Известия вузов. Математика *http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/*
2013, №4, с. 42–60 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

А.В. ЛОБОДА, В.К. ЕВЧЕНКО

О РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБАХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР ЛИ, СВЯЗАННЫХ С ОДНОРОДНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Аннотация. В статье строится 3-параметрическое семейство вещественных однородных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства. Это семейство обобщает серию примеров, опубликованных ранее. Оно содержит как невырожденные по Леви (строго псевдовыпуклые и индефинитные) поверхности, так и поверхности с вырожденной формой Леви.

В отличие от имеющихся громоздких описаний матричных алгебр Ли, отвечающих рассматриваемым поверхностям, в данной статье предлагается верхнетреугольное представление алгебр с базисами простого специального вида. Показано, что все аффинно-однородные поверхности из построенного семейства являются алгебраическими поверхностями 1-й, 2-й, 3-й, 4-й или 6-й степени.

Ключевые слова: однородное многообразие, матричная алгебра Ли, комплексное пространство, вещественная гиперповерхность, векторное поле.

УДК: 514.74 : 517.5

Введение

Э. Картаном 80 лет назад была опубликована в [1] классификация вещественных гиперповерхностей 2-мерных комплексных пространств, однородных относительно голоморфных (“псевдоконформных”) преобразований.

В случае 3-мерных комплексных пространств полное описание класса однородных вещественных гиперповерхностей отсутствует до сих пор. При этом в [2] описаны все однородные гиперповерхности 3-мерных комплексных пространств, вырожденные в смысле Леви; одним из авторов этой статьи дан полный список голоморфно однородных строго псевдовыпуклых поверхностей с “богатыми” группами симметрии [3].

В работе [4] было начато изучение более простой задачи классификации вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$, однородных относительно аффинных преобразований этого пространства. Важно отметить, что любое аффинно-однородное многообразие, естественно, является и голоморфно-однородным. С другой стороны, списки Картана и Фелса–Каупа содержат (помимо проективно-однородных поверхностей) большие семейства многообразий, сводимых голоморфными преобразованиями к аффинно-однородным поверхностям.

Поступила 08.02.2012

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-01-00743-а) и Билефельдского университета (Германия, грант SFB-701).

Изучаемое в данной статье свойство аффинной однородности вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$ является важной составной частью общей задачи о голоморфно-однородных многообразиях. Полного решения эта частная задача также пока не получила, несмотря на большое количество примеров аффинно-однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$, построенных в серии работ [4]–[8].

Одним из основных инструментов, используемых при описании однородных многообразий, является, как известно, техника алгебр Ли (например, [2]; [9], с. 44; [10]–[12]). В частности, аффинно-однородные гиперповерхности n-мерных вещественных и комплексных пространств можно описывать в терминах матричных алгебр Ли, состоящих из квадратных матриц порядка $(n+1)$.

При этом диктуемая геометрическими соображениями структура матриц, составляющих такие алгебры, имеет специфические свойства. Эта специфика не связана, вообще говоря, с возможностью какого-либо упрощенного, например, верхнетреугольного представления матричных алгебр. Так, использование геометрических и аналитических соображений позволило построить в работах [5], [8], [13] трехпараметрическое семейство алгебр Ли, отвечающих аффинно-однородным вещественным гиперповерхностям пространства $\mathbb{C}^3$. Сами поверхности можно получить за счет интегрирования этих алгебр. Однако зависимость обсуждаемых алгебр от параметров семейства оказывается весьма громоздкой, что сильно усложняет задачу описания однородных поверхностей.

В данной работе показано (теорема 1), что большое семейство алгебр Ли, отвечающее аффинно-однородным вещественным гиперповерхностям пространства $\mathbb{C}^3$ и обобщающее примеры из [5], [8], [13], допускает достаточно простое представление в верхнетреугольной форме. Такое упрощение позволило относительно легко проинтегрировать все построенные алгебры (теоремы 2 и 3).

Полученное семейство аффинно-однородных поверхностей обладает при этом свойством “универсальности”: оно включает в себя как строго псевдо-выпуклые (СПВ), так и индефинитные и вырожденные по Леви многообразия (в имеющихся результатах об однородности, как правило, речь идет о многообразиях какого-либо одного из названных типов). Тем самым представленный в статье результат показывает эффективность методов, объединяющих геометрический, аналитический и алгебраический подходы к решению задач об однородности.

Еще одной интересной особенностью полученного семейства является алгебраический характер всех входящих в него поверхностей.

Предложенные в данной работе приемы и полученные результаты приближают решение объемных и технически трудных задач описания однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$ как в голоморфной, так и в аффинной геометриях. Отметим, что связь получаемых ниже аффинных результатов с задачей классификации голоморфно-однородных поверхностей 3-мерных комплексных пространств обсуждается в препринте [14], составляющем расширенную версию этой статьи, и в [15].

В целом решение задачи аффинной классификации однородных поверхностей в $\mathbb{C}^3$ приближается, по мнению авторов, к завершению. Одним из оснований для такого суждения является полученное в [16] и [17] полное описание аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$. Использованный в этих работах комбинированный подход, сочетающий коэффициентную технику с изучением матричных алгебр Ли специального вида, работает и в 3-мерном случае. На этой основе в [18] задача изучения однородных вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$ доведена до построения списка матричных алгебр Ли (в одном относительно общем случае поверхностей трубчатого типа). Ожидается получение аналогичных утверждений и для случая поверхностей общего положения [19].

Вместе с тем прямое перенесение результатов об аффинной однородности с 2-мерного комплексного пространства на 3-мерный случай невозможно. Одно из объяснений такой ситуации связано именно с семейством поверхностей, описываемым в данной статье. Аналогов этого семейства в $\mathbb{C}^2$ нет, а потому изучение свойства однородности в 3-мерном случае требует более развернутого исследования различных сопутствующих эффектов (алгебраических, геометрических, аналитических).

В рамках голоморфного варианта задачи об однородности можно предположить, что значительная часть однородных гиперповерхностей 3-мерных комплексных пространств (имеющих дискретный стабилизатор) исчерпывается голоморфными образами аффинно-однородных подмногообразий $\mathbb{C}^3$. Однако более полные исследования, связанные с этой задачей и рассматривающие, например, отдельный вопрос о проективно-однородных многообразиях, еще ждут исполнителей.

1. Продолжение матричных алгебр Ли

Напомним (например, [20], с. 444), что однородным называется многообразие, на котором транзитивно действует некоторая группа преобразований. Для подмногообразий (вещественных гиперповерхностей) аффинного пространства $\mathbb{C}^3$ естественно обсуждать в качестве действующих на них групп какие-либо подгруппы Ли группы $\mathrm{Aff}(3,\mathbb{C})$. Соответствующая любой такой подгруппе алгебра Ли может рассматриваться как алгебра аффинных векторных полей в $\mathbb{C}^3$ вида

$$Z = (A_1z_1 + A_2z_2 + A_3w + p)\frac{\partial}{\partial z_1} + (B_1z_1 + B_2z_2 + B_3w + s)\frac{\partial}{\partial z_2} + (az_1 + bz_2 + cw + q)\frac{\partial}{\partial w}, \quad (1.1)$$

где z_1, z_2, w — комплексные координаты в $\mathbb{C}^3$, A_k, B_k, a, b, c, p, s, q — комплексные константы.

