}$$

При $M \to \infty$ из (3.26) получим, что $r(\omega - y_M) \to 0$, $p(y_M) \le A+1$ и, следовательно, $\widetilde{p}(\omega) \le A+1$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Пусть в пространстве X задан конус K, содержащий C-внутреннюю точку x_0 и $r(x)$ определен как в (2.9) через опорный функционал $r_0(x)$ сдвинутого конуса $K - x_0$. В этом случае $\widetilde{p}(\omega)$ определяется формулой (3.12), где inf берется по всем таким последовательностям $\{y_k\} \subset E$, для которых существуют последовательности $\{t_k\}$ положительных чисел $t_k > 0$ и $t_k \to 0$ такие, что

$$-\omega + y_k + t_k x_0 \in K, \quad t_k > 0, \quad t_k \to 0. \tag{3.27}$$

В этой ситуации множества линейных функционалов (3.15) и (3.16) определяются в виде

$$R_M \ (M \ge 0) : l \in R(M) \iff l \in K^+, \ \ l(x_0) \le M \ \text{ и } \ \exists \lambda \in R(p,1) \ \text{ такой, что } \ l - \lambda \in E^-, \tag{3.28}$$

$$R : l \in R \iff l \in K^+ \ \text{ и } \ \exists \lambda \in R(p,1) \ \text{ такой, что } \ l - \lambda \in E^-. \tag{3.29}$$

В случае, когда $E = Y$ — линейное подпространство, формулы (3.28) и (3.29) запишутся в виде

$$\begin{aligned} R(M) : l \in R(M) &\iff l \in K^+ \cap R(p,1), \quad l(x_0) \le M, \\ R : l \in R &\iff l \in K^+ \cap R(p,1). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Следствие. Пусть $\widetilde{p}(\omega)$ определяется формулой (3.12), где теперь inf берется по таким последовательностям $\{y_k\} \subset E$, для которых имеет место (3.27) (или $\widetilde{p}(\omega) = \infty$, если таких последовательностей нет). Утверждение (3.18) теоремы (3.2) сохраняет силу, если R расшифровывается как (3.28), (3.29) или как (3.30) в случае, если $E = Y$ — подпространство.

4. Аппроксимация элементами клина, состоящего из функций, аналитических на некотором компакте

В этом параграфе общие рассмотрения §§ 2, 3 применяются к некоторым вопросам аппроксимации аналитическими или рациональными функциями с учетом величин аппроксимирующих функций. Эти аппроксимационные процессы двойственно характеризуются экстремальными величинами некоторых линейных функционалов. Подобные экстремальные величины можно рассматривать как некоторые модификации понятия аналитической емкости множеств.

Поскольку пространства, с которыми мы будем иметь дело, будут, как правило, состоять из комплекснозначных функций, а развитый в предыдущих параграфах метод относится к вещественным линейным пространствам, то комплексное линейное пространство X часто придется рассматривать как вещественное линейное пространство, которое будем обозначать X_R; таким образом, X и X_R состоят из одних и тех же элементов, но в X линейные операции — комплексные, а в X_R только вещественные. Сопряженное пространство к какому-то линейному топологическому пространству (л. т. п.) X' будет обозначаться X^* (в отличие от пространства X', состоящего из всех линейных функционалов над X без требования непрерывности этих функционалов). Следующая более чем элементарная лемма прямо вытекает из рассуждений, обычно применяемых при распространении теоремы Хана–Банаха с вещественного случая на комплексный.

Лемма 4.1. *Пусть X — л. т. п. (комплексное). Тогда*

$$X_R^* = \{l : \exists L \in X^*,\ l = \operatorname{Re} L\}. \tag{4.1}$$

Для формулировки последующих утверждений нам потребуется ввести ряд обозначений: $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}}$ — расширенная комплексная плоскость, G — произвольная область в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащая ∞, $F = \overline{\mathbb{C}} \setminus G$, $C(F)$ — пространство непрерывных на F комплекснозначных функций $x(\zeta)$, $\zeta \in F$, с обычной равномерной нормой

$$\|x\| = \max_{\zeta \in F} |x(\zeta)|. \tag{4.2}$$

В $C(F)$ выделяются два подпространства: Y, состоящее из всех аналитических на F функций, и Y^1, состоящее из рациональных функций вида

$$y(\zeta) = \sum_1^n \frac{\lambda_j}{a_j - \zeta} \quad \forall n,\ \forall a_j \in G,\ \ \forall \lambda_j,\ \ j = 1, \dots, n. \tag{4.3}$$

