ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 6 (517)

УДК 517.518

С.С. ВОЛОСИВЕЦ

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ P-ИЧНЫЙ ИНТЕГРАЛ И МОДИФИЦИРОВАННАЯ P-ИЧНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ПОЛУОСИ

Введение

Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{|j|\in\mathbf{N}}$, где для всех $|j|$ из $\mathbf{N}$ $p_j \in \mathbf{N}$, $2 \le p_j \le N$, $p_{-j} = p_j$. Положим $m_j = p_1 \cdot \ldots \cdot p_j$ при $j \in \mathbf{N}$, $m_0 = 1$ и $m_{-l} = 1/m_l$ при $l \in \mathbf{N}$. Каждому $x \in [0;\infty)$ можно сопоставить разложение

$$x = \sum_{j=1}^{k(x)} x_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} x_j/m_j, \tag{1}$$

где $0 \le x_j < p_j$ при $j \in \mathbf{Z}$. Оно определяется однозначно, если при $x = k/m_n$ брать разложения с конечным числом ненулевых x_i. Если $n \in \mathbf{N}$ записано в виде $n = \sum\limits_{j=1}^{k(n)} n_j m_{j-1}$, то по определению $\chi_n(x) = \prod\limits_{j=1}^{k(n)} \exp(2\pi i n_j x_j/p_j)$. При $n = 0$ полагаем $\chi_0(x) \equiv 1$. Если $y \in [0;\infty)$ имеет вид

$$y = \sum_{j=1}^{k(y)} y_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} y_j/m_j, \tag{1'}$$

где $0 \le y_j < p_j$ при $j \in \mathbf{Z}$, то по определению

$$x \oplus y = z = \sum_{j=1}^{\max(k(x),k(y))} z_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} z_j/m_j,$$

где $z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}$, $0 \le z_j < p_j$. Аналогично определяется операция $x \ominus y$.

В силу (1) и (1$'$) определим ядро

$$\chi(x,y) = \exp\left(2\pi i\left(\sum_{j=1}^{k(y)} x_j y_{-j} + \sum_{j=1}^{k(x)} x_{-j} y_j\right)\right),$$

для которого при $x, y, z \in \mathbf{R}_+$ вытекают следующие свойства:

$$1)\quad \chi(x,y) = \chi(y,x); \quad |\chi(x,y)| = 1; \tag{2}$$

$$2)\quad \chi(x,y) = \chi([x],\{y\})\chi([y],\{x\}), \tag{3}$$

где $[x]$ — целая часть числа x, а $\{x\}$ — дробная часть x (при этом $\chi(n,y)$, $n \in \mathbf{Z}_+$, совпадает на $[0,1)$ с $\chi_n(y)$);

$$3)\quad \chi(x \oplus z, y) = \chi(x,y)\chi(z,y); \quad \chi(x \ominus z, y) = \chi(x,y)\overline{\chi(z,y)} \tag{4}$$

для почти всех пар (x,z) при фиксированном y.

Для $f \in L(\mathbf{R}_+)$ мультипликативное $\mathbf{P}$-преобразование Фурье определим формулой $\widehat{f}(x) = F[f](x) = \int\limits_0^\infty f(y)\overline{\chi(x,y)}dy$. Из теоремы Фубини легко вытекает, что для $f, g \in L[0,\infty)$

$$\int_0^\infty f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_0^\infty \widehat{f}(x)g(x)dx.$$

Также по теореме Фубини для $f, g \in L[0;\infty)$ следует существование свертки

$$f * g(x) = \int_0^\infty f(x \ominus v)g(v)dv.$$

Как и для обычного преобразования Фурье, из сходимости f_n к f в $L[0,\infty)$ следует равномерная сходимость $\widehat{f}_n$ к $\widehat{f}$ на $[0;\infty)$.

Для $f \in L^2[0;\infty)$ мультипликативное преобразование $F[f]$ определяется как предел последовательности $\int\limits_0^{m_n} f(y)\overline{\chi(x,y)}dy$ в $L^2[0;\infty)$. В этом случае имеет место равенство Планшереля $\|F[f]\|_{L^2[0;\infty)} = \|f\|_{L^2[0,\infty)}$ ([1], с. 131–133; там же можно найти доказательства остальных указанных выше свойств). Из равенства Планшереля следует теорема единственности: если $\widehat{f} = \widehat{g}$ почти всюду на $[0;\infty)$ и $f, g \in L[0;\infty)$, то $f = g$ почти всюду.

Далее через X_E будем обозначать характеристическую функцию множества E, а через I_k^n — полуинтервал $[k/m_n; (k+1)/m_n)$. Будем называть функцию $\mathbf{P}$-непрерывной в точке $x \in [0;\infty)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{0<h<1/m_n} |f(x \oplus h) - f(x)| = 0$.

В данной работе обобщаются понятия модифицированного сильного двоичного интеграла и модифицированной сильной двоичной производной, введенные в [2], на случай произвольной ограниченной последовательности $\mathbf{P}$. Эти понятия являются континуальным аналогом модифицированных интеграла и производной Оневира [3] для систем $\{\chi_n\}$ при условии $p_j = p$. Более подробно с историей вопроса можно познакомиться в [2]. Затем с помощью неравенства типа Харди (теорема 3.1), обобщающего соответствующий двоичный результат из [4], вводим модифицированные интеграл и производную для функций из $\mathbf{P}$-ичного пространства Харди $H(\mathbf{P}, \mathbf{R}_+)$ и изучаем их свойства. Дадим необходимые определения, связанные с $H(\mathbf{P}, \mathbf{R}_+)$.

Пусть D — множество всех I_k^n, где $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}_+$. Для $f \in L_{\text{loc}}[0;\infty)$ введем $\mathbf{P}$-максимальную функцию

$$M(f)(x) = \sup_{x\in I, I\in D}\left|\frac{1}{|I|}\int_I f(t)dt\right|,$$

где $x \in [0;\infty)$, $|I|$ — длина I. Положим по определению $H(\mathbf{P}, \mathbf{R}_+) = \{f \in L_{\text{loc}}(\mathbf{R}_+) : M(f) \in L(\mathbf{R}_+)\}$. Как и в случае обычных пространств Харди, легко показать, что $H(\mathbf{P}, \mathbf{R}_+) \subset L(\mathbf{R}_+)$. По аналогии с этим определением для $A_n = [0; m_n)$, $n \in \mathbf{Z}_+$, и $f \in L(A_n)$ можно рассмотреть $M_n(f,x) = \sup\left|\frac{1}{|I|}\int\limits_I f(t)dt\right|$, где $\sup$ берется по таким I, что $x \in I$, $I \in D$, $I \subset A_n$. По определению $H(\mathbf{P}, A_n) = \{f \in L(A_n) : M_n(f) \in L(A_n)\}$. Нормами в $H(\mathbf{P}, \mathbf{R}_+)$ и $H(\mathbf{P}, A_n)$ являются $\|f\|_{H(\mathbf{R}_+)} = \|M(f)\|_{L(\mathbf{R}_+)}$ и $\|f\|_{H(A_n)} = \|M_n(f)\|_{L(A_n)}$ соответственно.