Матричное представление алгебры Ли, состоящей из полей (1.1), позволяет работать с ее элементами как с 4×4-матрицами вида

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & p \\ B_1 & B_2 & B_3 & s \\ a & b & c & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Скобка полей переходит при этом в коммутатор (скобку) матриц

$$[Z_1Z_2] = Z_1Z_2 - Z_2Z_1.$$

Обозначим группу аффинных преобразований, транзитивно действующую на поверхности $M \in \mathbb{C}^3$, через $G(M)$, а соответствующую ей алгебру — через $g(M)$. Векторные поля из $g(M)$ являются касательными к обсуждаемой аффинно-однородной вещественной гиперповерхности M. Аналитически этот факт записывается в виде

$$\mathrm{Re}\{Z(\Phi)\}_{|M} = 0, \quad (1.3)$$

где Φ — определяющая функция поверхности M, а символ вещественной части в (1.3) возникает вследствие того, что в комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$ обсуждается вещественная поверхность M.

Как и в упомянутых работах [5], [8], [13], ниже будут рассматриваться алгебры, содержащие лишь матрицы вида (1.2). На элементы таких матриц будем накладывать дополнительные ограничения. Первое из них имеет вид

$$A_3 = B_3 = 0. \tag{1.4}$$

Отметим, что при умножении матриц

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & 0 & p \\ B_1 & B_2 & 0 & s \\ a & b & c & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

получаемых из (1.2) за счет выполнения условия (1.4), их левые верхние (2×2)-блоки перемножаются отдельно от остальных элементов. В силу этого для матричных алгебр, состоящих из матриц вида (1.5), справедливо следующее легко проверяемое

Предложение 1. *Если g — подалгебра Ли алгебры $GL(4,\mathbb{C})$, состоящая из матриц вида* (1.5)*, то левые верхние* (2×2)*-блоки этих матриц также образуют алгебру.*

Обозначая левый верхний (2×2)-блок матрицы Z вида (1.5) через e, предложение 1 дополним формулой

$$[Z_1, Z_2]_e = [e_1, e_2] = e_1 \cdot e_2 - e_2 \cdot e_1. \tag{1.6}$$

Предложение 1 является основой для следующего определения.

Определение. Пусть g — подалгебра Ли алгебры $GL(4,\mathbb{C})$, состоящая из матриц вида (1.5), h — подалгебра Ли алгебры $GL(2,\mathbb{C})$. Если алгебра

$$g_e = \{Z_e \mid Z \in g\}$$

совпадает с h, то будем называть алгебру g *продолжением* алгебры h.

В серии работ [5]–[8] показано, что допускают требуемые продолжения лишь некоторые подалгебры Ли алгебры $GL(2,\mathbb{C})$. Например, имеется лишь одна (с точностью до матричного подобия или сопряжения) продолжаемая вещественно 3-мерная подалгебра $GL(2,\mathbb{C})$. Это алгебра $\widehat{g}$ с базисом

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Предложение 2 ([8], теорема 5)**.** *Существует* 3*-параметрическое семейство аффинно различных аффинно-однородных вещественных СПВ-гиперповерхностей пространства* $\mathbb{C}^3$*, алгебры аффинных векторных полей для которых являются* 5*-мерными продолжениями алгебры* $\widehat{g}$*. Базисы этих алгебр имеют вид*

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i(1-4\varepsilon_2^2)\omega \\ 0 & 1/2 & 0 & 2i(\zeta\omega + 2\varepsilon_2\overline{\zeta}\overline{\omega}) \\ -4(1-4\varepsilon_2^2)\overline{\omega} & 2(1-4\varepsilon_2^2)(2\varepsilon_2\zeta\omega + \overline{\zeta}\overline{\omega}) & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4i(\zeta\omega + 2\varepsilon_2\overline{\zeta}\overline{\omega}) \\ 0 & 0 & 0 & 4i((1-\zeta^2)\omega + 2\varepsilon_2(1-|\zeta|^2)\overline{\omega}) \\ a_2 & 8(1-4\varepsilon_2^2)\overline{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$a_2 = 16(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\zeta\omega - 8(4\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1)\overline{\zeta}\overline{\omega} - 8(4\varepsilon_2^2 - 1)\zeta\overline{\omega},$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & -4(\zeta\omega + 2\varepsilon_2\overline{\zeta}\overline{\omega}) \\ 0 & 0 & 0 & 4((1+\zeta^2)\omega - 2\varepsilon_2(1-|\zeta|^2)\overline{\omega}) \\ a_3 & 8i(1-4\varepsilon_2^2)\overline{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$a_3 = -8i(2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\zeta\omega + (4\varepsilon_2(\varepsilon_1\overline{\zeta} + \varepsilon_2\zeta) + (\overline{\zeta} - \zeta))\overline{\omega}),$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i(2\varepsilon_2\zeta\omega + \overline{\zeta}\overline{\omega}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а параметры, входящие в эти матрицы, связаны соотношениями

$$|\omega| = 1, \quad 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\zeta^2)\omega + (1 + |\zeta|^2)\overline{\omega} = 0, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0.$$

2. Упрощенное представление продолженных матричных алгебр

Рассмотрим 5-мерную подалгебру Ли g матричной алгебры $GL(4, \mathbb{C})$, полагая все матрицы g имеющими вид (1.5). Будем считать, что базисные матрицы E_1, E_2, E_3 алгебры g имеют в качестве e-блоков в точности матрицы e_1, e_2, e_3 из (1.7); e-блоки матриц E_4, E_5 считаем нулевыми.

Кроме того, наложим на g еще несколько условий, выполняющихся для всех алгебр из работ [5], [8], [13] и достаточно подробно прокомментированных в этих статьях:

1) элементы q_k $(k = 1, \ldots, 5)$ всех базисных матриц $E_1, \ldots, E_5$ алгебры g вещественны;

2) базисная матрица E_5 имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$;

3) вещественная размерность линейной оболочки $V = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} p_k \\ s_k \\ q_k \end{smallmatrix}\right),\ k = 1, \ldots, 5 \right\rangle$ последних столбцов базисных матриц равна 5;

4) $$p_2 = 2s_1, \;\; p_3 = 2is_1, \;\; b_2 = -2a_1, \;\; b_3 = -2ia_1. \tag{2.1}$$

Теорема 1. *Если алгебра Ли g, состоящая из матриц вида* (1.5)*, является продолжением алгебры* (1.7) *и удовлетворяет условиям* 1)–4)*, перечисленным выше, то она подобна одной из верхнетреугольных алгебр с базисами двух следующих типов* ($A = m + in$, $m, n, s \in \mathbb{R}$):

$$1)\; E_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_3 = \begin{pmatrix} 0 & (iA - s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (iA + s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.2}$$

$$
\begin{gathered}
2)\ E_1=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&A\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ E_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&i&0\\0&0&0&(iA+s)\\0&0&0&0\end{pmatrix},\\
E_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad E_5=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

