ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 5 (480)

УДК 514.465

Ю.Д. ЧУРБАНОВ

ГЕОМЕТРИЯ ОДНОРОДНЫХ Ф-ПРОСТРАНСТВ ПОРЯДКА 5

Введение

Однородные периодические Ф-пространства, или Ф-пространства порядка n (см. п. 1), впервые были введены Н.А. Степановым и с тех пор интенсивно изучаются, ибо, с одной стороны, эти пространства являются непосредственным и наиболее естественным обобщением симметрических пространств, с другой стороны, все периодические однородные Ф-пространства являются редуктивными [1], что важно с геометрической точки зрения. Более того, как выяснилось, периодические Ф-пространства обладают большим запасом инвариантных аффинорных структур, которые согласованы с симметрией этих пространств, а операторы этих структур на касательном пространстве задаются в явном виде [2].

В данной статье изучаются инвариантные аффинорные структуры классического типа (почти произведения, почти комплексные, f-структуры) однородных Ф-пространств порядка 5.

Впервые такие пространства рассматривались в [3], где было доказано существование инвариантных почти комплексных структур и приведен вид операторов этих структур на касательном пространстве. Намного позже в [4], [5] была рассмотрена одна из инвариантных почти комплексных структур однородных Ф-пространств порядка 5 в случае компактной группы Ли, однако построение оператора этой структуры проводилось с другой точки зрения (см. также [6], с. 107). Затем в [7] была построена и изучена инвариантная структура почти произведения Ф-пространства порядка 5, которая позволила с новых позиций построить и изучить ту же инвариантную почти комплексную структуру.

Далее в [2] была описана алгебра всех инвариантных классических аффинорных структур однородных регулярных Ф-пространств, а в случае периодического однородного Ф-пространства приведены вычислительные формулы операторов этих структур, которые детализированы в случаях $n = 3, 4, 5$. Там же показано, что на однородных Ф-пространствах порядка 5 существуют в точности одна инвариантная структура почти произведения, две инвариантные f-структуры и две инвариантные почти комплексные структуры.

Хотя существование почти комплексных структур на однородном Ф-пространстве порядка 5 вытекает из [2], в данной статье построение в п. 3 этих структур проводится так, как это делалось первоначально в [7], с использованием структуры почти произведения, которая рассматривается в п. 2. Инвариантные f-структуры для удобства изучения определяются в п. 4 с помощью почти комплексных структур и структуры почти произведения, причем, естественно, все эти построения соответствуют результатам работы [2].

Изучение интегрируемости инвариантных почти комплексных структур (п. 3) позволяет сделать вывод, что класс однородных Ф-пространств G/H порядка 5, у которых хотя бы одна из канонических почти комплексных структур интегрируема, входит в класс локальных Ф-пространств порядка 3 [8], а интегрируемость обеих почти комплексных структур равносильна локальной симметричности G/H. Аналогична ситуация и с каноническими f-структурами однородного Ф-пространства порядка 5.

Связь инвариантных аффинных связностей и канонических аффинорных структур однородных Ф-пространств порядка 5 выясняется в п. 5. Естественно редуктивные однородные Ф-пространства порядка 5 изучаются в п. 7. Класс таких пространств довольно большой. В случае полупростой группы Ли G однородные периодические Ф-пространства являются естественно редуктивными относительно (псевдо)римановой метрики, индуцированной на G/H формой Киллинга группы G, и эта метрика хорошо согласована с инвариантными аффинорными структурами этого пространства (см. также [9]). Оказалось, что естественно редуктивные Ф-пространства порядка 5, которые являются кэлеровыми, входят в класс локально симметрических, а приближенно кэлеровы относительно одной из инвариантных почти комплексных структур — в класс локальных Ф-пространств порядка 3.

Отметим также, что некоторые из результатов данной статьи были ранее анонсированы в [7], [10], [11].

1. Однородные Ф-пространства порядка 5

Пусть Φ — аналитический автоморфизм порядка n связной группы Ли G и H — замкнутая подгруппа Ли в G такая, что $G_o^\Phi \subset H \subset G^\Phi$, где G_o^Φ — связная компонента единицы группы $G^\Phi = \{g \in G \mid \Phi(g) = g\}$.

Определение 1 ([1]). *Однородное пространство G/H называется однородным Ф-пространством порядка n.*

Φ порождает диффеоморфизм $D : G/H \to G/H$ по правилу $D(gH) = \Phi(g)H$ [1]. Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — алгебры Ли групп Ли G и H соответственно, $\varphi = (d\Phi)_e$ — автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $A = \varphi - \mathrm{id}$, $\mathfrak{m} = A\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{m}$ естественным образом отождествляется с касательным пространством к G/H в точке $o = H$ [1] и, если положить $\varphi|_\mathfrak{m} = \theta$, то $(dD)_o = \theta$ и для Ф-пространства порядка 5 имеет место равенство

$$\theta^4 + \theta^3 + \theta^2 + \theta + \mathrm{id} = 0. \tag{1}$$

Кроме того, для G/H справедливо редуктивное разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}. \tag{2}$$

Положим также $a = \cos\frac{2\pi}{5}$, $b = \sin\frac{2\pi}{5}$, $c = \cos\frac{4\pi}{5}$, $d = \sin\frac{4\pi}{5}$.

Будем использовать следующее предложение, доказательство которого для почти комплексной структуры приведено в ([12], с. 201), а в остальных случаях аналогично.