1. Вспомогательные результаты

Лемма 1.1 ([1], с. 134). *Пусть $f \in L(\mathbf{R}_+)$, $\widehat{f} \in L(\mathbf{R}_+)$. Тогда в каждой точке $\mathbf{P}$-непрерывности функции f выполняется равенство*

$$f(x) = \int_0^\infty \widehat{f}(y)\chi(x,y)dy.$$

Следующая лемма является аналогом теоремы 10 из ([5], с. 429).

Лемма 1.2. *Пусть* $f \in L(\mathbf{R}_+)$ *и* $S_y(f)(x) = \int\limits_0^y \widehat{f}(t)\chi(x,t)dt$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_{m_n}(f) - f\|_{L(\mathbf{R}_+)} = 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_{1/m_n}(f)\|_{L(\mathbf{R}_+)} = \widehat{f}(0)$.

Доказательство. Пусть $n > 0$. Воспользуемся равенством ([1], с. 134) $\int\limits_0^{m_n} \widehat{f}(y)\chi(x,y)dy = m_n \int\limits_0^{1/m_n} f(x\oplus u)du$. Из него получим $\|S_{m_n}(f) - f\|_{L(\mathbf{R}_+)} \le m_n \int\limits_0^{1/m_n} \|f(x\oplus u) - f(x)\|_{L(\mathbf{R}_+)}$. Так как $f \in L(\mathbf{R}_+)$, обычным образом показывается, что $\|f(x\oplus u) - f(x)\|_{L(\mathbf{R}_+)} \to 0$ при $u \to 0$, откуда и следует первое равенство леммы. Для доказательства второго равенства отметим, что

$$S_y = f * D_y = \int_0^\infty f(t)\overline{D_y(t\ominus x)}dt,$$

где $D_y(x) = \int\limits_0^y \chi(x,t)dt$. Согласно формуле (1.5.21) и утверждению 11.1.3 из [1] имеет место тождество

$$D_{1/m_n}(x) = m_n^{-1} X_{[0,m_n)}(x), \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{5}$$

Таким образом, получаем равенство $T_n f := S_{1/m_n}(f) - m_n^{-1} X_{[0;m_n)} \int\limits_0^{m_n} f(x)dx = m_n^{-1}(f * X_{[0;m_n)} - X_{[0;m_n)} \int\limits_0^{m_n} f(x)dx)$ и в силу известных свойств свертки ([1], с. 128) $\|T_n f\|_{L(\mathbf{R}_+)} \le \|f\|_{L(\mathbf{R}_+)} + \left|\int\limits_0^{m_n} f(x)dx\right| \le 2\|f\|_{L(\mathbf{R}_+)}$.

Пусть теперь g — ступенчатая, постоянная на всех I_k^m при фиксированном m функция с компактным носителем в смысле топологии, связанной с $\oplus$. Выберем $r \in \mathbf{N}$ такое, что носитель g содержится в $[0, m_r)$. В силу равенства (5) функция $S_{1/m_n}(g)(x)$ равна нулю при $x \ge m_n$ и равна $m_n^{-1} \int\limits_0^{m_n} g(t)dt$ на $[0; m_n)$. В итоге $T_n g = 0$ при $n \ge r$. Так как функции такого вида плотны в $L(\mathbf{R}_+)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n f\|_{L(\mathbf{R}_+)} = 0$ для всех $f \in L(\mathbf{R}_+)$. Но тогда

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_{1/m_n}(f)\|_{L(\mathbf{R}_+)} = \lim_{n\to+\infty} \left\| m_n^{-1} X_{[0;m_n)} \int_0^{m_n} f(x)dx \right\|_{L(\mathbf{R}_+)} = \lim_{n\to+\infty} \left| \int_0^{m_n} f(x)dx \right| = \widehat{f}(0). \quad \Box$$

Леммы 1.3 и 1.4 в случае $p_k = 2$ доказаны в [4].

Лемма 1.3. *Пусть*

$$a_{k,n} = m_n^{-1}\chi(k/m_n, x) X_{[0;m_n)}, \tag{6}$$

где $k \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{Z}_+$. *Тогда* $\widehat{a}_{k,n} = X_{[k/m_n,(k+1)/m_n)} = X_{I_k^n}$.

Доказательство. В силу (4) $m_n \widehat{a}_{k,n} = \int\limits_0^{m_n} \overline{\chi(y,x)}\chi(y,k/m_n)dy = \int\limits_0^{m_n} \overline{\chi(x\ominus k/m_n, y)}dy$. Используя (5), получаем $m_n\widehat{a}_{k,n} = m_n X_{[0;1/m_n)}(x\ominus k/m_n)$. Известно, что неравенство $0 \le x\ominus k/m_n < 1/m_n$ равносильно включению $x \in I_k^n$ ([1], § 1.5), поэтому $m_n\widehat{a}_{k,n} = m_n X_{I_k^n}$. $\Box$

Лемма 1.4. *Если* $k \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{Z}_+$, *то существует единственное* $r \in \mathbf{Z}$ *такое, что*

$$I_k^n \subset B_r := [m_r, m_{r+1}).$$

Доказательство. Пусть I_k^n имеет непустое пересечение и с B_{r-1} и с B_r. Если $1/m_n > m_r$, то $1/m_n \ge m_{r+1}$. Тогда $I_k^n \supset [0; m_{r+1})$. Противоречие с тем, что $k \in \mathbf{N}$. Пусть $1/m_n \le m_r$, тогда $m_r = l/m_n$, где $l \in \mathbf{N}$. В результате $l/m_n \in I_k^n$, где $l \ne k$ (m_r по условию лежит в I_k^n и не является его левым концом). Таким образом, снова получаем противоречие и I_k^n может пересекаться лишь с одним множеством типа B_r. Так как множества B_r при разных r не пересекаются и их объединение есть $(0;\infty)$, то I_k^n должен содержаться в том единственном B_r, с которым он пересекается. $\square$

Назовем функцию $a(x)$ атомом на $[0;1)$, если либо $a\equiv 1$, либо $\int\limits_0^1 a(x)dx=0$, $\mathrm{supp}(a)\subset I_k^n$ для некоторых $n\in\mathbf{N}$, $k\in\mathbf{Z}_+$ и $|a(x)|\le |I_k^n|^{-1}$ на $[0;1)$. Здесь и далее $\mathrm{supp}(a)=\{x: a(x)\ne 0\}$.