Для доказательства теоремы сформулируем и докажем несколько вспомогательных утверждений о свойствах обсуждаемых алгебр и их базисных матриц. Выпишем сначала эти матрицы с учетом уже обозначенных требований к ним. Имеем

$$
\begin{gathered}
E_1=\begin{pmatrix}1&0&0&p_1\\0&1/2&0&s_1\\a_1&b_1&c_1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix}0&1&0&p_2\\0&0&0&s_2\\a_2&b_2&c_2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ E_3=\begin{pmatrix}0&i&0&p_3\\0&0&0&s_3\\a_3&b_3&c_3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\\
E_4=\begin{pmatrix}0&0&0&p_4\\0&0&0&s_4\\a_4&b_4&c_4&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad E_5=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

Здесь $(3,4)$-элементы базисных матриц E_1, E_2, E_3, E_4 полагаем равными нулю за счет возможности рассмотрения исправленных матриц

$$E_k^* = E_k - q_k E_5, \quad k = 1, \ldots, 4,$$

вместо исходных. У исправленных матриц $(3,4)$-элементы имеют желаемые нулевые значения.

Еще два простых утверждения об изучаемых алгебрах, необходимые в дальнейшем и доказанные в [5], вытекают из уже сформулированных свойств 1)–4) и замкнутости алгебр относительно скобки.

Предложение 3. *Для элементов базисных матриц E_1, E_2, E_3, E_4 алгебры* (2.4) *выполняются следующие условия*:

$$c_1 = 3/2, \quad c_2 = c_3 = c_4 = 0. \tag{2.5}$$

Предложение 4. *Пусть E_4 — матрица из базиса* (2.4)–(2.5) *матричной алгебры Ли g. Тогда для ее элементов справедливы равенства*

$$a_4 = 0, \quad s_4 = 0. \tag{2.6}$$

Теперь заметим, что спектр матрицы E_1 из (2.4) является простым. Это позволяет диагонализировать ее подобием $Z \to S^{-1}ZS$ с матрицей

$$S=\begin{pmatrix}0&1&0&-p_1\\0&0&1&-2s_1\\1&-2a_1&-b_1&(2a_1p_1+4b_1s_1)/3\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

состоящей из собственных векторов E_1.

Предложение 5. *При подобии с матрицей S алгебра* (2.4)*, удовлетворяющая условиям* (2.1)*,* (2.5) *и* (2.6)*, переходит в верхнетреугольную алгебру с базисом вида*

$$E_1^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_2^* = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_3^* = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

$$E_4^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_5^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство предложения 5 является по существу вычислительным. Вместе с тем отметим, что непосредственное применение S-подобия к базисным матрицам лишь для E_1 и E_5 дает желаемые матрицы E_1^* и E_5^*.

Матрица E_4, например, переводится этим подобием не в E_4^*, а в

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b_4 & (-2b_4 s_1 + 2a_1 p_4) \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

До состояния E_4^* последнюю матрицу можно привести при условии вещественности выражения $(-2b_4 s_1 + 2a_1 p_4)$. Факт такой вещественности является следствием принадлежности скобки $[E_1, E_4]$ исходных базисных матриц самой алгебре (2.4). $(3,4)$-элемент этой скобки, т. е. $(-b_4 s_1 + a_1 p_4)$, является вещественным.

Аналогично, но уже с использованием условий (2.1) верхнетреугольные (вообще говоря) матрицы $S^{-1}E_2S$ и $S^{-1}E_3S$ превращаются в более простые "одно-диагональные" матрицы E_2^* и E_3^*. Предложение 5 считаем доказанным.

Треугольные 5-мерные алгебры с базисами вида (2.8) можно еще упрощать за счет подобий. Например, подобие $Z \to C^{-1}ZC$ с диагональной матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

переводит каждый элемент z_{kl} матрицы Z в $\lambda_k^{-1} z_{kl} \lambda_l$.

Это означает, например, что для сохранения матрицы E_5^* достаточно положить

$$\lambda_1 = 1 \tag{2.10}$$

в матрице (2.9), а матрица E_4^* превратится при обсуждаемом подобии в

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b_4\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4\lambda_2^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дальнейшее обсуждение распадается на подслучаи. Например, при двух ненулевых элементах p_4, b_4 в матрице E_4 можно положить в дополнение к (2.10)

$$\lambda_2 = 1/p_4, \quad \lambda_3 = b_4.$$

Тогда оба элемента p_4, b_4 превратятся в единицы, а $(2,3)$-элементы 1 и i матриц E_2^* и E_3^* умножатся на одно и то же ненулевое число $\lambda_2^{-1}\lambda_3$. Рассматривая далее вместо измененных матриц E_2^* и E_3^* их вещественные линейные комбинации, восстановим нормированные $(2,3)$-элементы 1 и i.

Следовательно, для матрицы E_4^* из базиса алгебры (2.8) при "диагональных" подобиях имеется два варианта (при сохранении вида остальных четырех базисных матриц):

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Предложение 6. *В первом случае из* (2.11) *исходная алгебра* (2.4) *превращается подобием в алгебру* (2.2), *во втором случае — в алгебру* (2.3).

Для доказательства снова воспользуемся замкнутостью алгебры и вытекающими из нее скобочными ограничениями. В начальной форме алгебры (2.4) эти ограничения были весьма громоздкими. Теперь же, после "диагональной правки" они становятся достаточно изящными и в то же время вполне конструктивными. Например, для элементов матриц вида (2.8), записанных в обобщенных обозначениях как

$$E_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & A_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

выполняются следующие условия:

$$1) \;\; A_2B_4 - A_4B_2 \in \mathbb{R}, \quad A_3B_4 - A_4B_3 \in \mathbb{R} \tag{2.12}$$

и

$$2) \;\; iA_2 - A_3 = rA_4, \qquad B_3 - iB_2 = rB_4 \tag{2.13}$$

для некоторого вещественного r.

Подставляя равенства $A_4 = B_4 = 1$ в (2.12) и (2.13), получаем

$$A_3 = iA_2 - r, \quad B_3 = iB_2 + r, \quad B_2 = A_2.$$

В этом случае изучаемая алгебра зависит не более чем от трех вещественных параметров ($A \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$) и совпадает с (2.2).

Аналогично при $A_4 = 0$ из (2.12) и (2.13) следуют формулы, приводящие изучаемую алгебру к виду (2.3).

Доказанное предложение 6 завершает и доказательство теоремы 1.

Замечание 1. При переходе от построенных алгебр к соответствующим им аффинно-однородным гиперповерхностям удобно использовать не треугольный, а несколько измененный вид этих алгебр. Связано это в первую очередь с желанием иметь в алгебре “стандартное” поле $\partial/\partial w$. Наличие такого поля означает жесткость (независимость от переменной u) функции, определяющей однородную поверхность. Свойство жесткости традиционно считается интересным в рассматриваемом круге вопросов ([21]–[23]).