Лемма 1. *Инвариантные почти комплексные структуры (структуры почти произведения, f-структуры) на G/H находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством линейных эндоморфизмов I для $\mathfrak{m}$ таких, что*

$$I^2(X) = -X, \quad (I^2(X) = X, \quad I^3(X) + I(X) = 0) \quad \forall X \in \mathfrak{m}, \tag{3}$$

$$I(\mathrm{Ad}(a)X) = \mathrm{Ad}(a)I(X) \quad \forall a \in H, \quad X \in \mathfrak{m}. \tag{4}$$

2. Каноническая структура почти произведения

Теорема 1. *На каждом однородном Ф-пространстве порядка* 5 *существует инвариантная структура почти произведения.*

Доказательство. Проверим, что оператор

$$P_o(X) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\theta^4(X) - \theta^3(X) - \theta^2(X) + \theta(X)) \tag{5}$$

удовлетворяет условиям (3) и (4) леммы 1. Имеем

$$P_o^2(X) = \frac{1}{\sqrt{5}}((\theta^4(P_oX)) - \theta^4(P_o(X)) - \theta^2(P_o(X)) + \theta(P_o(X))) =$$
$$= \frac{1}{5}(-\theta^4(X) - \theta^3(X) - \theta^2(X) - \theta(X) + 4X) = X,$$

где было использовано тождество (1). Отсюда следует выполнение условия (3). Далее, т. к. [13] $\theta(\mathrm{Ad}(a)X) = \mathrm{Ad}(a)(\theta(X))$ $\forall a \in H$, $X \in \mathfrak{m}$, то $\mathrm{Ad}(a)(P_o(X)) = P_o(\mathrm{Ad}(a)X)$, что дает (4). $\square$

Определение 2. Структуру почти произведения P, порождаемую оператором (5), будем называть канонической структурой почти произведения однородного Ф-пространства порядка 5.

Заметим, что она может быть и тривиальной ($P_o = \pm\,\mathrm{id}$), и в дальнейшем будем исключать этот случай.

Положим $\mathfrak{m}_i = \{X \in \mathfrak{m} \mid P_o(X) = (-1)^{i+1}X\}$. Тогда

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2. \tag{6}$$

Изучим свойства оператора P_o. Будем обозначать через $X_\mathfrak{m}$ и $X_\mathfrak{h}$ соответственно $\mathfrak{m}$- и $\mathfrak{h}$-компоненты элемента $X \in \mathfrak{g}$ относительно разложения (2), а через X_1, X_2 — компоненты элемента $X \in \mathfrak{m}$ относительно разложения (6).

Лемма 2. *Для любых $X, Y \in \mathfrak{m}$ положим $V_i = [\theta^4X, \theta^{5-i}Y]_\mathfrak{m} + [\theta^3X, \theta^{4-i}Y]_\mathfrak{m} + [\theta^2X, \theta^{3-i}Y]_\mathfrak{m} + [\theta X, \theta^{2-i}Y]_\mathfrak{m} + [X, \theta^{1-i}Y]_\mathfrak{m}$, где $i = \overline{1,5}$. Тогда $V_i = 0$.*

Доказательство. Очевидно, что $\theta V_i = V_i$. Но $V_i \in \mathfrak{m}$, значит, $V_i = 0$.

Лемма 3. *Для любых $X, Y \in \mathfrak{m}$ имеют место равенства*

$$P_o[X,Y]_\mathfrak{m} = -P_o[P_oX, P_oY]_\mathfrak{m} - [X, P_oY]_\mathfrak{m} - [P_oX, Y]_\mathfrak{m}, \tag{7}$$
$$[P_oX, P_oY]_\mathfrak{h} = [X,Y]_\mathfrak{h}. \tag{8}$$

Доказательство. Вычислим $[P_oX, P_oY]_\mathfrak{m}$, $P_o[X, P_oY]_\mathfrak{m}$, $P_o[P_oX, Y]_\mathfrak{m}$, используя (5), (1), лемму 2. Имеем

$$[P_oX, P_oY]_\mathfrak{m} = \frac{1}{5}(-3[X,Y]_\mathfrak{m} + 2([\theta^4X, \theta Y]_\mathfrak{m} + [\theta^3X, \theta^2Y]_\mathfrak{m} + + [\theta^2X, \theta^3Y]_\mathfrak{m} + [\theta X, \theta^4Y]_\mathfrak{m})),$$
$$P_o[X, P_oY]_\mathfrak{m} = \frac{1}{5}(-3[X,Y]_\mathfrak{m} + 2([\theta^4X, \theta^3Y]_\mathfrak{m} + [\theta^3X, \theta Y]_\mathfrak{m} + + [\theta^2X, \theta^4Y]_\mathfrak{m} + [\theta X, \theta^2Y]_\mathfrak{m})),$$
$$P_o[P_oX, Y]_\mathfrak{m} = \frac{1}{5}(-3[X,Y]_\mathfrak{m} + 2([\theta^4X, \theta^2Y]_\mathfrak{m} + [\theta^3X, \theta^4Y]_\mathfrak{m} + + [\theta^2X, \theta Y]_\mathfrak{m} + [\theta X, \theta^3Y]_\mathfrak{m})).$$

Складывая эти равенства и применяя лемму 2, получаем

$$[P_oX, P_oY]_\mathfrak{m} + P_o[X, P_oY]_\mathfrak{m} + P_o[X, P_oY]_\mathfrak{m} = \frac{1}{5}(-9[X,Y]_\mathfrak{m} + 4[X,Y]_\mathfrak{m}) = -[X,Y]_\mathfrak{m}.$$

Отсюда следует (7). Для доказательства (8) вычислим $[P_oX, P_oY]_\mathfrak{h} = \frac{1}{5}(4[X,Y]_\mathfrak{h} - [\theta X, Y]_\mathfrak{h} - 2[\theta^2X, Y]_\mathfrak{h} + [\theta^3X, Y]_\mathfrak{h} - [X, \theta Y]_\mathfrak{h} - 2[X, \theta^2Y]_\mathfrak{h} + [X, \theta^3Y]_\mathfrak{h}) = [X,Y]_\mathfrak{h}$, где используются очевидные равенства $[\theta X, \theta Y]_\mathfrak{h} = [X,Y]_\mathfrak{h}$ и $[\theta^iX, Y]_\mathfrak{h} = [X, \theta^{5-i}Y]_\mathfrak{h}$, $i = \overline{1,4}$, и (1). $\square$

Следствие 1. Для любых $X \in \mathfrak{m}_1$, $Y \in \mathfrak{m}_2$ $[X,Y]_\mathfrak{h} = 0$.