Лемма 1.5 ([6]). *Функция $f(x)$ принадлежит $H(\mathbf{P},A_0)$ тогда и только тогда, когда $f=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\lambda_i a_i$ в $L[0;1)$, где $\sum\limits_{i=0}^{\infty}|\lambda_i|<\infty$, a_i — атомы на $[0;1)$. При этом $C_1\sum\limits_{i=0}^{\infty}|\lambda_i|\le \|f\|_{H(A_0)}\le C_2\sum\limits_{i=0}^{\infty}|\lambda_i|$ для любого такого атомарного разложения f, где $C_1,C_2>0$ и зависят лишь от константы N в определении последовательности $\mathbf{P}$.*

2. Модифицированные P-ичный интеграл и P-ичная производная

Рассмотрим ступенчатую финитную функцию $W_n(x)$, $n\in\mathbf{N}$, равную $p_1+\dots+p_n+p_1+\dots+p_k-(n+k+1)$ на $[1/m_{k+1};1/m_k)$ при $k\in\mathbf{N}$, и $p_{|k|+1}+\dots+p_n-(n-|k|+1)$ на $[m_{|k|-1};m_{|k|})$ при $-n\le k\le 0$ (при $k=-n$ $W_n(x)=-1$ на $[m_{n-1};m_n)$). Пусть $W_n(x)=0$ на $[m_n;\infty)$. В силу условия $p_k\le N$ легко видеть, что $W_n\in L[0;\infty)$. Если для некоторой функции $f\in L(\mathbf{R}_+)$ найдется функция $g\in L(\mathbf{R}_+)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|f*W_n-g\|_{L(\mathbf{R}_+)}=0$, то g назовем модифицированным сильным мультипликативным интегралом (МСМИ) для f (обозначение $g=J(f)$).

Теорема 2.1. *Если $f,g\in L(\mathbf{R}_+)$, то $g=J(f)$ тогда и только тогда, когда $\widehat{g}(0)=0$ и*

$$\widehat{g}(x)=\widehat{f}(x)h(x) \tag{7}$$

при $x>0$, где $h(x)=1/m_n$ при $x\in B_n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f,g\in L(\mathbf{R}_+)$ и $g=J(f)$. В силу свойств свертки ([1], с. 129) получаем, что $\widehat{g}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{f}(x)\widehat{W}_n(x)$ равномерно на $\mathbf{R}_+$. Применяя определение D_y и преобразование Абеля, получаем

$$\begin{aligned}\widehat{W}_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(p_1+\dots+p_n+p_1+\dots+p_k-(n+k+1))(D_{1/m_k}(x)-D_{1/m_{k+1}}(x))+\\+\sum_{k=-n}^{0}(p_{|k|+1}+\dots+p_n-(n-|k|+1))(D_{m_{|k|}}(x)-D_{m_{|k|-1}}(x))=\\=\sum_{k=1}^{\infty}(p_k-1)D_{1/m_k}(x)+\sum_{k=0}^{n-1}D_{m_k}(x)(p_{k+1}-1)-D_{m_n}.\end{aligned}$$

В силу (5) при $x\in B_l$, $l\ge 0$,

$$\widehat{W}_n(x)=\sum_{k=l+1}^{\infty}(p_k-1)m_k^{-1}=\sum_{k=l+1}^{\infty}(1/m_{k-1}-1/m_k)=1/m_l. \tag{8}$$

Аналогичное равенство получается при $l=-1,\dots,-n$, а при $l<-n$ $\widehat{W}_n(x)=0$. В частности, для всех $n\in\mathbf{N}$ $\widehat{W}_n(0)=0$, отсюда $\widehat{g}(0)=0$. Ясно, что для любой точки $x>0$ верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{W}_n(x)=h(x)$. Поэтому $\widehat{g}(x)=\widehat{f}(x)h(x)$ при $x>0$.

Достаточность. Пусть $f,g\in L(\mathbf{R}_+)$ таковы, что $\widehat{g}(0)=0$ и выполнено условие (7). Докажем, что g является МСМИ для f. В силу формулы (8) при $n,k\in\mathbf{N}$ имеем

$$(f*W_n-f*W_k)\widehat{\ }=\widehat{f}(\widehat{W_n}-\widehat{W_k})=\widehat{f}h(X_{[0;1/m_n)}-X_{[0;1/m_k)}). \tag{9}$$

Поскольку $\widehat{X}_{[0,m_n)}(x) = \int\limits_0^{m_n} \overline{\chi(x,y)}dy = D_{m_n}(x)$, D_{m_n} и X_{A_n} действительны, то согласно лемме 1.1 $\widehat{D}_{m_n} = X_{A_n}$ при $n \in \mathbf{Z}_+$. Далее

$$(S_{1/m_n}(g) - S_{1/m_k}(g))\widehat{\ } = \widehat{g}(\widehat{D}_{1/m_n} - \widehat{D}_{1/m_k}) = \widehat{f}h(X_{[0;1/m_n)} - X_{[0;1/m_k)}). \tag{10}$$

Сравнивая (10) с (9), получаем по теореме единственности (правая часть (10) финитна и ограничена, поэтому принадлежит $L^2(\mathbf{R}_+)$)

$$\|f * W_n - f * W_k\|_{L(\mathbf{R}_+)} = \|S_{1/m_n}(g) - S_{1/m_k}(g)\|_{L(\mathbf{R}_+)} \leq \|S_{1/m_n}(g)\|_{L(\mathbf{R}_+)} + \|S_{1/m_k}(g)\|_{L(\mathbf{R}_+)}.$$

Так как $\widehat{g}(0) = 0$, то в силу леммы 1.2 правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $n, k \to \infty$. Итак, $\{f * W_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $L(\mathbf{R}_+)$ и сходится к некоторой функции $G \in L(\mathbf{R}_+)$. Тогда $G = J(f)$ и по первой части теоремы $\widehat{G} = \widehat{f}h$, откуда $\widehat{G} = \widehat{g}$ и по теореме единственности $G = g$ в $L(\mathbf{R}_+)$. $\square$

Теорема 2.2. *Каждая из функций $a_{k,n}$, определяемых равенством* (6), *имеет МСМИ и является собственной функцией оператора J с собственным значением $1/m_r$, где r однозначно определяется по лемме* 1.4 *вложением $I_k^n \subset B_r$.*

Доказательство. По лемме 1.3 имеем $(a_{k,n} * W_l)\widehat{\ } = X_{I_k^n}\widehat{W}_l$. Последняя функция ограничена, финитна и измерима, следовательно, принадлежит $L(\mathbf{R}_+)$. Так как $a_{k,n}$ равномерно $\mathbf{P}$-непрерывны, $W_l \in L(\mathbf{R}_+)$, то их свертка $\mathbf{P}$-непрерывна. Поэтому согласно лемме 1.1 $a_{k,n} * W_l = \int\limits_0^{\infty} X_{I_k^n}(y)\widehat{W}_l(y)\chi(x,y)dy$. По лемме 1.4 найдем $r \in \mathbf{Z}$ такое, что $I_k^n \subset B_r$. Тогда при $l \geq -r$ в силу (8) и абзаца после (8) $\widehat{W}_l(y) = 1/m_r$ для $y \in B_r$, откуда $(a_{k,n} * W_l)(x) = m_r^{-1}\int\limits_0^{\infty} X_{I_k^n}\chi(x,y)dy$. Но по леммам 1.1 и 1.3 правая часть равенства равна $m_r^{-1}a_{k,n}$. В пределе при $l \to \infty$ получается утверждение теоремы.