В нашем случае поле E_5 легко принимает желаемый вид за счет простой замены переменных $z_1 \leftrightarrow w$. При этом базисы алгебр (2.2) и (2.3) превращаются в

$$
\begin{gathered}
E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & A \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (iA+s) \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (iA-s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{gathered}
\tag{2.14}
$$

и

$$
\begin{gathered}
E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & A \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (iA+s) \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{gathered}
\tag{2.15}
$$

соответственно. Именно с такими базисами будем работать далее.

3. Теорема Фробениуса и ранг алгебры

По теореме Фробениуса ([24], теорема 1.6) для 5-мерной алгебры векторных полей, имеющей в фиксированной точке пространства $\mathbb{C}^3$ ранг, равный 5, существует (и притом единственное) интегральное многообразие обсуждаемой алгебры той же размерности 5, проходящее через обсуждаемую точку. В таких “правильных” (по отношению к каждой конкретной алгебре) точках пространства $\mathbb{C}^3$ будем интегрировать алгебры и получать в качестве их интегральных многообразий искомые однородные поверхности.

Замечание 2. Строго говоря, обсуждаем ростки аналитических поверхностей, *аффинно-однородные в локальном смысле* вблизи рассматриваемых точек.

Точки пространства $\mathbb{C}^3$, в которых ранг изучаемой 5-мерной алгебры не является максимальным, по сути выводим из рассмотрения.

Тем самым для любой из изучаемых алгебр (2.14) или (2.15) в каждой точке $\mathbb{C}^3$ необходимо рассмотреть систему из пяти векторов, отвечающих базисным матрицам алгебры, и исследовать ранг этой системы.

Например, для алгебры из семейства (2.15) в произвольной точке $Q(z_1, z_2, w) \in \mathbb{C}^3$ речь идет о вещественном ранге системы комплексных векторов — значений полей $E_1, \ldots, E_5$:

$$\begin{pmatrix} z_1 & (m+in) & (s-n)+im & 0 & 0 \\ 2z_2 & z_1 & iz_1 & 1 & 0 \\ 3w & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При переходе от комплексных к вещественным обозначениям можно обсуждать 6×5-матрицу

$$\begin{pmatrix} x_1 & m & (s-n) & 0 & 0 \\ y_1 & n & m & 0 & 0 \\ 2x_2 & x_1 & -y_1 & 1 & 0 \\ 2y_2 & y_1 & x_1 & 0 & 0 \\ 3u & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3v & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

В силу стандартного определения ранга для его максимальности в случае матрицы (3.1) достаточно, чтобы не обращался в нуль хотя бы один из ее шести миноров 5-го порядка. Интересующие нас миноры легко вычисляются:

$$\begin{gathered} D_1 = 3v(-nx_1 + my_1), \quad D_2 = 3v(-mx_1 + (s-n)y_1), \\ D_3 = 0, \quad D_4 = 3v(m^2 + n^2 - ns), \\ D_5 = 0, \quad D_6 = (n-s)y_1^2 - nx_1^2 + 2mx_1y_1 - 2(m^2+n^2-ns)y_2. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Для семейства (2.14) необходимо вычислять шесть определяющих миноров аналогичной матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & m & (s-n) & 0 & 0 \\ y_1 & n & m & 0 & 0 \\ 2x_2 & x_1 & -y_1 & 1 & 0 \\ 2y_2 & y_1 & x_1 & 0 & 0 \\ 3u & (mx_2 - ny_2) & -(s+n)x_2 - my_2 & x_1 & 1 \\ 3v & (nx_2 + my_2) & mx_2 - (s+n)y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Минор

$$D_6 = (n-s)y_1^2 - nx_1^2 + 2mx_1y_1 - 2(m^2+n^2-ns)y_2,$$

имеющий один и тот же вид для обеих матриц (3.1) и (3.3), является наиболее важным для нас. Дело в том, что многие операции с обсуждаемыми полями по сути подразумевают представление искомой однородной поверхности в виде

$$v = F(z, \overline{z}, u),$$

разрешенном относительно координаты v (с неизвестной аналитической функцией F).

Предложение 7. *Если в некоторой точке $Q(z_1, z_2, w)$ пространства $\mathbb{C}^3$ минор D_6 матрицы* (3.1) *или* (3.3) *отличен от нуля, то искомая гиперповерхность допускает в данной точке представление в виде $v = F(z, \overline{z}, u)$.*

Действительно, неравенство $D_6 \neq 0$ означает, что касательные векторы к изучаемой поверхности (в обсуждаемой точке) заметают все направления в 5-мерном пространстве, образованном координатами x_1, y_1, x_2, y_2, u. Переменная v выражается в этом касательном пространстве через остальные пять координат вектора. Тем самым имеем ситуацию, позволяющую выразить переменную v через остальные координаты не только в касательной плоскости к поверхности, но и на ней самой.

Предложение 7 подсказывает целесообразность рассмотрения множества точек

$$\Gamma_6^{(m,n,s)} = \{(n-s)y_1^2 - nx_1^2 + 2mx_1y_1 - 2(m^2+n^2-ns)y_2 = 0\}, \tag{3.4}$$

определяемых равенством нулю минора D_6 при фиксированных значениях параметров (m, n, s).

В случае нетривиальной тройки параметров (m, n, s) все такие множества можно разделить на два типа в зависимости от значения выражения

$$N = (m^2 + n^2 - ns). \tag{3.5}$$

Предложение 8. *Пусть дана нетривиальная тройка параметров* $(m, n, s) \neq (0, 0, 0)$. *Если комбинация* (3.5) *этих параметров равна нулю, то множество* $\Gamma_6^{(m,n,s)}$ *представляет собой вещественную гиперплоскость пространства* $\mathbb{C}^3$.

Если же $N = (m^2 + n^2 - ns) \neq 0$, *то множество*

$$\Gamma_6^{(m,n,s)} = \mathbb{C}_w \times \gamma_6^{(m,n,s)}$$

является прямым произведением плоскости $\mathbb{C}_w$ *на параболоид* $\gamma_6^{(m,n,s)}$ *из пространства* $\mathbb{C}^2_{(z_1,z_2)}$, *заданный тем же уравнением* (3.4).

Справедливость первой части предложения 8 вытекает из того, что выражение $N = (m^2 + n^2 - ns)$ является (с точностью до ненулевых множителей) коэффициентом при переменной y_2 в уравнении (3.4) и одновременно определителем квадратичной формы по переменным x_1, y_1 из того же уравнения. Поэтому уравнение второй степени (3.4) описывает дважды накрытую вещественную гиперплоскость.

Вторая часть предложения 8 очевидна.

При изучении рангов алгебр (2.14) и (2.15) в точках поверхностей $\Gamma_6^{(m,n,s)}$, соответствующих этим алгебрам, основной интерес связан с точками, в которых этот ранг равен 5.

Отметим, что в случае трех ненулевых параметров m, n, s, удовлетворяющих равенству

$$N = (m^2 + n^2 - ns) = 0,$$

во всех точках поверхности $\Gamma_6^{(m,n,s)}$ обращаются в нуль все шесть миноров (3.2).