Преобразование Коши меры μ обозначим через

$$\widetilde{\mu}(z) = \int_{S_\mu} \frac{d\mu_t}{t - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus S_\mu, \tag{4.4}$$

S_μ — замкнутый носитель меры μ, $\|\mu\|$ — полная вариация μ. Рассматриваемые далее меры всегда борелевские, регулярные, конечные ($\|\mu\| < +\infty$). В Y, кроме нормы (4.2), определена также преднорма

$$p(y) = \inf \|\mu\|, \tag{4.5}$$

где нижняя грань взята по всем мерам μ, $S_\mu \subset G$, для которых

$$\widetilde{\mu}(\zeta) = y(\zeta), \quad \zeta \in F. \tag{4.6}$$

В Y^1 определены норма (4.2) и норма

$$p_1(y) = \sum_1^n |\lambda_j| \tag{4.7}$$

для $y(\zeta)$ вида (4.3). Если F состоит из бесконечного числа точек (что на самом деле только и стоит предполагать), то норма $p_1(y)$ определена корректно. Если $f(z)$ — какая-то аналитическая в G функция, то она определяет на Y линейный функционал

$$\Lambda_f(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}} f(z)y(z)dz, \tag{4.8}$$

где $\mathcal{D}$ — окрестность F, обладающая спрямляемой границей такая, что функция $y(\zeta)$ еще аналитична в замыкании $\overline{\mathcal{D}}$. (Для каждой $y \in Y$ окрестность $\mathcal{D}$, вообще говоря, своя.) Преднорма $p(y)$ превращает Y в л. т. п. (Y, p). Важная теорема В.П. Хавина ([18], [19], теорема 1; см. также [20], теорема 4.5) утверждает, что пространство $(Y,p)^*$ описывается функционалами вида (4.8), в которых $f(z)$ — ограниченная в G функция, причем

$$\|\Lambda_f\| = \sup_{z\in G}|f(z)|. \tag{4.9}$$

В комплексной плоскости (w), в которой будут помещаться значения рассматриваемых далее функций, выделим некоторый угол Δ с вершиной в $w = 0$, причем либо

$$\text{раствор } \Delta \le \pi, \text{ либо } \Delta \text{ — вся плоскость } (w). \tag{4.10}$$

В случае, когда Δ не совпадает со всей плоскостью, стороны угла к области Δ не относятся (открытый угол). Определим в Y (в Y^1) множества

$$\begin{aligned} E_\Delta &= \{y \in Y : y(\zeta) \subset \Delta \ \ \forall \zeta \in F\} \cup \mathbf{0}, \\ E^1_\Delta &= \{y \in Y^1 : y(\zeta) \subset \Delta \ \ \forall \zeta \in F\} \cup \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Здесь под $\mathbf{0}$ понимается нулевой элемент пространства Y или Y^1, т. е. функция $y(\zeta) \equiv 0$, $\zeta \in F$. Очевидна

Лемма 4.2. *Если Δ не совпадает со всей плоскостью, то E_Δ и E^1_Δ — конусы. Если Δ совпадает со всей плоскостью, то $E_\Delta = Y$, $E^1_\Delta = Y^1$.*

Пусть X — банахово пространство комплекснозначных функций, заданных на F, причем

$$\begin{gathered} X \supset C(F);\ C(F) \text{ всюду плотно в } X; \\ \text{если последовательность } \{x_n\} \subset C(F) \text{ сходится к } x_0 \in C(F) \text{ в } C(F), \\ \text{то } \{x_n\} \text{ сходится к } x_0 \text{ в } X. \end{gathered} \tag{4.12}$$

Примерами пространств X со свойствами (4.12) могут служить само пространство $C(F)$, а также пространства $L^\delta(F,\nu)$, где $\nu \ge 0$ — заданная мера, $\delta \ge 1$, а элементами служат суммируемые в степени δ по мере ν функции с обычным определением нормы в пространствах интегрируемых функций.