Следствие 2.1. $J(a_{1,n}) = m_n a_{1,n}$.

Действительно, $[1/m_n; 2/m_n) \subset [1/m_n; 1/m_{n-1})$, т. е. $r = -n$.

Следствие 2.2. Линейный оператор J не ограничен на своей области определения.

Следствие 2.3. $J(a_{k,0}) = m_r^{-1}a_{k,0}$, где $m_r \leq k < m_{r+1}$.

Согласно замечанию к (3) $a_{k,0}$ можно отождествить с χ_k и получить формулы действия оператора J на эти функции.

Рассмотрим теперь последовательность ядер

$$\Lambda_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=1}^{p_k-1}\chi(j/m_k, x)X_{[0;m_k)}(x)m_k^{-2}.$$

Если для $f \in L(\mathbf{R}_+)$ существует $\phi \in L(\mathbf{R}_+)$ такая, что $\lim\|f * \Lambda_n - \phi\|_{L(\mathbf{R}_+)} = 0$, то $\phi = D(f)$ назовем модифицированной сильной мультипликативной производной (МСМП) для f.

Теорема 2.3. *Если для $f \in L(\mathbf{R}_+)$ существует МСМП $\phi \in L(\mathbf{R}_+)$, то $\widehat{\phi}(0) = 0$ и $\widehat{\phi}(x) = \widehat{f}(x)/h(x)$ при $x > 0$, где $h(x)$ определена в условии теоремы* 2.1.

Доказательство. Если $\phi = D(f)$ существует, то отсюда следует, что

$$\widehat{\phi}(x) = \lim_{n\to\infty}\widehat{f}(x)\widehat{\Lambda}_n(x) \tag{11}$$

равномерно на $[0;\infty)$. Но

$$\widehat{\Lambda}(x)=\int_0^\infty \sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=1}^{p_k-1}\chi(j/m_k,t)m_k^{-2}X_{[0;m_k)}(t)\overline{\chi(x,t)}dt=$$

$$=\sum_{k=-n}^{n}\int_0^{m_k}\sum_{j=1}^{p_k-1}\overline{\chi(x\ominus j/m_k,t)}m_k^{-2}dt=\sum_{k=-n}^{n}m_k^{-2}\sum_{j=1}^{p_k-1}D_{m_k}(x\ominus j/m_k).$$

По формуле (5) $\widehat{\Lambda}_n(x)=\sum\limits_{k=-n}^{n}m_k^{-1}\sum\limits_{j=1}^{p_k-1}X_{[0;1/m_k)}(x\ominus j/m_k)=\sum\limits_{k=-n}^{n}m_k^{-1}X_{B_{-k}}(x)$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{\Lambda}_n(x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}m_kX_{B_k}(x)$ при $x\geq 0$. Ясно, что при $x>0$ сумма ряда в правой части равна $h(x)$, а при $x=0$ она равна нулю. Подставляя эти равенства в (11), доказываем теорему.

Следствие 2.4. Если для $f\in L(\mathbf{R}_+)$ существует МСМП $D(f)$ и при этом $\widehat{f}(0)=0$, то для $D(f)$ существует МСМИ, причем $J(D(f))=f$.

Теорема 2.4. *Если для $f\in L(\mathbf{R}_+)$ существует МСМИ $J(f)$ и $\widehat{f}(0)=0$, то для $J(f)$ существует МСМП $D(J(f))=f$.*

Доказательство. Нужно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|J(f)*\Lambda_n-f\|_{L(\mathbf{R}_+)}=0$. Заметим, что $(J(f)*\Lambda_n)\widehat{\ }=\widehat{J}(f)\widehat{\Lambda}_n$, причем при доказательстве теоремы 2.3 было установлено, что $\widehat{\Lambda}_n(x)=\sum\limits_{k=-n}^{n}m_k^{-1}X_{B_{-k}}(x)$ — ограниченная функция. Из определения Λ_n и свойства 1.5.4 в [1] следует, что Λ_n постоянны на I_k^n, т. е. равномерно $\mathbf{P}$-непрерывны на $\mathbf{R}_+$. Поэтому свертка $J(f)*\Lambda_n$ является $\mathbf{P}$-непрерывной на $\mathbf{R}_+$ и по лемме 1.1

$$(J(f)*\Lambda_n)(x)=\int_0^\infty \widehat{f}(t)h(t)\sum_{k=-n}^{n}m_kX_{B_k}(t)\chi(x,t)dt.$$

Но $h(t)\sum\limits_{k=-n}^{n}m_kX_{B_k}(t)=X_{[1/m_n;m_{n+1})}(t)$. В итоге получаем, что $(J(f)*\Lambda_n)(x)=\int\limits_{1/m_n}^{m_{n+1}}\widehat{f}(t)\chi(x,t)dt=S_{m_{n+1}}(f)(x)-S_{1/m_n}(f)(x)$. Так как $\widehat{f}(0)=0$, то по лемме 1.2 первое слагаемое правой части стремится к $f(x)$, а второе — к нулю по норме $L(\mathbf{R}_+)$. $\square$

Следствие 2.5. Каждая из функций $a_{k,n}$, где $k\in\mathbf{N}$, $n\in\mathbf{Z}_+$, является собственной функцией оператора D, причем $D(a_{k,n})=m_ra_{k,n}$, где r определяется вложением $I_k^n\subset B_r$.

Следствие 2.6. Оператор D не ограничен на своей области определения.

3. Аналог неравенства Харди для мультипликативного преобразования Фурье

Как известно ([1], с. 38), система $\{b_{k,n}\}_{k=0}^\infty$, где $b_{k,n}(x)=m_n^{1/2}a_{k,n}(x)$, является ортонормированной на $A_n=[0;m_n)$ для всех $n\in\mathbf{Z}_+$. Для $f\in L(A_n)$ пусть $\widehat{f}(k,n):=\int\limits_0^1 f(t)\overline{b_{k,n}(t)}dt$.