В то же время верно

Предложение 9. *Пусть* $(m, n, s) \neq (0, 0, 0)$ *— нетривиальный набор параметров,* $g = g^{(m,n,s)}$ *и* $\Gamma_6 = \Gamma_6^{(m,n,s)}$ *— алгебра Ли из семейства* (2.14) *или* (2.15) *и поверхность, отвечающие этому набору. Пусть еще в некоторой точке* $Q \in \Gamma_6$ *алгебра* g *имеет полный ранг. Тогда аффинно-однородной интегральной гиперповерхностью алгебры* g, *проходящей через точку* Q, *является сама поверхность* Γ_6.

Доказательство этого утверждения следует из двух соображений.

Во-первых, хорошо известным свойством вещественных гиперплоскостей, а также параболоидов вида

$$\operatorname{Im} z_n = \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k (\operatorname{Re} z_k)^2 + \beta_k (\operatorname{Im} z_k)^2), \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R},$$

в пространствах $\mathbb{C}^n$ любой размерности является аффинная однородность этих поверхностей. Тогда и любая поверхность $\Gamma_6^{(m,n,s)}$ из пространства $\mathbb{C}^n$ является аффинно-однородной.

Во-вторых, отметим, что все поля любой из алгебр (2.14) или (2.15) являются касательными к соответствующей поверхности $\Gamma_6^{(m,n,s)}$. Этот факт несложно проверяется для всех базисных полей обсуждаемых алгебр. Тогда в точках полного ранга именно поверхность $\Gamma_6^{(m,n,s)}$ является интегральным многообразием любой алгебры $g^{(m,n,s)}$. Предложение 9 доказано.

С учетом доказанного остается рассмотреть основной случай, связанный с условиями

$$(m,n,s) \neq (0,0,0), \quad D_6 \neq 0,$$

а также случай алгебр, отвечающих тривиальному набору параметров

$$m=0, \quad n=0, \quad s=0. \tag{3.6}$$

Предложение 10. *При выполнении условия* (3.6) *ранг алгебры* (2.15) *является неполным во всех точках пространства* $\mathbb{C}^3$;

ранг алгебры (2.14) *максимален при этом условии во всех точках, удовлетворяющих неравенству* $y_1 \neq 0$.

Доказательство предложения 10 является чисто вычислительным. Для алгебры (2.15) все шесть миноров 5-го порядка равны в этом случае нулю. Для алгебры (2.14) имеем формулы

$$D_1 = -y_1^2(x_1^2+y_1^2), \quad D_2 = -x_1y_1(x_1^2+y_1^2), \quad D_3 = D_4 = D_5 = D_6 = 0,$$

доказывающие вторую часть предложения.

Завершая этот раздел, обсудим интегрирование алгебры (2.14) в точках полупространств $y_1 < 0$ и $y_1 > 0$ при условии (3.6).

Предложение 11. *Пусть точка* $Q(\mu,\nu,\eta) \in \mathbb{C}^3$ *удовлетворяет условию* $\operatorname{Im}\mu \neq 0$, *а* M *— интегральная поверхность алгебры* (2.14) *с тривиальным набором параметров* (m,n,s), *проходящая через* Q. *Тогда* M *аффинно эквивалентна вещественной гиперплоскости* $v=0$.

Для доказательства рассмотрим базисные поля

$$\begin{gathered} E_1 = z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + 2z_2\frac{\partial}{\partial z_2} + 3w\frac{\partial}{\partial w}, \\ E_2 = z_1\frac{\partial}{\partial z_2}, \quad E_3 = iz_1\frac{\partial}{\partial z_2}, \quad E_4 = \frac{\partial}{\partial z_2} + z_1\frac{\partial}{\partial w}, \quad E_5 = \frac{\partial}{\partial w} \end{gathered} \tag{3.7}$$

обсуждаемой алгебры. Образованная векторами (3.7) касательная плоскость к интегральной гиперповерхности в заданной точке определяется уравнением

$$\operatorname{Im}(\overline{\mu} z_1) = 0.$$

Такое ее положение не позволяет, вообще говоря, записать уравнение искомой интегральной поверхности в виде, разрешенном относительно переменной v. Поэтому заменим координаты в пространстве $\mathbb{C}^3$, полагая

$$z_1^* = w, \quad z_2^* = z_2, \quad w^* = -iz_1.$$

При этом

$$z_1 = iw^*, \quad w = z_1^*, \quad \frac{\partial}{\partial z_1} = -i\frac{\partial}{\partial w^*}, \quad \frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial z_1^*},$$

а дифференцирование по координате z_2 сохранится неизменным.

Тогда в новых координатах (звездочки для упрощения опускаем) базисные поля нашей алгебры имеют вид

$$E_1 = 3z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + 2z_2\frac{\partial}{\partial z_2} + w\frac{\partial}{\partial w},$$

$$E_2 = iw\frac{\partial}{\partial z_2}, \quad E_3 = -w\frac{\partial}{\partial z_2}, \quad E_4 = iw\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad E_5 = \frac{\partial}{\partial z_1}.$$

В матрице (3.3) теперь ненулевым будет минор $D_6 = -u^2(u^2+v^2)$. Это позволяет задавать искомую поверхность уравнением $\Phi = -v + F(z, \overline{z}, u) = 0$ желаемого вида.

Условие (1.3) касания полями E_2 и E_3 такой поверхности означает, что F не зависит от переменной z_2. Наличие в алгебре поля $E_5 = \partial/\partial z_1$ приводит к независимости F еще и от переменной $x_1 = \operatorname{Re} z_1$. Тогда для поля E_4 аналогичное условие касания запишется в виде

$$-\operatorname{Re}(u + iF)\frac{\partial F}{\partial y_1} = -u\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0.$$

Это уравнение означает независимость F от переменной y_1, в силу чего условие (1.3) примет для поля E_1 вид

$$u\frac{\partial F}{\partial u} - F = 0.$$

Здесь формула для общего решения имеет вид $F = Cu$, где C — произвольная константа. Это означает, что искомыми интегральными многообразиями являются гиперповерхности

$$v = Cu \tag{3.8}$$

с произвольными константами C. Для фиксированной точки $Q \in \mathbb{C}^3$ значение этого параметра определяется вещественной и мнимой частями третьей координаты точки Q. Ясно, что при любых C поверхность (3.8) аффинно эквивалентна вещественной гиперплоскости $v = 0$. □

4. Интегрирование семейства (2.14)

В соответствии с обозначениями раздела 1 базисные векторные поля любой из алгебр (2.14) имеют вид

$$E_1 = z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + 2z_2\frac{\partial}{\partial z_2} + 3w\frac{\partial}{\partial w}, \quad E_2 = A\frac{\partial}{\partial z_1} + z_1\frac{\partial}{\partial z_2} + Az_2\frac{\partial}{\partial w},$$

$$E_3 = (iA + s)\frac{\partial}{\partial z_1} + iz_1\frac{\partial}{\partial z_2} + (iA - s)\frac{\partial}{\partial w}, \quad E_4 = \frac{\partial}{\partial z_2} + z_1\frac{\partial}{\partial w}, \quad E_5 = \frac{\partial}{\partial w}.$$

Как отмечалось в предыдущем разделе, алгебры (2.14) достаточно интегрировать при $(m, n, s) \neq (0, 0, 0)$ вне точек гиперповерхностей $\Gamma_6^{(m,n,s)}$. При этом определяющая функция любой искомой поверхности гарантированно имеет во всех таких точках "удобный" вид $v = F(z, \overline{z}, u)$, и даже (за счет наличия в алгебре поля E_5) $v = F(z, \overline{z})$.