Лемма 4.3. *Пусть пространство X удовлетворяет требованиям* (4.12) *и $l \in X^*$. Тогда функция*

$$\Phi_l(z) = l_\zeta\left(\frac{1}{z-\zeta}\right), \quad z \in G, \tag{4.13}$$

аналитична в G и для $y \in Y$ имеем

$$l(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}} \Phi_l(z)y(z)dz. \tag{4.14}$$

(Окрестность $\mathcal{D}$ такая же, как в (4.8).)

Доказательство. Аналитичность $\Phi_l(z)$ сразу следует из предположений (4.12) относительно X за счет непрерывности функционала l. Докажем (4.14). Выберем на $\partial\mathcal{D}$ точки $z_1, \ldots, z_n$ так, что $\max|\Delta z_k| \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \Phi_l(z_k) y(z_k) \Delta z_k \;\to\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{D}} \Phi_l(z) y(z) dz.$$

Но

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \Phi_l(z_k) y(z_k) \Delta z_k = l\left(\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k - \zeta} y(z_k) \Delta z_k\right) \;\to\; l\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{y(z)dz}{z-\zeta}\right) = l(y, (\zeta))$$

и (4.14) установлено. (Мы снова воспользовались непрерывностью l и предположениями (4.12).) □

Пусть, наконец, в пространстве X, удовлетворяющем требованиям (4.12), задан выпуклый неотрицательный непрерывный функционал $r(x)$. Будем аппроксимировать произвольный элемент $\omega \in X$ элементами конусов E_Δ или E_Δ^1 относительно расстояния, измеряемого функционалом r, и учитывая величины аппроксимирующих элементов с помощью преднормы $p(y)$ (в Y) или нормы $p_1(y)$ (в Y^1).

Лемма 4.4. *Если существует последовательность* $\{y_k\} \subset E_\Delta$ *такая, что*

$$r(\omega - y_k) \to 0, \quad k \to \infty, \tag{4.15}$$

то существует и последовательность $\{y_k^1\} \subset E_\Delta^1$, *для которой*

$$r(\omega - y_k^1) \to 0, \quad k \to \infty. \tag{4.16}$$

Доказательство. Для каждого y_k существует последовательность $\{\widetilde{y}_k^n\} \subset E_\Delta^1$, сходящаяся при $n \to \infty$ к y_k в $C(F)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно представить $y_k(\zeta)$ интегральной формулой Коши по $\partial\mathcal{D}$ и взять последовательность $\{\widetilde{y}_k^n\}$ интегральных сумм. Поскольку образ $y_k(F)$ в плоскости w лежит в угле Δ (открытом), то и образы $\widetilde{y}_k^n(F)$ при $n \geq n_0$ попадают в Δ. Значит, при $n \geq n_0$ $\{\widetilde{y}_k^n\} \subset E_\Delta^1$. Поскольку $\{\widetilde{y}_k^n\}$ сходится к y_k в $C(F)$, то по предположениям (4.12) — также и в X. Кроме того, функционал r предположен непрерывным в X и, значит, $r(y_k - \widetilde{y}_k^n) \to 0$, $n \to \infty$. Взяв последовательность положительных чисел $\varepsilon_k \to 0$, отбираем из последовательности $\{\widetilde{y}_k^n\}$, $n \geq n_0$, такой элемент y_k^1, что

$$r(y_k - y_k^1) < \varepsilon_k. \tag{4.17}$$

Но тогда

$$r(\omega - y_k^1) \leq r(\omega - y_k) + r(y_k - y_k^1),$$

и из (4.15) и (4.17) следует (4.16). □

Определим в соответствии с § 3 (формулы (3.12)–(3.14)) для элемента $\omega \in X$ величину

$$\widetilde{p}(\omega) = \inf \varliminf_{k\to\infty} p(y_k), \tag{4.18}$$

где inf берется по всем последовательностям $\{y_k\} \subset E_\Delta$ таким, что выполняется условие (4.15) или

$$\widetilde{p}(\omega) = \infty, \tag{4.19}$$

если последовательности $\{y_k\} \subset E_\Delta$, для которых имеет место (4.15), отсутствуют. Точно так же положим

$$\widetilde{p}_1(\omega) = \inf \varliminf_{k\to\infty} p_1(y_k^1), \tag{4.20}$$

где inf берется по всем последовательностям $\{y_k^1\} \subset E_\Delta^1$ таким, что выполняется (4.16) или

$$\widetilde{p}_1(\omega) = \infty, \tag{4.21}$$

если последовательности $\{y_k^1\} \subset E_\Delta^1$, для которых имеет место (4.16), отсутствуют.