Лемма 3.1. *Пусть $f\in L(A_n)$ и $S_m(f)$ — частичная сумма ряда Фурье по системе $\{b_{k,n}\}_{k=0}^\infty$. Тогда имеет место неравенство $\|S_{m_nm_r}(f)-f\|_{L(A_n)}\leq 2\omega(f;1/m_r)_{L(A_n)}$, где*

$$\omega(f;\delta)_{L(A_n)}=\sup_{0\leq h\leq\delta}\int_0^{m_n-h}|f(x+h)-f(x)|dx,\quad r\in\mathbf{N}.$$

Доказательство. Ясно, что при $i \in \mathbf{Z}_+$, $k \in [0; m_n)$ верно $i + k/m_n = i \oplus k/m_n$. Поэтому для аналога ядра Дирихле $L_s = \sum\limits_{k=0}^{s-1} b_{k,n}$ по системе $\{b_{k,n}\}$ имеем в силу (3) и (4)

$$L_{m_n m_r}(y) = m_n^{-1/2} \sum_{i=0}^{m_r-1} \sum_{k=im_n}^{(i+1)m_n-1} \chi(k/m_n, y) =$$
$$= m_n^{-1/2} \sum_{i=0}^{m_r-1} \sum_{k=0}^{m_n-1} \chi(i,y)\chi(k/m_n, y) = m_n^{-1/2} \sum_{i=0}^{m_r-1} \chi_i(y) \sum_{k=0}^{m_n-1} \chi(k/m_n, y).$$

В силу формулы (1.5.21) и 11.1.1 из [1] (см. также (5)) имеем $\sum\limits_{i=0}^{m_r-1} \chi_i(y) = m_r X_{[0;1/m_r)}(y)$, а $\sum\limits_{k=0}^{m_n-1} \chi(k/m_n, y) = m_n X_{[0;1)}$. Таким образом, при $x \in I_l^r$

$$S_{m_n m_r}(f)(x) = m_n^{-1} \sum_{k=0}^{m_n m_r-1} \int_{A_n} f(t)\overline{\chi(k/m_n, t)}\chi(k/m_n, x)dt =$$
$$= m_n^{-1} \int_{A_n} f(t) m_r m_n X_{[0;1/m_r)}(x \ominus t) X_{[0;1)}(x \ominus t)dt =$$
$$= m_r \int_{A_n} f(t) X_{[0;1/m_r)}(x \ominus t)dt = m_r \int_{I_l^r} f(t)dt. \quad (12)$$

Далее поступаем аналогично доказательству леммы 4 в [4]. При $x \in [i; i+1)$ вводим $I_{i,l}^r := [i + l/m_r; i + (l+1)/m_r)$ и в силу (12)

$$\int_i^{i+1} |S_{m_n m_r}(f)(x) - f(x)|dx \le \sum_{l=0}^{m_r-1} \int_{I_{i,l}^r} |I_{i,l}^r|^{-1} \int_{I_{i,l}^r} |f(t) - f(x)|dt\, dx.$$

Затем, применяя тождество П.Л. Ульянова ([1], с. 223), получаем

$$\int_i^{i+1} |S_{m_n m_r}(f)(x) - f(x)|dx \le 2m_r \int_0^{1/m_r} \left(\int_i^{i+1-u} |f(y+u) - f(y)|dy \right) du.$$

Суммируя эти неравенства по $i = 0, 1, \dots, m_n - 1$, находим

$$\|S_{m_n m_r}(f) - f\|_{L(A_n)} \le 2m_r \int_0^{1/m_r} \left(\int_0^{m_n-u} |f(y+u) - f(y)|dy \right) du \le 2\omega(f; m_r^{-1})_{L(A_n)}. \quad \square$$

Лемма 3.2. *Пусть* $f \in H(\mathbf{P}, A_n)$, $n \in \mathbf{Z}_+$ *и* $\widehat{f}(0,n) = 0$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}(k,n)|/k \le C_3 \|f\|_{H(A_n)} m_n^{-1/2}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{P}' = \{p_n, p_{n-1}, \dots, p_1, p_1, p_2, \dots\}$. Рассмотрим $H(\mathbf{P}', A_0)$. Из определения легко следует, что $f(x) \in H(\mathbf{P}, A_n)$ тогда и только тогда, когда $f(m_n x) \in H(\mathbf{P}', A_0)$. Пусть $f(m_n x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_i a_i(x)$ — атомарное разложение из леммы 1.5. Тогда $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_i a_i(x/m_n)$ при $x \in A_n$. При этом $\operatorname{supp}(a_i(x)) \subset I'$, где I' имеет вид $[k/m'_j; (k+1)/m'_j)$, а m'_j — произведение первых j элементов из $\mathbf{P}'$. После умножения на m_n I' превратится в интервал I вида $[k/m_{j-n}; (k+1)/m_{j-n}) \in D$. Носитель $a_i(x/m_n)$ будет содержаться в I, при этом $a_i(x/m_n) \le m'_j$ для всех $x \in I$.

Пусть $b_i(x) = a_i(x/m_n)$. По неравенству Бесселя

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|\widehat{b}_i(k,n)|^2\Big)^{1/2} \le \Big(\int_{A_n}|b_i(x)|^2dx\Big)^{1/2} = \Big(\int_{A_n} m_n|a_i(x/m_n)|^2dx/m_n\Big)^{1/2} =$$

$$\Big(\int_{A_0} m_n|a_i(t)|^2dt\Big)^{1/2} = \Big(\int_{I'} m_n|a_i(t)|^2dt\Big)^{1/2} \le (m_nm'_j)^{1/2},$$

т. к. $|a_i| \le m'_j$ на I'. По свойству 1.5.4 из [1] $\chi(k/m_n,t)$ постоянна на I при $k/m_n < 1/|I| = m_{j-n}$, т. е. при $k < m'_j$. При таких k получаем

$$|\widehat{b}_i(k,n)| = m_n\Big|\int_{I'} a_i(t)dt\Big| = m_n\Big|\int_{A_0} a_i(t)dt\Big| = 0$$

и по неравенству Коши–Буняковского

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\widehat{b}_i(k,n)|/k \le \Big(\sum_{k\ge m'_j}|\widehat{b}_i(k,n)|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k\ge m'_j}k^{-2}\Big)^{1/2} \le (m'_jm_n)^{1/2}(m'_j)^{-1/2},$$

откуда следует

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\widehat{f}(k,n)|/k \le \sum_{i=0}^{\infty}|\lambda_i|\sum_{k=1}^{\infty}|\widehat{b}_i(k,n)|/k \le C_1^{-1}m_n^{1/2}\|f(m_nx)\|_{H(A_0)}.$$

Так как для любой функции $f \in L(A_n)$ верно $\|f(m_nx)\|_{L(A_0)} = m_n^{-1}\|f(x)\|_{L(A_n)}$, то $\|f(m_nx)\|_{H(A_0)} = m_n^{-1}\|f(x)\|_{H(A_n)}$ и окончательно

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\widehat{f}(k,n)|/k \le C_1^{-1}m_n^{-1/2}\|f(x)\|_{H(A_n)},$$

где C_1 — константа из леммы 1.5, соответствующая и $\mathbf{P}$, и $\mathbf{P}'$. □