В этом случае система четырех уравнений, отвечающая семейству алгебр (2.14), имеет в вещественных координатах вид

$$x_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial F}{\partial y_1} + 2x_2\frac{\partial F}{\partial x_2} + 2y_2\frac{\partial F}{\partial y_2} = 3F, \quad m\frac{\partial F}{\partial x_1} + n\frac{\partial F}{\partial y_1} + x_1\frac{\partial F}{\partial x_2} + y_1\frac{\partial F}{\partial y_2} = (nx_2 + my_2),$$

$$(s - n)\frac{\partial F}{\partial x_1} + m\frac{\partial F}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial F}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial F}{\partial y_2} = mx_1 - (n + s)y_2, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = y_1. \tag{4.1}$$

Воспользуемся пошаговым решением отдельных уравнений (4.1). Начнем с четвертого, самого простого, уравнения системы. Очевидно,

$$F = F(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_2y_1 + G(x_1, y_1, y_2), \tag{4.2}$$

где $G(x_1, y_1, y_2)$ — некоторая неизвестная функция уже трех переменных. Подставив (4.2) в остальные уравнения системы (4.1), получаем систему трех уравнений

$$x_1\frac{\partial G}{\partial x_1}+y_1\frac{\partial G}{\partial y_1}+2y_2\frac{\partial G}{\partial y_2}=3G,\quad m\frac{\partial G}{\partial x_1}+n\frac{\partial G}{\partial y_1}+y_1\frac{\partial G}{\partial y_2}=my_2-x_1y_1,$$
$$(s-n)\frac{\partial G}{\partial x_1}+m\frac{\partial G}{\partial y_1}-x_1\frac{\partial G}{\partial y_2}=y_1^2-(n+s)y_2. \tag{4.3}$$

Алгоритм ее решения, разумеется, зависит от обращения или необращения в нуль коэффициентов перед производными искомой функции, т. е. от параметров m, n, $(n-s)$. Далее важную роль играет также комбинация $N=(m^2+n^2-ns)$ выписанных параметров. В целом интерес представляют следующие случаи:

1) $m=0$, $n=0$, $s=0$, 2) $m=0$, $n=0$, $s\neq 0$, 3) $n\neq 0$, $N=0$,
4) $n\neq 0$, $N\neq 0$, 5) $m\neq 0$, $n=0$.

Напомним, что первый из этих случаев (3.6) уже рассмотрен в предыдущем разделе применительно к обоим семействам (2.14) и (2.15).

Предложение 12. *Уравнения поверхностей* $\Gamma_6(m,n,s)$ *в случаях* 2)–5) *имеют вид*:
2) $y_1^2=0$, 3) $(nx_1-my_1)^2=0$, 4) $(nx_1-my_1)^2-N(y_1^2-2ny_2)=0$,
5) $2m(x_1y_1-my_2)-sy_1^2=0$.

Справедливость этого утверждения в 2) и 5) очевидна. В случае 3) необходимо удалить из общей формулы для $\Gamma_6(m,n,s)$ слагаемое с нулевым коэффициентом $N=m^2+n^2-ns$ и подставить вместо s выражение $s=(m^2+n^2)/n$. Наконец, в общем случае 4) левая часть предлагаемого выражения перепишется (после раскрытия первой скобки) в виде

$$n^2x_1^2-2mnx_1y_1+m^2y_1^2-(m^2+n^2-ns)y_1^2+2n(m^2+n^2-ns)y_2=$$
$$=n(nx_1^2-2mx_1y_1-(n-s)y_1^2+2(m^2+n^2-ns)y_2).$$

Это выражение совпадает с точностью до множителя $(-n)$ с формулой для минора D_6. Из этой же выкладки получается и формула случая 3). $\square$

Теперь проинтегрируем семейство алгебр (2.14) в достаточно простом случае 2).

Предложение 13. *При* $m=0$, $n=0$, $s\neq 0$ *все решения системы* (4.1) *являются алгебраическими поверхностями третьей степени с уравнениями*

$$v=x_2y_1-x_1y_2+\frac{1}{3s}x_1^3+\frac{1}{s}x_1y_1^2+Cy_1^3, \tag{4.4}$$

где C *— произвольная константа.*

Замечание 3. Поверхности $\Gamma_6^{(0,0,s)}$ в случае 2) имеют уравнение $sy_1^2=0$. В рамках обозначенных выше договоренностей можем рассматривать уравнения (4.4) в двух полупространствах $y_1<0$ и $y_1>0$.

Для доказательства предложения 13 заметим, что система (4.3) в этом случае имеет очень простой вид

$$x_1\frac{\partial G}{\partial x_1}+y_1\frac{\partial G}{\partial y_1}+2y_2\frac{\partial G}{\partial y_2}=3G,\quad y_1\frac{\partial G}{\partial y_2}=-x_1y_1,\quad s\frac{\partial G}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial G}{\partial y_2}=y_1^2-sy_2. \tag{4.5}$$

Так как $y_1\neq 0$, то второе уравнение системы (4.5) можно разделить на y_1. На следующем шаге необходимо решить это уравнение.

Замечание 4. При решении каждого такого уравнения, как и при предыдущем интегрировании, возникает новая неизвестная аналитическая функция от уменьшенного числа переменных. Всегда будем обозначать такие функции по мере их появления через G, H, φ, не оговаривая их каждый раз. Отметим лишь, что последняя функция в этом наборе зависит от одной вещественной переменной. Определяться эта функция будет из обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ), возникающего на последнем шаге решения каждой из систем.

Возвращаясь к решению
$$G = -x_1y_2 + H(x_1, y_1)$$
второго уравнения системы (4.5), подставим его в два оставшихся уравнения системы. Получим новую систему
$$x_1\frac{\partial H}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial H}{\partial y_1} = 3H, \quad s\frac{\partial H}{\partial x_1} = (x_1^2 + y_1^2).$$

Решение ее второго уравнения
$$H = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{3}x_1^3 + x_1y_1^2\right) + \varphi(y_1)$$
подставим в первое. Это приводит к ОДУ
$$y_1\varphi'(y_1) = 3\varphi(y_1).$$

Подставляя решение $\varphi(y_1) = Cy_1^3$ этого уравнения в решения всех уравнений из предыдущих шагов, получаем формулу (4.4).