Доказательство. Из (8) имеем $[X,Y]_\mathfrak{h} = [P_oX, P_oY]_\mathfrak{h} = -[X,Y]_\mathfrak{h}$. $\square$

Следствие 2. Имеют место включения $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i] \subset \mathfrak{m}_{3-i}$, $i = 1, 2$.

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathfrak{m}_1$. Тогда из (7) $P_o[X,Y]_\mathfrak{m} = -[X,Y]_\mathfrak{m}$. Аналогично для $\mathfrak{m}_2$. $\square$

Обозначим через S тензорное поле кручения структуры P. Тогда оно имеет вид ([14], с. 44)

$$S(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = [\widetilde{X},\widetilde{Y}] + [P\widetilde{X},P\widetilde{Y}] - P[P\widetilde{X},\widetilde{Y}] - P[\widetilde{X},P\widetilde{Y}],$$

где $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ — гладкие векторные поля на G/H. Если $S = 0$, то P называется интегрируемой ([14], с. 44). Очевидно также, что S инвариантно относительно G, а потому полностью определяется своим значением S_o в точке $o = H$. Ограничиваясь специальными векторными полями в окрестности точки o, можно аналогично [8] показать, что S_o имеет вид $S_o(X,Y) = [X,Y]_\mathfrak{m} + [P_oX,P_oY]_\mathfrak{m} - P_o[X,P_oY]_\mathfrak{m} - P_o[P_oX,Y]_\mathfrak{m}$, где $X, Y \in \mathfrak{m}$.

Из (7) очевидным образом следует

Лемма 4. *В точке o тензор кручения S канонической структуры почти произведения подсчитывается по формуле*

$$S_o(X,Y) = 2[X,Y]_\mathfrak{m} + 2[P_oX,P_oY]_\mathfrak{m}. \tag{9}$$

Теорема 2. *Каноническая структура почти произведения интегрируема тогда и только тогда, когда*

$$[\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_1]_\mathfrak{m} = [\mathfrak{m}_2,\mathfrak{m}_2]_\mathfrak{m} = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $S_o(X,Y){=}0$. Тогда из (9) следует, что $4[X_1,Y_1]_\mathfrak{m}{=}0$ и $4[X_2,Y_2]_\mathfrak{m}{=}0$. В силу произвольности X и Y имеем (10). Обратное очевидно. $\square$

Лемма 5. *Пусть $X \in \mathfrak{m}_1$, $Y \in \mathfrak{m}_2$. Тогда*

$$\theta^4X + \theta X = 2aX, \quad \theta^3X + \theta^2X = 2cX, \tag{11}$$

$$\theta^4Y + \theta Y = 2cY, \quad \theta^3Y + \theta^2Y = 2aY. \tag{12}$$

Доказательство леммы очевидно, если учесть (1), определение P_o и подпространств $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$. $\square$

3. Канонические почти комплексные структуры

Так как для любого $X_i \in \mathfrak{m}_i$ $\theta(X_i) \in \mathfrak{m}_i$, $i = 1,2$, то определим операторы J_1 и J_2 соответственно на $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$, положив

$$J_1(X_1) = \frac{1}{b}(\theta X_1 - aX_1), \quad J_2(X_2) = \frac{1}{d}(\theta X_2 - cX_2). \tag{13}$$

Лемма 6. $J_i^2(X_i) = -X_i$, $i = 1,2$.

Доказательство. Рассмотрим J_1 и $X \in \mathfrak{m}_1$. Из (11) имеем $X + \theta^2X = 2a\theta X$. С учетом этого и (13) получаем

$$J_1^2(X) = \frac{1}{b}(\theta(J_1(X) - aJ_1(X))) = \frac{1}{b^2}(\theta^2(X) - 2a\theta(X) + a^2X) =$$
$$= \frac{1}{b^2}(\theta^2(X) - (X + \theta^2(X)) + a^2X) = \frac{1}{b^2}(-X + a^2X) = -X.$$

Аналогично проводится доказательство для J_2. $\square$

Таким образом, J_i определяют соответственно на $\mathfrak{m}_i$ комплексные структуры. Зададим теперь на $\mathfrak{m}$ два оператора J_o и $\widetilde{J_o}$ равенствами

$$J_o(X) = J_1(X_1) + J_2(X_2), \quad \widetilde{J_o}(X) = J_1(X_1) - J_2(X_2). \tag{14}$$

Так как очевидным образом для всех $a \in H$ $\mathrm{Ad}(a) \circ J_o = J_o \circ \mathrm{Ad}(a)$ и $\mathrm{Ad}(a) \circ \widetilde{J_o} = \widetilde{J_o} \circ \mathrm{Ad}(a)$, то эти операторы определяют на G/H две инвариантные почти комплексные структуры.

Определение 3. Инвариантные почти комплексные структуры J и $\widetilde{J}$, операторы которых на $\mathfrak{m}$ определяются равенствами (14), будем называть каноническими почти комплексными структурами однородного Φ-пространства порядка 5.

Изучим свойства операторов J_o, $\widetilde{J_o}$, J_1, J_2.