Теорема 3.1. *Пусть $f \in H(\mathbf{P},\mathbf{R}_+)$ и $\widehat{f}(0) = 0$. Тогда имеет место неравенство*

$$\int_{\mathbf{R}_+}|\widehat{f}(x)|/x\,dx \le C_3\|f\|_{H(\mathbf{R}_+)}.$$

Доказательство. Пусть $f_n(x) = (f(x) - m_n^{-1}\int\limits_{A_n} f(t)dt)X_{A_n}(x)$. Тогда $\widehat{f}_n(0) = \int\limits_{A_n} f_n(x)dx = 0$. По лемме 3.1 имеем в $L(\mathbf{R}_+)$

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\Big\{\sum_{k=m_i}^{m_{i+1}-1}\widehat{f}_n(k,n)m_n^{-1/2}\chi(k/m_n,x)\Big\}X_{A_n}(x).$$

По леммам 1.1 и 1.3 получаем

$$\widehat{f}_n(x) = m_n^{1/2}\sum_{i=0}^{\infty}\Big\{\sum_{k=m_i}^{m_{i+1}-1}\widehat{f}_n(k,n)X_{I_k^n}(x)\Big\}, \tag{13}$$

где ряд справа сходится равномерно к $\widehat{f}_n(x)$. Так как I_k^n при разных k не пересекаются, то, во-первых, фигурные скобки в (13) можно опустить, и, во вторых, можно поставить модули так:

$$|\widehat{f}_n(x)| = m_n^{1/2}\sum_{k=1}^{\infty}|\widehat{f}_n(k,n)|X_{I_k^n}.$$

Поэтому

$$\int_{\mathbf{R}_+} |\widehat{f}_n(x)|x^{-1}dx = \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}_n(k,n)| m_n^{1/2} \int_{k/m_n}^{(k+1)/m_n} x^{-1}dx =$$

$$= m_n^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}_n(k,n)| \ln(1+1/k) \le m_n^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}_n(k,n)| k^{-1}.$$

Так как $f_n(x)$ на A_n отличается от $f(x)$ на константу, то при $k \in \mathbf{N}$ верно $\widehat{f}_n(k,n) = \widehat{f}(k,n)$. Поэтому по лемме 3.2

$$\int_{\mathbf{R}_+} |\widehat{f}_n(x)|x^{-1}dx \le C_3 \|f\|_{H(A_n)} \le C_3 \|f\|_{H(\mathbf{R}_+)}.$$

Так как $f(x) - f_n(x) = S_{1/m_n}(f)(x)$ на A_n (см. доказательство леммы 1.2), то по лемме 1.2 $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L(\mathbf{R}_+)} = 0$, откуда $\widehat{f}_n(x)$ сходится к $\widehat{f}(x)$ на $\mathbf{R}_+$ и по теореме Фату, верной и для неограниченных множеств ([7], с. 428), $\int\limits_{\mathbf{R}_+} |\widehat{f}(x)|x^{-1}dx \le C_3\|f\|_{H(\mathbf{R}_+)}$. $\square$

Замечание. Доказательство теоремы 3.1, данное в [4] для $p_k = 2$, основано на свойстве $\chi(k/m_n, x) = \chi_k(x/m_n)$, которое верно, когда все p_k равны. В общем случае это не так. Пусть $p_i = 2$, когда i нечетно, $p_i = 3$, когда i четно, $k = 21$, $x = 4/3$, $n = 4$. Тогда элементарный подсчет показывает, что $\chi(k, x/m_n) = \exp(2\pi i/3) \ne \exp(\pi i) = \chi(k/m_n, x)$.

4. Свойства модифицированного P-ичного интеграла в $H(\mathbf{P}, R_+)$

Результаты этого раздела являются обобщением соответствующих двоичных результатов из [2].

Теорема 4.1. *Пусть $f \in H(\mathbf{P}, \mathbf{R}_+)$, тогда на $\mathbf{R}_+$ существует равномерный предел $J(f)(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(f * W_n)(x)$. При этом*

$$\|J(f)\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+)} \le NC_3\|f\|_{H(\mathbf{R}_+)}.$$

Доказательство. В силу (8) и следующего за ним абзаца легко видеть, что $\widehat{W}_n(x) \le p_{k+1}/x$ при $x \in B_k$, $k \ge -n$, а на остальных B_k $\widehat{W}_n = 0$. Поэтому $|(\widehat{f * W_n})(x)| \le N|\widehat{f}(x)|x^{-1}X_{[1/m_n;\infty)}$. Из этого неравенства по теореме 3.1 следует, что $(\widehat{f * W_n}) \in L(\mathbf{R}_+)$ и, т. к. W_n равномерно $\mathbf{P}$-непрерывна на $\mathbf{R}_+$, то $f * W_n$ $\mathbf{P}$-непрерывна на $\mathbf{R}_+$. По лемме 1.1 получаем

$$f * W_n(x) = \int_0^\infty \widehat{f}(t)\widehat{W}_n(t)\chi(x,t)dt = \int_{1/m_n}^\infty \widehat{f}(t)h(t)\chi(x,t)dt.$$

С другой стороны, имеем при $n > l$

$$|(f * W_n)(x) - (f * W_l)(x)| \le \int_{1/m_n}^{1/m_l} |\widehat{f}(t)h(t)|dt \le N\int_{1/m_n}^{1/m_l} |\widehat{f}(t)|/t\, dt.$$

По теореме 3.1 правая часть последнего неравенства при $l \to \infty$ стремится к нулю, откуда следует равномерная фундаментальность $f * W_n(x)$ и, как следствие, существование равномерного предела $\lim\limits_{n\to\infty}(f * W_n)(x)$. Далее

$$\|f * W_n\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+)} \le \int_{1/m_n}^\infty |\widehat{f}(t)h(t)|dt \le NC_3\|f\|_{H(\mathbf{R}_+)}.$$

Устремляя n к бесконечности, получаем нужное неравенство. $\square$

Лемма 4.1. *Пусть $f \in H(A_n)$, $n \in \mathbf{Z}_+$, и $\int\limits_{A_n} f(t)dt = 0$. Продолжим функцию f нулем на $[m_n;\infty)$. Тогда продолженная функция g принадлежит $H(\mathbf{P}, \mathbf{R}_+)$ и $\|g\|_{H(\mathbf{R}_+)} = \|f\|_{H(A_n)}$.*

Доказательство. Разберем четыре случая.

1) Пусть $x \in I \subset A_n$, тогда $f(t) = g(t)$ на I и

$$|I|^{-1}\left|\int_I g(t)dt\right| \le M_n(f)(x). \tag{14}$$

2) Пусть $x \in I \cap A_n$, но неверно, что $I \subset A_n$. Два элемента D либо не пересекаются, либо один из них содержится в другом. В данном случае единственной возможностью является $A_n \subset I$, откуда $I = [0; m_r)$, где $r > n$. В этом случае $|I|^{-1}\left|\int\limits_I g(t)dt\right| = m_r^{-1}\left|\int\limits_{A_n} f(t)dt\right| = 0$ и неравенство (14) верно.

3) Пусть $x \in I \subset [m_n; \infty)$. В этом случае обе части (14) равны нулю.