Замечание 5. Семейство аффинно-однородных поверхностей (4.4) формально зависит от двух вещественных параметров s, C. В то же время согласованное растяжение переменных
$$z_1 \to (3s)^{1/3}z_1, \quad z_2 \to (3s)^{-1/3}z_2$$
переводит (4.4) в уравнение
$$v = x_2y_1 - x_1y_2 + x_1^3 + 3x_1y_1^2 + (3sC)y_1^3,$$
зависящее от одного обобщенного параметра $3sC$.

Далее для более сложных случаев предположим $n \neq 0$. Тогда независимо от равенства или неравенства нулю параметра m общее решение второго уравнения системы (4.3) описывается формулой
$$G(x_1, y_1, y_2) = \frac{m}{n}y_1y_2 - \frac{1}{2n}x_1y_1^2 - \frac{m}{6n^2}y_1^3 + H\left(\frac{y_1^2}{2} - ny_2, nx_1 - my_1\right). \tag{4.6}$$

Отметим, что формула (4.6) получается за счет нахождения интегралов системы ОДУ
$$\frac{dx_1}{m} = \frac{dy_1}{n} = \frac{dy_2}{y_1} = \frac{dG}{my_2 - x_1y_1},$$
соответствующей обсуждаемому уравнению в частных производных.

Подставив это решение в два оставшихся уравнения системы (4.3), имеем новую систему
$$2t_1\frac{\partial H}{\partial t_1} + t_2\frac{\partial H}{\partial t_2} = 0, \quad t_2\frac{\partial H}{\partial t_1} + (m^2 + n^2 - ns)\frac{\partial H}{\partial t_2} + \frac{(m^2 + n^2 + ns)}{n^2}t_1 = 0, \tag{4.7}$$
где $t_1 = \frac{y_1^2}{2} - ny_2$, $t_2 = nx_1 - my_1$.

В этой системе комбинация параметров $N = (m^2 + n^2 - ns)$ играет существенную роль. Пусть сначала

$$m^2 + n^2 - ns = 0, \tag{4.8}$$

что соответствует случаю 3).

Предложение 14. *При* $n \neq 0$, $m^2 + n^2 - ns = 0$ *все решения системы* (4.1) *являются алгебраическими поверхностями четвертой степени с уравнениями*

$$v = x_2 y_1 + \left(\frac{m}{n} y_1 y_2 - \frac{1}{2n} x_1 y_1^2 - \frac{m}{6n^2} y_1^3\right) - \frac{s(y_1^2 - 2ny_2)^2}{4n(nx_1 - my_1)} + C(nx_1 - my_1)^3,$$

где C *— произвольная константа.*

Для доказательства этого предложения решим второе уравнение системы (4.7) при допущении (4.8):

$$H(t_1, t_2) = -\frac{st_1^2}{nt_2} + \varphi(t_2). \tag{4.9}$$

Функция $\varphi(t_2)$ определяется из первого уравнения системы (4.7). При подстановке в него формулы (4.9) это уравнение принимает вид

$$t_2 \varphi'(t_2) = 3\varphi(t_2).$$

Объединяя промежуточные формулы, получаем доказательство предложения 14.

Предложение 15. *При* $n \neq 0$, $N = m^2 + n^2 - ns \neq 0$ *все решения системы* (4.1) *являются алгебраическими поверхностями третьей или шестой степени с уравнениями*

$$v = x_2 y_1 + \left(\frac{m}{n} y_1 y_2 - \frac{1}{2n} x_1 y_1^2 - \frac{m}{6n^2} y_1^3\right) + C \left|(nx_1 - my_1)^2 - N(y_1^2 - 2ny_2)\right|^{3/2} + \\ + \frac{(N + 2ns)(nx_1 - my_1)}{6n^2 N^2}(2(nx_1 - my_1)^2 - 3N(y_1^2 - 2ny_2)), \tag{4.10}$$

где C *— произвольная константа.*

Решение второго уравнения системы (4.7) при $\xi = t_2^2/2 - Nt_1$ запишем в виде

$$H = \frac{N + 2sn}{N^2 n^2}\left(\frac{t_2^3}{3} - Nt_1 t_2\right) + \varphi(\xi).$$

Тогда ОДУ, получаемое на последнем этапе решения системы (4.7), имеет вид

$$2\xi\varphi' = 3\varphi. \tag{4.11}$$

Так возникает формула (4.10) с дробным показателем степени, которая, тем не менее, после возведения всего уравнения в квадрат, превращается в алгебраическое уравнение шестой степени.

Теперь остается разобрать последний из заявленных случаев, связанный с условиями

$$n = 0, \quad m \neq 0.$$

Заметим, что при этом и $N = m^2 + n^2 - ns \neq 0$.

Предложение 16. *При* $n = 0$, $m \neq 0$ *все решения системы* (4.1) *являются алгебраическими поверхностями третьей или шестой степени с уравнениями*

$$v = x_2 y_1 + x_1 y_2 - \frac{x_1^2 y_1}{m} + \frac{(m^2 - 2s^2) y_1^3}{3m^3} + \frac{2sy_1(x_1 y_1 - my_2)}{m^2} + C|sy_1^2 - 2m(x_1 y_1 - my_2)|^{3/2}, \tag{4.12}$$

где C *— произвольная константа.*

Для доказательства заметим, что здесь система (4.3) упрощается до вида

$$x_1\frac{\partial G}{\partial x_1}+y_1\frac{\partial G}{\partial y_1}+2y_2\frac{\partial G}{\partial y_2}=3G,\quad m\frac{\partial G}{\partial x_1}+y_1\frac{\partial G}{\partial y_2}=my_2-x_1y_1,$$

$$s\frac{\partial G}{\partial x_1}+m\frac{\partial G}{\partial y_1}-x_1\frac{\partial G}{\partial y_2}=y_1^2-sy_2.$$

Второе уравнение имеет решение $G=x_1y_2-\frac{1}{m}y_1x_1^2+H(y_1,x_1y_1-my_2)$.

Новая система двух уравнений записывается в виде ($t_1=y_1$, $t_2=x_1y_1-my_2$)

$$t_1\frac{\partial H}{\partial t_1}+2t_2\frac{\partial H}{\partial t_2}=3H,\quad m\frac{\partial H}{\partial t_1}+st_1\frac{\partial H}{\partial t_2}=t_1^2+\frac{2st_2}{m}.$$

Решение второго из них

$$H=\frac{m^2-2s^2}{3m^3}t_1^3+\frac{2s}{m^2}t_1t_2+\varphi(st_1^2-2mt_2)$$

подставим в первое уравнение, обозначив $\xi=st_1^2-2mt_2$. Здесь также получается ОДУ (4.11), что приводит к формуле (4.12), аналогичной доказанной в предложении 15, но более простой.

Подводя итоги этого раздела, а также учитывая информацию, полученную ранее, сформулируем следующий результат.

Теорема 2. *Всякая аффинно-однородная вещественная гиперповерхность, являющаяся интегральным многообразием одной из алгебр семейства* (2.14)*, оказывается алгебраической поверхностью степени* $k\in\{1,2,3,4,6\}$.

Формирование списка однородных многообразий, отвечающих семейству (2.15), также можно начать с гиперповерхностей Γ_6, заданных уравнениями (3.4). Основная же часть описания приводится в следующей теореме.