Теорема 3. *Для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$ и $X_i, Y_i \in \mathfrak{m}_i$, $i = 1, 2$, имеют место равенства*

$$[J_oX, J_oY]_{\mathfrak{h}} = [\widetilde{J_o}X, \widetilde{J_o}Y]_{\mathfrak{h}} = [X, Y]_{\mathfrak{h}}, \tag{15}$$

$$J_{3-i}[X_i, Y_i]_{3-i} = (-1)^{3-i}[X_i, J_iY_i]_{3-i}, \tag{16}$$

$$J_i[X_1, Y_2]_i = -[J_1X_1, Y_2]_i = (-1)^{i+1}[X_1, J_2Y_2]_i. \tag{17}$$

Доказательство. Отметим, что в силу следствия 1 леммы 3 имеем

$$[J_oX, J_oY]_{\mathfrak{h}} = [\widetilde{J_o}X, \widetilde{J_o}Y]_{\mathfrak{h}} = [J_1X_1, J_1Y_1]_{\mathfrak{h}} + [J_2X_2, J_2Y_2]_{\mathfrak{h}}.$$

Далее, используя (13) и лемму 5, получаем

$$\begin{aligned}
[J_1X_1, J_1Y_1]_{\mathfrak{h}} &= \left[\frac{1}{b}(\theta X_1 - aX_1), \frac{1}{b}(\theta Y_1 - aY_1)\right]_{\mathfrak{h}} = \\
&= \frac{1}{b^2}((1 + a^2)[X_1, Y_1]_{\mathfrak{h}} - a([\theta X_1, Y_1]_{\mathfrak{h}} + [X_1, \theta Y_1]_{\mathfrak{h}})) = \\
&= \frac{1}{b^2}((1 + a^2)[X_1, Y_1]_{\mathfrak{h}} - a([\theta X_1, Y_1]_{\mathfrak{h}} + [\theta^4 X_1, Y_1]_{\mathfrak{h}})) = \\
&= \frac{1}{b^2}((1 + a^2)[X_1, Y_1]_{\mathfrak{h}} - 2a^2[X_1, Y_1]_{\mathfrak{h}}) = [X_1, Y_1]_{\mathfrak{h}}.
\end{aligned}$$

Аналогично получаем второе слагаемое. Отсюда следует (15). Равенства (16) и (17) доказаны в [5] в случае, когда G — компактная группа Ли, но доказательство остается верным и в произвольном случае. $\square$

Рассмотрим теперь вопрос об интегрируемости канонических почти комплексных структур J и $\widetilde{J}$. Как и в [8], можно показать, что тензоры кручения N и $\widetilde{N}$ соответствующих почти комплексных структур инвариантны относительно G, а потому полностью определяются своими значениями N_o и $\widetilde{N}_o$ в точке $o = H$, причем для $X, Y \in \mathfrak{m}$

$$N_o(X, Y) = [X, Y]_{\mathfrak{m}} + J_o[X, J_oY]_{\mathfrak{m}} + J_o[J_oX, Y]_{\mathfrak{m}} - [J_oX, J_oY]_{\mathfrak{m}},$$
$$\widetilde{N_o}(X, Y) = [X, Y]_{\mathfrak{m}} + \widetilde{J_o}[X, \widetilde{J_o}Y]_{\mathfrak{m}} + \widetilde{J_o}[\widetilde{J_o}X, Y]_{\mathfrak{m}} - [\widetilde{J_o}X, \widetilde{J_o}Y]_{\mathfrak{m}}.$$

Теорема 4. *Каноническая почти комплексная структура J однородного Φ-пространства порядка 5 интегрируема тогда и только тогда, когда $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_2]_1 = [\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2]_2 = 0$.*

Доказательство. Из следствия 2 леммы 3 $(N_o(X_i, Y_i))_i = 0$. Вычисляя остальные слагаемые с помощью (16) и (17), имеем

$$N_o(X, Y) = 4([X_2, Y_2]_1 + [X_1, Y_2]_2 + [X_2, Y_1]_2).$$

Теперь, если $N_o(X, Y) = 0$, то в силу произвольности $X, Y \in \mathfrak{m}$ получаем требуемое утверждение. Обратное очевидно. $\square$

Точно так же доказывается

Теорема 5. *Каноническая почти комплексная структура* $\widetilde{J}$ *однородного* Φ*-пространства порядка* 5 *интегрируема тогда и только тогда, когда* $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1]_2 = [\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2]_1 = 0$.

Следствие. Обе канонические почти комплексные структуры однородного Φ-пространства порядка 5 интегрируемы тогда и только тогда, когда G/H локально симметрично, т. е. $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$.

Теорема 6. *Если одна из канонических почти комплексных структур однородного* Φ*-пространства порядка* 5 *интегрируема, то* G/H *является локальным* Φ*-пространством порядка* 3 [8].

Доказательство. Пусть J интегрируема. Тогда, используя теоремы 3 и 4, легко получаем равенство $\widetilde{J_o}[X,Y]_\mathfrak{m} = -[X, \widetilde{J_o}Y]_\mathfrak{m}$. Учитывая опять теорему 3, видим, что $\widetilde{J}$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 10 из [8], а потому G/H является локальным Φ-пространством порядка 3. Аналогично проводится доказательство для другой структуры. □

4. Канонические f-структуры

Учитывая разложение (6) и то, что на каждом из $\mathfrak{m}_i$ есть комплексная структура J_i, определим на $\mathfrak{m}$ два оператора $(f_1)_o$ и $(f_2)_o$, положив

$$(f_1)_o X = J_1 X_1, \quad (f_2)_o X = J_2 X_2 \quad \forall X \in \mathfrak{m}. \tag{18}$$

Очевидно, эти операторы удовлетворяют условиям леммы 1, а потому определяют на G/H две инвариантные f-структуры.

Определение 4. Будем называть инвариантные f-структуры однородного Φ-пространства порядка 5, операторы которых на $\mathfrak{m}$ имеют вид (18), каноническими f-структурами этого пространства.

В силу инвариантности канонических f-структур их тензоры Нейенхейса N_1 и N_2 также будут инвариантными, а потому будут полностью определяться своими значениями $(N_i)_o$ в точке $o = H$, причем для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$

$$(N_i)_o(X,Y) = [(f_i)_o X, (f_i)_o Y]_\mathfrak{m} - (f_i)_o([X, (f_i)_o Y]_\mathfrak{m} - [(f_i)_o X, Y]_\mathfrak{m}) + (f_i)_o^2 [X,Y]_\mathfrak{m}.$$

Теорема 7. *Каноническая* f*-структура* f_i *интегрируема тогда и только тогда, когда*

$$[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_i = [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i]_{3-i} = 0. \tag{19}$$

Доказательство. Проведем доказательство лишь для f_1, т. к. для f_2 оно аналогично. Прямым вычислением находим

$$\begin{aligned}(N_1)_o(X,Y) = [J_1X_1, J_1Y_1]_\mathfrak{m} - J_1[X, J_1Y_1]_1 - J_1[J_1X_1, Y]_1 - [X,Y]_1 = \\ = -[X_1,Y_1]_2 - 2[X_2,Y_1]_1 - 2[X_1,Y_2]_1 - [X_2,Y_2]_1.\end{aligned}$$

Отсюда, если $(N_1)_o(X,Y) = 0$ для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$, то имеем (19). Обратное очевидно. □

Применяя теоремы 2, 4 и 7, получаем

Следствие 1. Для того чтобы f_1 (f_2) была интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы были интегрируемыми P и J (P и $\widetilde{J}$).