Предложение 4.1. *Для любого* $\omega \in X$

$$\widetilde{p}(\omega) = \widetilde{p}_1(\omega). \tag{4.22}$$

Доказательство. Если последовательности $\{y_k^1\} \subset E_\Delta^1$, сходящиеся в смысле (4.16), отсутствуют, то отсутствуют и последовательности со свойством (4.15) (согласно лемме 4.4). Поэтому в этой ситуации $\widetilde{p}(\omega) = \widetilde{p}_1(\omega) = \infty$. Если $\{y_k^1\} \subset E_\Delta^1 \subset E_\Delta$ сходится в смысле (4.16), то $\underline{\lim}\, p_1(y_k^1) \geq \underline{\lim}\, p(y_k^1)$, $k \to \infty$, т. к. $p_1(y_k^1) \geq p(y_k^1)$, и поэтому

$$\widetilde{p}(\omega) \leq \widetilde{p}_1(\omega). \tag{4.23}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно мало и $\{y_k\} \subset E_\Delta$ такова, что выполняется (4.15) и

$$\underline{\lim}_{k\to\infty}\, p(y_k) \leq \widetilde{p}(\omega) + \varepsilon. \tag{4.24}$$

Выберем еще положительные числа $\{\varepsilon_k\} \to 0$, $k \to \infty$. Согласно определению $p(y_k)$ найдем меры μ_k такие, что

$$S_{\mu_k} \subset G, \quad y_k(\zeta) = \widetilde{\mu}_k \quad \text{и} \quad \|\mu_k\| \leq p(y_k) + \varepsilon_k. \tag{4.25}$$

Заменим интеграл в $\widetilde{\mu}_k$ интегральной суммой простых дробей $\{y_k^1\} \subset E_\Delta^1$:

$$p_1(y_k^1) = \|\mu_k\| < p(y_k) + \varepsilon, \quad r(y_k - y_k^1) < \varepsilon_k.$$

Тогда для $\{y_k^1\}$ выполняется (4.16) и

$$\underline{\lim}_{k\to\infty}\, p_1(y_k^1) \leq \underline{\lim}_{k\to\infty}\, p(y_k) + \varepsilon < \widetilde{p}(\omega) + \varepsilon. \tag{4.26}$$

Из (4.26) следует

$$\widetilde{p}_1(\omega) \leq \widetilde{p}(\omega) + \varepsilon. \tag{4.27}$$

Сопоставляя (4.27) (с $\forall\varepsilon > 0$) и (4.23), получаем (4.22). □

Теорема 4.1 (двойственности). *Для любого* $\omega \in X$

$$\widetilde{p}(\omega) = \widetilde{p}_1(\omega) = \sup \operatorname{Re} l(\omega), \tag{4.28}$$

где $\sup$ *берется по всем линейным функционалам* $l \in X^*$, *для которых* $\operatorname{Re} l \in R(r)$, *и найдется аналитическая в области* G *функция* $f(z)$, $|f(z)| \leq 1$, *такая, что*

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}} [\Phi_l(z) - f(z)]y(z)dz\right] \leq 0 \quad \forall y \in E_\Delta. \tag{4.29}$$

Здесь $\mathcal{D}$ *— окрестность* F, *имеющая спрямляемую границу* $\partial\mathcal{D}$, *такая, что* $y(z)$ *аналитична в замыкании* $\overline{\mathcal{D}}$ *этой окрестности (таким образом,* $\mathcal{D}$, *вообще говоря, своя для каждой* $y(z) \in E_\Delta$*).*