Теорема 3. *Аффинно-однородная гиперповерхность пространства* $\mathbb{C}^3$*, отличная от* (3.4) *и являющаяся интегральным многообразием какой-либо из алгебр семейства* (2.15) *при* $(m,n,s)\neq(0,0,0)$*, аффинно эквивалентна вблизи любой своей точки либо вещественной гиперплоскости*

$$v=0,$$

либо поверхности

$$v=x_1^3\ \ (x_1\neq 0),$$

либо одной из поверхностей вида

$$v=|y_2+(x_1^2+\gamma y_1^2)|^{3/2}$$

с некоторым $\gamma\in\mathbb{R}$.

Доказательство теоремы 3 можно получить по схеме, использованной при доказательстве теоремы 2. Так как этот случай является более простым по сравнению с предыдущим, то доказательство теоремы 3 опускаем.

Литература

[1] Cartan E. *Sur la geometrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes*, Ann. Math. Pura Appl. **11** (4), 17–90 (1932) (Oeuvres II, 2, 1231–1304).

[2] Fels G., Kaup W. *Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension* 5, Acta Math. **210**, 1–82 (2008).

[3] Лобода А.В. *Об определении однородной строго псевдо–выпуклой гиперповерхности по коэффициентам ее нормального уравнения*, Матем. заметки **73** (3), 419–423 (2003).

[4] Лобода А.В., Ходарев А.С. *Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей* 3*-мерного комплексного пространства*, Изв. вузов. Матем., № 10, 38–50 (2003).

[5] Демин А.М., Лобода А.В. *Пример* 2*-параметрического семейства аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей в* $\mathbb{C}^3$, Матем. заметки **84** (5), 791–794 (2008).

[6] Данилов М.С., Лобода А.В. *Об аффинной однородности индефинитных вещественных гиперповерхностей пространства* $\mathbb{C}^3$, Матем. заметки **88** (6), 866–883 (2010).

[7] Евченко В.К., Лобода А.В. 4*-мерные матричные алгебры и аффинная однородность вещественных гиперповерхностей пространства* $\mathbb{C}^3$, Вестник ВГУ. Физика. Математика, вып. 1, 108–118 (2009).

[8] Лобода А.В. *Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности* 3*-мерного комплексного пространства*, Вестник ВГУ. Физика. Математика, вып. 2, 71–91 (2009).

[9] Широков А.П., Широков П.А. *Аффинная дифференциальная геометрия* (Физматгиз, М., 1959).

[10] Azad H., Huckleberry A., Richthofer W. *Homogeneous CR manifolds*, J. Reine und Angew. Math. **358**, 125–154 (1985).

[11] Doubrov B.M., Komrakov B.P., Rabinovich M. *Homogeneous surfaces in the* 3*-dimensional affine geometry*, Geometry and Topology of Submanifolds. — VIII, World Scientific, 168–178 (1996).

[12] Beloshapka V.K., Kossovskiy I.G. *Homogeneous hypersurfaces in* $\mathbb{C}^3$*, associated with a model CR-cubic*, J. Geom. Anal. **20** (3), 538–564 (2010).

[13] Данилов М.С. *Примеры аффинно-однородных индефинитных вещественных гиперповерхностей пространства* $\mathbb{C}^3$, Вестник ВГУ. Физика. Математика, вып. 1, 97–106 (2010).

[14] Evchenko V.K., Loboda A.V. *One family of algebraic homogeneous surfaces*, Preprint, http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/sfb701/files/preprints/sfb11129.pdf

[15] Нгуен Тхи Тхюи Зыонг *О голоморфных свойствах одного семейства аффинно–однородных поверхностей*, Воронежская весенняя матем. школа (ВВМШ-2012), Воронеж, 2012 (Изд-во Воронежск. гос. ун-та, Воронеж, 2012), тезисы докл., с. 122–123.

[16] Лобода А.В. *Классификация аффинно-однородных невырожденных по Леви вещественных гиперповерхностей пространства* $\mathbb{C}^2$, Современ. пробл. матем. и механ. Т. VI, Математика, вып. 3. К 100-летию со дня рождения Н.В. Ефимова. Москва (Изд-во МГУ, Москва, 2011), с. 56–68.

[17] Лобода А.В. *Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности в* $\mathbb{C}^2$, Функц. анализ и его прилож. (в печати).

[18] Нгуен Тхи Тхюи Зыонг *Аффинные инварианты* 3*-го порядка однородных вещественных гиперповерхностей в* $\mathbb{C}^3$, Воронежская зимняя матем. школа (ВЗМШ-2012) Воронеж, 2012 (Изд-во Воронежск. гос. ун-та, Воронеж, 2012), тезисы докл., с. 156–158.

[19] Голебузов Д.А., Лобода А. В. *Об аффинно-однородных вещественных гиперповерхностях общего положения в* $\mathbb{C}^3$, Воронежская зимняя матем. школа (ВЗМШ-2012) Воронеж, 2012 (Изд-во Воронежск. гос. ун-та, Воронеж, 2012), тезисы докл., с. 50–51.

[20] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия* (Наука, М., 1979).

[21] Tanaka N. *On the pseudo-conformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables*, J. Math. Soc. Japan **14**, 397–429 (1962).

[22] Chern S.S., Moser J. K. *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. **133** (3), 219–271 (1974).

[23] Stanton N.K. *Infinitesimal CR automorphisms of rigid hypersurfaces*, Amer. J. Math. **117** (1), 141–167 (1995).

[24] Бишоп Р., Криттенден Р. *Геометрия многообразий* (Мир, М., 1963).

А.В. Лобода

профессор, кафедра высшей математики,
Воронежский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. 20-летия Октября, д. 84, г. Воронеж, 394006, Россия,

e-mail: lobvgasu@yandex.ru

В.К. Евченко

доцент, кафедра высшей математики,
Воронежский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. 20-летия Октября, д. 84, г. Воронеж, 394006, Россия,

e-mail: lera_evk@mail.ru

A.V. Loboda and V.K. Evchenko

Various representations of matrix Lie algebras related to homogeneous surfaces

Abstract. We construct a 3-parameter family of real homogeneous hypersurfaces in a 3-dimensional complex space. This family generalizes several examples that were published earlier. It contains both Levi nondegenerate surfaces (strictly pseudoconvex and indefinite ones) and surfaces with degenerate Levi form.

Unlike the known cumbersome descriptions of matrix algebras corresponding to the surfaces under consideration, we propose an upper triangular representation of these algebras with simple special bases. We show that all affinely homogeneous surfaces of the constructed family are algebraic ones of degree 1, 2, 3, 4, or 6.

Keywords: homogeneous manifold, matrix Lie algebra, complex space, real hypersurface, vector field.

A.V. Loboda

Professor, Chair of Higher Mathematics,
Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering,
84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006 Russia,

e-mail: lobvgasu@yandex.ru

V.K. Evchenko

Associate Professor, Chair of Higher Mathematics,
Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering,
84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006 Russia,

e-mail: lera_evk@mail.ru