Следствие 2. Обе канонические f-структуры однородного Φ-пространства порядка 5 интегрируемы одновременно тогда и только тогда, когда G/H является локально симметрическим пространством.

Из теоремы 3 очевидным образом следует

Лемма 7. $[(f_i)_o X, (f_i)_o Y]_\mathfrak{h} = [X_i, Y_i]_\mathfrak{h} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}$.

Кроме того, непосредственным вычислением доказывается

Лемма 8. $(f_1)_o X = \frac{1}{2} J_o(X + P_o(X)), (f_2)_o X = \frac{1}{2}\widetilde{J}_o(X + P_o(X)) \quad \forall X \in \mathfrak{m}$.

5. Инвариантные аффинные связности

Пусть ∇ — инвариантная аффинная связность на однородном Ф-пространстве G/H порядка 5 и α — ее функция Номидзу ([12], с. 178), A — каноническая аффинорная структура на G/H классического типа.

Определение 5. Связность ∇ назовем A-связностью, если $\nabla A = 0$.

Как и в [8], можно показать, что условие

$$A_o \alpha(X, Y) = \alpha(X, A_o Y),$$

где A_o — оператор аффинорной структуры A в точке $o = H$, является необходимым и достаточным для того, чтобы ∇ была A-связностью.

Теорема 8. *На любом однородном* Ф*-пространстве* G/H *порядка* 5 *только каноническая связность* ([12]*, с.* 179) *обладает следующими свойствами*:
1) ∇ *инвариантна относительно* G*,*
2) ∇ *инвариантна относительно* D*,*
3) ∇ *является* P*–связностью,*
4) ∇ *является либо* J*-, либо* $\widetilde{J}$*-связностью.*

Доказательство. Покажем, что если ∇ удовлетворяет условиям 1)–4), то ее функция Номидзу тривиальна. Пусть ∇ — такая связность и α — ее функция Номидзу. Тогда из 3) следует, что $P_o\alpha(X, Y) = \alpha(X, P_oY)$, что дает $\alpha(X, Y)_i = \alpha(X, Y_i)$, $i = 1, 2$. Но тогда в силу 4) $J_i\alpha(X, Y)_i = \alpha(X, J_iY_i)$, $i = 1, 2$. Используя (13), получаем $\theta\alpha(X, Y)_i = \alpha(X, \theta Y_i)$, $i = 1, 2$, что дает $\theta\alpha(X, Y) = \alpha(X, \theta Y)$. Отсюда $\alpha(X, \theta Y) = \alpha(\theta X, \theta Y)$. Тогда $\alpha(X, \theta^k Y) = \alpha(\theta^k X, \theta^k Y)$, где $k = \overline{1, 5}$. Значит,

$$\alpha(\theta^4 X, Y) = \theta^4\alpha(X, \theta Y) = \theta^4\alpha(\theta X, \theta Y) = \alpha(X, Y),$$
$$\alpha(\theta^3 X, Y) = \theta^4\alpha(\theta^4 X, \theta Y) = \theta^4\alpha(X, \theta Y) = \alpha(X, Y),$$
$$\alpha(\theta^2 X, Y) = \theta^3\alpha(\theta^4 X, \theta^2 Y) = \theta^3\alpha(\theta X, \theta^2 Y) = \alpha(\theta^4 X, Y) = \alpha(X, Y),$$
$$\alpha(\theta X, Y) = \theta^4\alpha(\theta^2 X, \theta Y) = \theta^4\alpha(\theta^3 X, \theta Y) = \theta^4\alpha(\theta^4 X, \theta Y) = \alpha(X, Y),$$
$$\alpha(X, Y) = \alpha(X, Y).$$

Складывая эти равенства и учитывая (1), получаем $5\alpha(X, Y) = 0$. □

Следствие. На любом однородном Ф-пространстве G/H порядка 5 только каноническая связность обладает следующими свойствами:
1) ∇ инвариантна относительно G,
2) ∇ инвариантна относительно D,
3) ∇ является f_1- и f_2-связностью.

Доказательство. Пусть α — функция Номидзу связности ∇, удовлетворяющей 1)–3). Тогда из 3) следует $(f_i)_o\alpha(X, Y) = \alpha(X, (f_i)_oY)$ для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$, $i = 1, 2$. Это дает $\alpha(X, Y)_i = \alpha(X, Y_i)$. Значит, $P_o\alpha(X, Y) = \alpha(X, P_oY)$ и $J_o\alpha(X, Y) = \alpha(X, J_oY)$. Осталось воспользоваться теоремой. □

Лемма 9. *Пусть* ∇ *— инвариантная относительно* G *и* D *аффинная связность однородного* Ф*-пространства порядка* 5*. Тогда для ее функции Номидзу* α *и всех* $X, Y \in \mathfrak{m}$ *имеет место равенство*

$$P_o\alpha(X, Y) = -P_o\alpha(P_oX, P_oY) - \alpha(X, P_oY) - \alpha(P_oX, Y).$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству первого равенства леммы 3. $\square$

Следствие. Пусть ∇ — инвариантная относительно G и D аффинная связность однородного Φ-пространства порядка 5. Пусть также ∇ является P-связностью. Тогда $\alpha(X, Y) = 0$ $\forall X, Y \in \mathfrak{m}_i$.