4) Пусть $x \in I$, $x \ge m_n$, но I не содержится в $[m_n; \infty)$. Если $I = I_k^l$, $k \in \mathbf{N}$, то найдем по лемме 1.4 $j \in \mathbf{Z}$ такое, что $I_k^l \subset B_j = [m_j; m_{j+1})$. Так как I не содержится в $[m_n; \infty)$, то $m_j < m_n$, откуда $j < n$. Но тогда $j + 1 \le n$ и $[m_j; m_{j+1}) \subset [0; m_n)$, что влечет $I \subset A_n$. Противоречие. Таким образом, $k = 0$ и $I = [0; m_l)$, где $l > n$ и, как в 2), левая часть (14) равна нулю.

В итоге во всех случаях выполнено (14), откуда $\|g\|_{H(\mathbf{R}_+)} \le \|f\|_{H(A_n)}$. Так как обратное неравенство очевидно, лемма доказана.

Следствие 4.1. Каждая из функций $a_{k,n}$, заданных равенством (6), принадлежит $H(\mathbf{P}, \mathbf{R}_+)$ и при этом $\|a_{k,n}\|_{H(\mathbf{R}_+)} = 1$.

Доказательство. Так как $|a_{k,n}(x)| \le 1/m_n$, то $M_n(a_{k,n})(x) \le 1/m_n$ на A_n, откуда $\|a_{k,n}\|_{H(A_n)} = \|M_n(a_{k,n})\|_{L(A_n)} \le 1$. С другой стороны, $\|a_{k,n}\|_{H(A_n)} \ge \|a_{k,n}\|_{L(A_n)} = 1$ в силу (2). Используя лемму 4.1, доказываем следствие.

Рассмотрим функции f_n, введенные при доказательстве теоремы 3.1. Имеет место

Лемма 4.2. *Если $f \in H(\mathbf{P}, \mathbf{R}_+)$, то $f_n \in H(\mathbf{P}, \mathbf{R}_+)$, и при этом*

$$\begin{aligned} &\text{a)} \qquad \|f_n\|_{H(\mathbf{R}_+)} \le 2\|f\|_{H(\mathbf{R}_+)}; \\ &\text{b)} \quad \|f - f_n\|_{H(\mathbf{R}_+)} \le m_n \sup_{i \ge n} |\varepsilon_i| + \int_{m_n}^{\infty} M(f)(x)dx, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_n = m_n^{-1} \int\limits_{A_n} f(t)dt$.

Доказательство. a) Так как $H(\mathbf{P}, A_n)$ есть линейное пространство, содержащее константы, то $f_n = f - \varepsilon_n \in H(\mathbf{P}, A_n)$ и по лемме 4.1 $f_n \in H(\mathbf{P}, \mathbf{R}_+)$, причем

$$\|f_n\|_{H(\mathbf{R}_+)} = \|f_n\|_{H(A_n)} \le \|f\|_{H(A_n)} + \|\varepsilon_n X_{A_n}\|_{H(A_n)} \le 2\|f\|_{H(\mathbf{R}_+)}$$

(в первом равенстве учтено, что $\int\limits_{A_n} f_n(x)dx = 0$).

b) Если $x \in \mathbf{R}_+$, то $\phi_n(x) = f(x) - f_n(x) = \varepsilon_n X_{A_n} + f(x) X_{[m_n;\infty)}$. Рассмотрим четыре случая из доказательства леммы 4.1. В случае 1) имеем равенство $|I|^{-1}\left|\int\limits_I \phi_n(t)dt\right| = |\varepsilon_n|$. В случае 2) согласно доказательству леммы 4.1 $I = A_i$, $i > n$, и поэтому

$$|I|^{-1}\left|\int_I \phi_n(t)dt\right| = m_i^{-1}\left|\int_{A_n} \varepsilon_n dt + \int_{m_n}^{m_i} f(t)dt\right| = |\varepsilon_i|.$$

В случае 3)

$$|I|^{-1}\left|\int_I \phi_n(t)dt\right| = |I|^{-1}\left|\int_I f(t)dt\right| \le M(f)(x).$$

Наконец, в случае 4) снова имеем $I = A_i$, $i > n$, и аналогично 2) $|I|^{-1}\left|\int\limits_I \phi_n(t)dt\right| = |\varepsilon_i| \le M(f)(x)$. Таким образом, при $x \in A_n$ (случаи 1) и 2)) $M(\phi_n)(x) \le \sup\limits_{i\ge n}|\varepsilon_i|$, а при $x \notin A_n$ (случаи 3) и 4)) $M(\phi_n)(x) \le M(f)(x)$. В итоге

$$\|f - f_n\|_{H(\mathbf{R}_+)} = \int_{A_n} M(\phi_n)(x)dx + \int_{m_n}^{\infty} M(\phi_n)(x)dx \le m_n \sup_{i\ge n}|\varepsilon_i| + \int_{m_n}^{\infty} M(f)(x)dx. \quad \square$$

Следствие 4.2. Если $f \in H(\mathbf{P}, \mathbf{R}_+)$, то $\|f - f_n\|_{H(\mathbf{R}_+)} \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. По определению для всех $x \in A_n$ имеем $M(f)(x) \ge |\varepsilon_n|$, откуда

$$\int_{m_{i-1}}^{m_i} M(f)(x)dx \ge m_i(1 - 1/p_i)|\varepsilon_i| \ge m_i|\varepsilon_i|/2.$$

Так как $f \in H(\mathbf{P}, \mathbf{R}_+)$, то левая часть этого неравенства стремится к нулю и поэтому $\lim\limits_{i\to\infty} m_i|\varepsilon_i| = 0$. Поскольку $0 \le m_n \sup\limits_{i\ge n}|\varepsilon_i| \le \sup\limits_{i\ge n} m_i|\varepsilon_i|$, то $\lim\limits_{n\to\infty} m_n \sup\limits_{i\ge n}|\varepsilon_i| = 0$. Из $f \in H(\mathbf{P}, \mathbf{R}_+)$ также вытекает равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{m_n}^{\infty} M(f)(x)dx = 0$. $\square$

Определим $H[j; j+1)$, $j \in \mathbf{Z}_+$, как пространство функций $f \in L[j; j+1)$, для которых функция $M(f, [j; j+1)) = \sup\left\{|I|^{-1}\left|\int\limits_I f(t)dt\right| : I = j + I_k^n,\ k, n \in \mathbf{Z}_+\right\}$ интегрируема на $[j; j+1)$, а $\|f\|_{H[j;j+1)} = \|M(f, [j; j+1))\|_{L[j;j+1)}$.