Доказательство. Рассматриваем пространства X и Y как вещественные X_R и Y_R соответственно и применяем теорему 3.2. Поскольку выпуклый функционал r предположен непрерывным, то множества $R(r, M)$ и $R(r)$ из (1.2) состоят из непрерывных линейных функционалов над X_R. Согласно лемме 4.1 всякий функционал из X_R^* имеет вид $\operatorname{Re} l$, где $l \in X^*$. Рассмотрим множество $R(p, 1)$ линейных функционалов λ над Y_R, в котором действует преднорма p. По лемме 4.1 всякий такой функционал $\lambda = \operatorname{Re}\Lambda$, где $\Lambda \in (Y, p)^*$. Но поскольку p — преднорма (симметричный функционал), включение $\lambda \in R(p, 1)$ равносильно тому, что $\|\lambda\| \leq 1$, при этом $\|\lambda\| = \|\operatorname{Re}\lambda\| = \|\Lambda\|$. Функционал l действует согласно лемме 4.3 на $y(z)$ по формуле (4.14), а функционал Λ — по формуле (4.8), где согласно теореме В.П. Хавина аналитическая функция $f(z)$ ограничена в G, причем $\|\Lambda\| = \sup|f(z)| \leq 1$. Условие (4.29) записывает требование $\operatorname{Re} l - \lambda = \operatorname{Re}(\lambda - \Lambda) \in E_\Delta^-$ из теоремы 3.2. □

Литература

1. Davis Ph., Fan K. *Complete sequences and approximation in normed linear spaces* // Duke Math. J. – 1957. – V. 24. – № 2. – P. 183–192.
2. Хавинсон С.Я. *Некоторые вопросы полноты систем* // ДАН СССР. – 1961. – Т. 137. – № 4. – С. 793–796.
3. Хавинсон С.Я. *Некоторые теоремы о приближении с учетом величин коэффициентов приближающих многочленов* // ДАН СССР. – 1971. – Т. 196. – № 6. – С. 1283–1286.
4. Хавинсон С.Я. *О полных системах в банаховых пространствах* // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. – 1985. – Т. 20. – № 2. – С. 89–111.
5. Хавинсон С.Я. *Суммы Голубева: теория экстремальных задач типа задачи об аналитической емкости и сопутствующих аппроксимационных процессов* // УМН. – 1999. – Т. 54. – Вып. 4. – С. 75–142.
6. Khavinson S.Ya. *Some remarks to problems of approximation with prescribed rate* // Operator theory: advances and applications. – 2000. – V. 113. – P. 127–133.
7. Крейн М.Г. *L-проблема в абстрактном линейном нормированном пространстве* // Статья IV в кн.: Н.И. Ахиезер, М.Г. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов. – Харьков: ГОНТИ, 1938.
8. Никольский С.М. *Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами в среднем* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1946. – Т. 10. – № 2. – С. 207–256.
9. Гаркави А.Л. *Теоремы двойственности для приближений посредством элементов выпуклых множеств* // УМН. – 1961. – Т. 16. – Вып. 4. – С. 141–145.
10. Хавинсон С.Я., Чацкая Е.Ш. *Соотношения двойственности и критерии элементов наилучшего приближения.* – Москва: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1976. – 46 с.
11. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Общая теория.* – М.: Ин. лит., 1962. – 895 с.
12. Diendonné J. *Sur le théorème de Hahn–Banach* // Rev. Sci. – 1941. – V. 79. – P. 642–643.
13. Дэй М.М. *Линейные нормированные пространства.* – М.: Ин. лит., 1961. – 232 с.
14. Godini G. *Despre cea mai buna approximare in spatii vectoriale normate prin elemente din conuri convexe* // Studii sie cercetari math. Akad. RSR. – 1969. – V. 21. – № 6. – P. 931–936.
15. Каминский В.А. *Задачи наилучшего приближения в пространствах с конусом* / В сб. “Применение функционального анализа в теории приближений”. – Калинин, 1970. – С. 56–59.
16. Каминский В.А. *Задачи условной минимизации сублинейного функционала в банаховом пространстве с конусом* // Тр. центрального зонального объединения матем. кафедр. – Калинин, 1970. – С. 99–108.
17. Гольштейн Е.Г. *Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения.* – М.: Наука, 1971. – 351 с.
18. Хавин В.П. *О пространстве ограниченных регулярных функций* // ДАН СССР. – 1960.– Т. 131. – № 1. – С. 40–43.
19. Хавин В.П. *О пространстве ограниченных регулярных функций* // Сиб. матем. журн. – 1961. – Т. 2. – № 4. – С. 622–638.
20. Rubel L.A., Shields A.L. *The space of bounded analytic functions on a region* // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. – 1966. – V. 16. – № 1. – P. 235–277.

Московский государственный строительный университет

Поступила 01.03.2002