Доказательство. Из леммы 9 имеем $P_o\alpha(X_i, Y_i) = -(1)^i\alpha(X_i, Y_i)$. А так как ∇ является P-связностью, то $P_o\alpha(X_i, Y_i) = (-1)^{i+1}\alpha(X_i, Y_i)$. $\square$

6. Подпространство $\mathfrak{m}^\varphi$

Рассмотрим подпространство $\mathfrak{m}^\varphi \in \mathfrak{g}$, порожденное векторами вида $[X, \theta X]$, $X \in \mathfrak{m}$ в случае однородного Φ-пространства порядка 5. Впервые это подпространство для произвольного регулярного Φ-пространства было введено В.В. Балащенко [15]. Отметим также, что в случае симметрического пространства ($\Phi^2 = \mathrm{id}$) $\mathfrak{m}^\varphi = 0$, а в случае Φ-пространства порядка 3 $\mathfrak{m}^\varphi \in \mathfrak{h}$ [16].

Теорема 9. *Пусть G/H — однородное Φ-пространство порядка 5. Тогда следующие условия эквивалентны:*
1) $\mathfrak{m}^\varphi \subset \mathfrak{h}$,
2) $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] = 0$,
3) $P_o[X, Y]_\mathfrak{m} = -[X, P_oY]_\mathfrak{m}$.

Доказательство. Покажем эквивалентность 1) и 2). Пусть $\mathfrak{m}^\varphi \subset \mathfrak{h}$. Тогда $A[X, \theta X] = 0$ $\forall X \in \mathfrak{m}$. Учитывая (1), находим $A[X, \theta X] = -\varphi[X, \theta^3 X + \theta^2 X] = 0$. Так как φ — автоморфизм, то $[X, \theta^3 X + \theta^2 X] = 0$. Принимая во внимание равенства (11) и (12), получаем $[X, \theta^3 X + \theta^2 X] = (2a - 2c)[X_1, X_2] = 0$. В силу произвольности X получаем 2).

Обратно, если справедливо 2), то для каждого $X \in \mathfrak{m}$ $[X, \theta X] = [X_1, \theta X_1] + [X_2, \theta X_2]$. Учитывая (11) и (12), имеем

$$[X, \theta X] = -[X_1, \theta^4 X_1] - [X_2, \theta^4 X_2] = -\varphi^4([\theta X_1, X_1] + [\theta X_2, X_2]) = \varphi^4[X, \theta X].$$

Отсюда получаем 1).

Покажем эквивалентность 2) и 3). Пусть $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] = 0$. Тогда согласно (7) $P_o[X_i, X_i]_\mathfrak{m} = -[X_i, P_oX_i]_\mathfrak{m}$, что дает 3). Обратно, пусть выполняется 3). Тогда $[X, Y]_\mathfrak{m} = [P_oX, P_oY]_\mathfrak{m}$, что с учетом (8) дает $[X, Y] = [P_oX, P_oY]$, откуда следует 2). $\square$

Следствие 1. Для того чтобы однородное Φ-пространство G/H порядка 5 было локально симметрическим, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{m}^\varphi \subset \mathfrak{h}$ и каноническая структура почти произведения была интегрируемой.

Доказательство. Если $\mathfrak{m}^\varphi \subset \mathfrak{h}$, то с учетом леммы 4 и теоремы 9 получаем $S_o(X, Y) = 4[X, Y]_\mathfrak{m}$. Теперь в силу интегрируемости P получаем локальную симметричность G/H. Обратное очевидно. $\square$

Рассмотрим подпространства $\mathfrak{m}_i^\varphi$, порожденные элементами вида $[X, \theta X]$, где $X \in \mathfrak{m}_i$, $i = 1, 2$. Тогда из доказательства теоремы 9 вытекает

Следствие 2. $\mathfrak{m}_i^\varphi \subset \mathfrak{h}$, $i = 1, 2$.

7. Естественно редуктивные Ф-пространства порядка 5

Пусть однородное Ф-пространство порядка 5 является римановым и относительно его римановой метрики D является изометрией. Тогда для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$

$$(\theta X, \theta Y) = (X, Y), \tag{20}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение на $\mathfrak{m}$, порожденное римановой метрикой.

Теорема 10. *Пусть G/H — однородное Ф-пространство порядка 5, которое является римановым, и выполняется (20). Тогда для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$*
1) $(P_o X, P_o Y) = (X, Y)$,
2) $(J_o X, J_o Y) = (X, Y)$,
3) $(\widetilde{J}_o X, \widetilde{J}_o Y) = (X, Y)$,
4) $((f_i)_o X, Y) + (X, (f_i)_o Y) = 0$.

Доказательство. Из (20) следует $(\theta^k X, \theta^k Y) = (X, Y)$, где $k = \overline{1,4}$. Но тогда, как и при доказательстве равенства (8), прямым подсчетом получаем

$$\begin{aligned}(P_o X, P_o Y) = \frac{1}{5}(4(X,Y) - (\theta X, Y) - 2(\theta^2 X, Y) + (\theta^3 X, Y) - (X, \theta Y) -\\ - 2(X, \theta^2 Y) + (X, \theta^3 Y)) = \frac{1}{5}(4(X,Y) - (\theta X, Y) - (\theta^2 X, Y) -\\ - (\theta^3 X, Y) - (\theta^4 X, Y)) = (X, Y).\end{aligned}$$

Отсюда сразу следует, что подпространства $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ ортогональны относительно скалярного произведения. Значит,

$$(J_o X, J_o Y) = (\widetilde{J}_o X, \widetilde{J}_o Y) = (J_1 X_1, J_1 Y_1) + (J_2 X_2, J_2 Y_2).$$