Лемма 4.3. *Если $f \in H(A_n)$, $n \in \mathbf{Z}_+$, то справедливо неравенство*

$$\|f\|_{H(A_n)} \le 2m_n \max_{0\le j<m_n} \|f\|_{H[j;j+1)}.$$

Доказательство. В силу равенства $\|f\|_{H(A_n)} = \|M_n(f)\|_{L(A_n)} = \sum\limits_{i=0}^{m_n-1} \|M_n(f)\|_{L[i;i+1)}$ надо оценить $M_n(f)(x)$ на каждом $[i; i+1) \subset A_n$. Пусть $I \in D$, $I \subset A_n$, $x \in I$. Как отмечалось ранее, для $[i; i+1)$, содержащего x, имеем либо $[i; i+1) \subset I$, либо $I \subset [i; i+1)$. В первом случае $I = [km_l; (k+1)m_l)$, $l \ge 0$, и с учетом неравенства $\|f\|_{H[i;i+1)} \ge \|f\|_{L[i;i+1)}$ получаем

$$|I|^{-1}\left|\int_I f(t)dt\right| = m_l^{-1}\left|\sum_{j=km_l}^{(k+1)m_l-1}\int_j^{j+1} f(t)dt\right| \le m_l^{-1}\sum_{j=km_l}^{(k+1)m_l-1}\|f\|_{H[j;j+1)} \le \max_{0\le j<m_n}\|f\|_{H[j;j+1)}.$$

В случае, когда $I \subset [i; i+1)$, имеем $|I|^{-1}\left|\int\limits_I f(t)dt\right| \le M(f, [i; i+1))(x)$. Таким образом, на $[i; i+1)$ верно неравенство

$$M_n(f)(x) \le \max\{\max_{0\le j<m_n}\|f\|_{H[j;j+1)}, M(f, [i; i+1))(x)\}.$$

Поэтому

$$\|f\|_{H(A_n)} = \|M_N(f)\|_{L(A_n)} \le m_n \max_{0\le j<m_n}\|f\|_{H[j;j+1)} + \sum_{i=0}^{m_n-1}\|f\|_{H[i;i+1)} \le 2m_n \max_{0\le j<m_n}\|f\|_{H[j;j+1)}. \quad \square$$

Лемма 4.4. *Линейная оболочка L множества функций $\{b_{k,n} : k \in \mathbf{N},\ n \in \mathbf{Z}_+\}$ плотна в $H(\mathbf{P}, \mathbf{R}_+)$.*

Доказательство. Пусть $f \in H(\mathbf{P}, \mathbf{R}_+)$, $\varepsilon > 0$. По следствию 4.2 найдем $n \in \mathbf{Z}_+$ такое, что $\|f - f_n\|_{H(\mathbf{R}_+)} < \varepsilon/2$. Будем приближать f_n частичными суммами Фурье по системе $\{b_{k,n}\}$. Как показано при доказательстве леммы 3.1, для $\phi \in L(A_n)$ и $x \in I_{i,k}^r = [i + k/m_r; i + (k+1)/m_r)$ верно равенство

$$S_{m_n m_r}(\phi)(x) = m_r\int_{I_{i,k}^r}\phi(t)dt.$$

Отсюда из общих теорем об аппроксимативной единице ([5], с. 158) имеем

$$\lim_{r\to\infty} \|S_{m_n m_r}(\phi) - \phi\|_{H[i;i+1)} = 0 \tag{15}$$

при $i = 0, 1, \ldots, m_n - 1$ и $\phi \in H[i; i+1)$. Из (11) следует $\int\limits_{A_n} (S_{m_n m_r}(f)(x) - f(x))dx = 0$, откуда получаем равенство

$$(S_{m_n m_r}(f))_n(x) - f_n(x) = (S_{m_n m_r}(f)(x) - f(x))X_{A_n}.$$

При этом правая часть имеет интеграл по $\mathbf{R}_+$, равный нулю. По лемме 4.1

$$\|(S_{m_n m_r}(f))_n - f_n\|_{H(\mathbf{R}_+)} = \|S_{m_n m_r} - f\|_{H(A_n)}. \tag{16}$$

По лемме 4.3 правая часть (16) не превосходит $2m_n \max\limits_{0\le j<m_n} \|S_{m_n m_r}(f) - f\|_{H[j;j+1)}$. Так как n фиксировано, то при некотором $r \in \mathbf{N}$ в силу (15) обе части (16) меньше $\varepsilon/2$. Но $b_{0,n}$ постоянна, поэтому $(S_{m_n m_r}(f))_n$ не содержит члена с $b_{0,n}$. Таким образом, $\|f - (S_{m_n m_r}(f))_n\| < \varepsilon$ и $(S_{m_n m_r}(f))_n$ — линейная комбинация $b_{k,n}$, где $1 \le k < m_n m_r$. $\square$

Теорема 4.2. *Пусть L определена, как в лемме* 4.4, *и оператор $\widehat{J} : L \to L(\mathbf{R}_+)$ задан формулой $\widehat{J}(f) = \widehat{(J(f))}$. Тогда $\widehat{J}$ допускает продолжение по непрерывности на $H(\mathbf{P}, \mathbf{R}_+)$ и норма продолженного оператора не превосходит NC_3, где C_3 — константа из теоремы* 3.1.

Доказательство. По теореме 2.2 все $a_{k,n}$, $k \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{Z}_+$, а стало быть, и все $f \in L$ имеют МСМИ $J(f)$, причем $\widehat{J}(f) = \widehat{f}h$, где $h(t) \le N/t$ при $t > 0$. По теореме 3.1 $\|\widehat{J}(f)\|_{L(\mathbf{R}_+)} \le N\int\limits_0^\infty |\widehat{f}(t)|t^{-1}dt \le NC_3\|f\|_{H(\mathbf{R}_+)}$. Поскольку L по лемме 4.4 плотна в $H(\mathbf{P}, \mathbf{R}_+)$, то по известной теореме функционального анализа (напр., [8], с. 101) $\widehat{J}$ продолжается на $H(\mathbf{P}, \mathbf{R}_+)$. $\square$

Автор выражает свою признательность профессору Б.И. Голубову за постановку задачи и ценные замечания.

Литература

1. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша.* – М.: Наука, 1987. – 344 с.
2. Голубов Б.И. *О модифицированном сильном двоичном интеграле и производной* // Матем. сб. – 2002. – Т. 193. – № 4. – С. 37–60.
3. Onneweer C.W. *Differentiation on p-adic or p-series field* // Linear spaces and approx. Internat. Ser. Numer. Math. Basel: Birkhauser, 1978. – V. 40. – P. 187–198.
4. Голубов Б.И. *Об аналоге неравенства Харди для преобразования Фурье–Уолша* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2001. – Т. 65. – № 3. – С. 3–14.
5. Schipp F., Wade W.R., Simon P. *Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis.* – Budapest: Akademiai Kiado, 1990. – 560 p.
6. Chao J.-A. *Hardy spaces on regular martingales* // Lecture Notes Math. – 1982. – V. 939. – P. 18–28.
7. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* – М.: Наука, 1974. – 480 с.
8. Садовничий В.А. *Теория операторов.* – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 368 с.

Саратовский государственный университет

Поступила
28.11.2002