Далее, как и при доказательстве равенств (15), имеем

$$\begin{aligned}(J_1 X_1, J_1 Y_1) = \left(\frac{1}{b}(\theta X_1 - a X_1), \frac{1}{b}(\theta Y_1 - a Y_1)\right) = \frac{1}{b^2}((1 + a^2)(X_1, Y_1) -\\ - a((\theta X_1, Y_1) + (X_1, \theta Y_1))) = \frac{1}{b^2}((1 + a^2)(X_1, Y_1) - a((\theta X_1, Y_1) + (\theta^4 X_1, Y_1))) =\\ = \frac{1}{b^2}((1 + a^2)(X_1, Y_1) - 2a^2(X_1, Y_1)) = (X_1, Y_1).\end{aligned}$$

Аналогично получаем второе слагаемое. Наконец,

$$\begin{aligned}((f_1)_o X, Y) + (X, (f_1)_o Y) = \left(\frac{1}{2} J_o(X + P_o(X)), Y\right) + \left(X, \frac{1}{2} J_o(Y + P_o(Y))\right) =\\ = \left(\frac{1}{2} J_o(X + P_o(X)), Y\right) - \left(\frac{1}{2} J_o(X + P_o(X)), Y\right) = 0.\end{aligned}$$

То же имеет место и для $(f_2)_o$. □

Пусть теперь однородное Ф-пространство порядка 5 является естественно редуктивным однородным пространством. Тогда ([12], с. 188) для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$

$$([X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z) = (X, [Y, Z]_{\mathfrak{m}}), \tag{21}$$

и риманова связность имеет функцию Номидзу вида $\alpha(X, Y) = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}}$.

Лемма 10. *Если однородное Ф-пространство G/H является естественно редуктивным, то $\mathfrak{m}^{\varphi} \subset \mathfrak{h}$ равносильно локальной симметричности G/H.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{m}^\varphi \subset \mathfrak{h}$. Полагая в (21) $X = X_1 \in \mathfrak{m}_1$, $Y = Y_1 \in \mathfrak{m}_1$, $Z = Z_2 \in \mathfrak{m}_2$, имеем $([X_1, Y_1]_\mathfrak{m}, Z_2) = 0$ в силу условия 2) теоремы 9. Так как $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1]_\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_2$, то в силу произвольности X, Y, Z $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1]_\mathfrak{m} = 0$. Аналогично показывается, что $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_2]_\mathfrak{m} = 0$. Отсюда получаем локальную симметричность G/H. Обратное очевидно. $\square$

Теорема 11. *Пусть однородное Φ-пространство G/H порядка 5 является естественно редуктивным, ∇ — ее риманова связность. Тогда следующие условия равносильны:*

а) $\nabla P = 0$,

б) $(\nabla_X P)X = 0$,

в) P *интегрируема,*

г) G/H *локально симметрично.*

Доказательство. а) $\Longrightarrow$ б) очевидно.

б) $\Longrightarrow$ г). Учитывая вид α, получаем $[X, P_o X]_\mathfrak{m} = 0 \ \forall X \in \mathfrak{m}$. Отсюда, полагая $X = Y + Z$, имеем $[Y, P_o Z]_\mathfrak{m} = [P_o Y, Z]_\mathfrak{m}$ и $[P_o Y, P_o Z]_\mathfrak{m} = [Y, Z]_\mathfrak{m}$. Это с учетом (7) дает $P_o[Y, Z]_\mathfrak{m} = -[Y, P_o Z]_\mathfrak{m}$ для всех $Y, Z \in \mathfrak{m}$. Но тогда из теоремы 9 и леммы 10 вытекает г).

г) $\Longrightarrow$ а) очевидно. г) $\Longrightarrow$ в) очевидно.

в) $\Longrightarrow$ г). Так же, как и при доказательстве леммы 10, получаем $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2]_\mathfrak{m} = 0$. С учетом следствия 1 леммы 3 это дает $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] = 0$, что в силу теоремы 9 и леммы 10 влечет требуемое. $\square$

Лемма 11. *Пусть G/H — риманово однородное Φ-пространство порядка 5, для которого $\mathfrak{m}^\varphi \subset \mathfrak{h}$, ∇ — риманова связность на G/H. $(\nabla_X P)X = 0$ тогда и только тогда, когда G/H является естественно редуктивным пространством.*

Доказательство. Относительно скалярного произведения на $\mathfrak{m}$ имеем ([12], с. 187)

$$2(\alpha(X, Y), Z) = -(X, [Y, Z]_\mathfrak{m}) - (Y, [X, Z]_\mathfrak{m}) + (Z, [X, Y]_\mathfrak{m}),$$

где $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$, α — функция Номидзу ∇. Но тогда $(P_o\alpha(X, X), P_o Y) = -(X, [X, Y]_\mathfrak{m})$ и $(\alpha(X, P_o X), P_o Y) = (X, [X, Y]_\mathfrak{m})$. Отсюда $(\alpha(X, P_o X) - P_o\alpha(X, X), P_o Y) = 2(X, [X, Y]_\mathfrak{m})$. Из последнего равенства очевидным образом вытекает доказательство предложения. $\square$

Теорема 12. *Пусть однородное Φ-пространство порядка 5 G/H является естественно редуктивным и ∇ — его риманова связность. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) $\nabla f_i = 0$,

б) $(\nabla_X f_i)X = 0$,

в) G/H *локально симметрично,*

г) f_i *интегрируема.*

Доказательство. Докажем теорему лишь для f_1, т. к. для f_2 доказательство аналогично.

б) $\Longrightarrow$ в). Из вида римановой связности вытекает, что б) равносильно выполнению условия $[X, (f_1)_o X]_\mathfrak{m} = 0 \ \forall X \in \mathfrak{m}$. Отсюда $[X, J_1 X_1]_\mathfrak{m} = 0$ или $[X_1, J_1 X_1]_\mathfrak{m} + [X_2, J_1 X_1]_\mathfrak{m} = 0$, что дает $[X_1, X_2]_\mathfrak{m} = 0$ для всех $X \in \mathfrak{m}$. Но тогда $[X_1, \theta X_2]_\mathfrak{m} = [X_1, cX_2 + dJ_2 X_2]_\mathfrak{m} = [X_1, dJ_2 X_2]_\mathfrak{m} = dJ_1[X_1, X_2]_1 - dJ_2[X_1, X_2]_2 = 0$. Аналогично $[X_2, \theta X_1]_\mathfrak{m} = 0$. Тогда с учетом следствия 2 теоремы 9 получаем $[X, \theta X]_\mathfrak{m} = [X_1, \theta X_1]_\mathfrak{m} + [X_1, \theta X_2]_\mathfrak{m} + [X_2, \theta X_1]_\mathfrak{m} + [X_2, \theta X_2]_\mathfrak{m} = 0$. Отсюда $\mathfrak{m}^\varphi \subset \mathfrak{h}$, что влечет в) в силу леммы 10.

в) $\Longrightarrow$ а) очевидно. в) $\Longrightarrow$ г) очевидно. а) $\Longrightarrow$ б) очевидно.

г) $\Longrightarrow$ в). Так как f_1 интегрируема, то из следствия теоремы 7 получаем, что P интегрируема. Теперь из предыдущей теоремы получаем требуемое. $\square$

Замечание. Результаты теоремы 12 независимо и в более общем случае доказаны также в [17].

Лемма 12. *Пусть однородное Φ-пространство G/H порядка 5 является естественно редуктивным. G/H является кэлеровым относительно $J(\widetilde{J})$ тогда и только тогда, когда G/H локально симметрично.*

Доказательство. Если G/H локально симметрично, то все очевидно. Обратно, пусть G/H является кэлеровым относительно J. Тогда $\forall X, Y \in \mathfrak{m}$ $J_o[X,Y]_\mathfrak{m} = [X, J_oY]_\mathfrak{m}$. Сопоставляя это равенство с равенствами теоремы 3, получаем в силу произвольности X и Y $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2]_\mathfrak{m} = 0$. Отсюда $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] = 0$, что дает локальную симметричность G/H в силу теоремы 9 и леммы 10. □

Лемма 13. *Пусть однородное* Φ*-пространство* G/H *порядка* 5 *является естественно редуктивным. Одна из канонических почти комплексных структур этого пространства является приближенно кэлеровой тогда и только тогда, когда вторая каноническая почти комплексная структура интегрируема.*

Доказательство. Пусть J является приближенно кэлеровой. Тогда $[X, J_oX]_\mathfrak{m} = 0$ для всех $X \in \mathfrak{m}$. Отсюда с учетом теоремы 3 получаем $[X_1, X_2]_1 = 0$. В силу произвольности $X \in \mathfrak{m}$ получаем $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2]_1 = 0$. Но так как G/H естественно редуктивно, то

$$([X_2, Y_1]_1, Z_1) = (X_2, [Y_1, Z_1]_2)$$

для всех $X_2 \in \mathfrak{m}_2$, $Y_1, Z_1 \in \mathfrak{m}_1$, что дает $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1]_2 = 0$. Теперь из теоремы 5 получаем интегрируемость $\widetilde{J}$. Обратное очевидно. Вторая часть теоремы доказывается аналогично. □

Следствие. Пусть однородное Φ-пространство G/H является естественно редуктивным. Обе канонические почти комплексные структуры этого пространства являются приближенно кэлеровыми тогда и только тогда, когда G/H локально симметрично.

Литература

1. Степанов Н.А. *Основные факты теории φ-пространств* // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 3. – С. 89–95.
2. Балащенко В.В., Степанов Н.А. *Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных* Φ*-пространствах* // Матем. сб. – 1995. – Т. 186. – № 11. – С. 1551–1580.
3. Степанов Н.А. *Почти комплексные структуры на φ-пространствах* // 3-я межвуз. научн. конф. по пробл. геометрии. Тез. докл. – Казань, 1967. – С. 158–160.
4. Tsagas Gr., Xenos Ph. *Relation between almost complex structures and Lie bracket for a special homogeneous spaces* // Tensor. – 1984. – V. 41. – № 3. – P. 278–284.
5. Xenos Ph. *Properties of the homogeneous spaces of order five* // Bull. of the Calcutta Math. Soc. – 1986. – V.78. – № 5. – P. 293–302.
6. Ковальский О. *Обобщенные симметрические пространства.* – М.: Мир, 1984. – 240 с.
7. Балащенко В.В., Чурбанов Ю.Д. *Инвариантные структуры на однородных* Φ*-пространствах порядка* 5 // УМН. – 1980. – Т. 45. – Вып. 1. – С. 169–170.
8. Степанов Н.А. *Однородные* 3*-циклические пространства* // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 12. – С. 65–74.
9. Balashchenko V.V. *Riemannian geometry of cannonical structures on regular* Φ*-spaces* // Preprint № 174/1994. Fakultat für Mathematik der Ruhr – Universitat Bochum, 1994. – P. 1–19.
10. Чурбанов Ю.Д. *О некоторых классах однородных* Φ*-пространств порядка* 5 // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 2. – С. 88–90.
11. Чурбанов Ю.Д. *Канонические f-структуры однородных* Φ*-пространств порядка* 5 // Вестн. Белорусск. ун-та. – 1994. – Сер.1. – № 1. – С. 51–54.
12. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 2. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
13. Степанов Н.А. *О редуктивности фактор-пространств, порожденных эндоморфизмами групп Ли* // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 2. – С. 74–79.
14. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
15. Балащенко В.В. *Инвариантные оснащения и индуцированные связности на регулярных* Φ*-пространствах линейных групп Ли* // Докл. АН БССР. – 1979. – Т. 23. – № 3. – С. 209–212.

16. Балащенко В.В. *Индуцированные связности на однородных* 3*-циклических пространствах линейных групп Ли* // Дифференц. геометрия многообразий фигур. – Калининград, 1987. – Вып. 18. – С. 10–13.
17. Balashchenko V. *Extending an idea of a Gray: homogeneous k-symmetric spaces and generalized Hermitian geometry* // Intern. Conf. on Diff. Geometry in memory of A. Gray. Abstracts. Bilbao (Spain). September 18-23, 2000.

Белорусский государственный университет

Поступила 01.08.2001