ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 2 (441)

УДК 517.93

Г.Г. ИСЛАМОВ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Пусть в линейной системе

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + u(t), \tag{1}$$

где $A(t)$ есть ω-периодическая $n \times n$-матрица с комплекснозначными локально суммируемыми элементами, управление $u(t)$ формируется по методу обратной связи

$$u(t) = -B(t)F(t)^{-1}x(t), \tag{2}$$

где $F(t) = X(t)e^{-tK}$, $K = \frac{1}{\omega}\ln X(\omega)$ (здесь берется главное значение логарифма), $X(t)$ — матрицант невозмущенной системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \tag{3}$$

а $B(t)$ есть ω-периодическая $n \times n$-матрица с комплекснозначными локально суммируемыми элементами.

При подстановке (2) в (1) получим однородную систему

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)F(t)^{-1}]x(t) \tag{4}$$

с ω-периодической матрицей. Свойства решений системы (4) будут определять свойства системы (1) с обратной связью.

Пусть E — единичная матрица порядка n, $\mathbb{C}^n$ — пространство n-мерных векторов с комплексными компонентами. Ранг функциональной матрицы $B(t)$ $\operatorname{rang} B$ определим как размерность образа отображения $(\Gamma z)(t) = B(t)z$, $z \in \mathbb{C}^n$, $t \in [0,\omega]$. Обозначим $\ker(X(\omega) - \rho E) = \{z \in \mathbb{C}^n : X(\omega)z = \rho z\}$. По определению (напр., [1], с. 28) матрица $X(\omega)$ называется матрицей монодромии, а ее собственные значения — мультипликаторами системы (3). Совокупность мультипликаторов называется спектром уравнения (3).

Лемма 1. *Если возмущенная система* (4) *не имеет мультипликаторов в заданной области* Ω *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$, *то*

$$\operatorname{rang} B \geq \max_{\rho\in\Omega} \dim\ker(X(\omega) - \rho E). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\rho \in \Omega$ и $z_1, \dots, z_m$ — базис подпространства $\ker(X(\omega) - \rho E)$. Допустим, что для некоторых скаляров $c_1, \dots, c_m$ при почти всех $t \in [0,\omega]$ линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{m} c_k B(t) z_k = B(t)z = 0$, где $z = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k z_k$. Отсюда для $x(t) = X(t)z = F(t)e^{tK}z = \rho^{\frac{t}{\omega}}F(t)z$ имеем $B(t)F(t)^{-1}x(t) = 0$ и, значит, $\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)F(t)^{-1}]x(t)$. Кроме того, $x(\omega) = X(\omega)z = \rho z = \rho x(0)$. По условию леммы 1 в области Ω нет мультипликаторов системы (4). Следовательно, $x(0) = z = 0$ и в силу линейной независимости $z_1, \dots, z_m$ все $c_k = 0, k = \overline{1,m}$. Это означает, что матричный оператор $B(t)$ переводит линейно независимую систему векторов $z_1, \dots, z_m$, $m = \dim\ker(X(\omega) - \rho E)$, в линейно независимую на $[0,\omega]$ систему вектор-функций $B(t)z_1, \dots, B(t)z_m$. Отсюда следует (5). $\square$

Следующая лемма аналогична лемме на с. 302 монографии [1].

Лемма 2. *Для любого комплексного* λ

$$\ker(K - \lambda E) = \ker(X(\omega) - e^{\lambda\omega} E). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $f(\lambda) = e^{\omega\lambda}$. Так как производная $\dot f(\lambda)$ не равна нулю на спектре матрицы K, то в силу теоремы 9 ([2], с. 158) при переходе от матрицы K к матрице $f(K) = e^{\omega K} = X(\omega)$ элементарные делители не "расщепляются", т. е. если матрица K имеет элементарный делитель $(\lambda - \lambda_j)^{m_j}$, то матрица монодромии $X(\omega)$ имеет элементарный делитель $(\lambda - e^{\lambda_j\omega})^{m_j}$ и все элементарные делители этой матрицы могут быть получены подобным образом. Отсюда видно, что число α жордановых клеток в каноническом представлении матрицы K, отвечающих λ_j, равно числу β жордановых клеток в каноническом представлении матрицы $X(\omega)$, отвечающих $e^{\lambda_j\omega}$ (напомним, что при определении матрицы $K = \frac{1}{\omega}\ln X(\omega)$ мы берем главное значение логарифма и, значит, $\lambda_k - \lambda_j \neq \frac{2\pi i}{\omega} l$ при $\lambda_k \neq \lambda_j$, где l целое). Так как $\alpha = \dim\ker(K - \lambda_j E)$ и $\beta = \dim\ker(X(\omega) - e^{\lambda\omega}E)$, то подпространства в (6) имеют одинаковую размерность.

Пусть $Kz = \lambda z$. Тогда $X(\omega)z = e^{\omega K}z = e^{\lambda\omega}z$. Следовательно, $\ker(K - \lambda E) \subseteq \ker(X(\omega) - e^{\lambda\omega}E)$. Так как размерности указанных подпространств совпадают, то имеет место (6). $\square$

Лемма 3. *Пусть*

$$B(t) = F(t)S, \tag{7}$$

где S — произвольная постоянная $n\times n$-матрица. Тогда $Y(t) = F(t)e^{t(K-S)}$ будет матрицантом возмущенной системы (4) и $Y(\omega) = e^{\omega(K-S)}$ — матрицей монодромии этой системы.

Доказательство. Для $F(t) = X(t)e^{-tK}$ имеем

$$\dot F(t) = \dot X(t)e^{-tK} - X(t)Ke^{-tK} = A(t)X(t)e^{-tK} - X(t)e^{-tK}K = \\ A(t)F(t) - F(t)K = [A(t) - B(t)F(t)^{-1}]F(t) - F(t)(K - S).$$

Так как $Y(t) = F(t)e^{t(K-S)}$, то с учетом найденного представления для производной $\dot F(t)$ получим

$$\dot Y(t) = \dot F(t)e^{t(K-S)} + F(t)(K - S)e^{t(K-S)} = \\ = \{[A(t) - B(t)F(t)^{-1}]F(t) - F(t)(K - S)\}e^{t(K-S)} + F(t)(K - S)e^{t(K-S)} = \\ = [A(t) - B(t)F(t)^{-1}]F(t)e^{t(K-S)} = [A(t) - B(t)F(t)^{-1}]Y(t). \quad \square$$

Следующее утверждение составляет содержание теоремы двойственности заметки [3] в комплексном случае.

Лемма 4. *Пусть Λ — произвольное собственное подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Тогда*

$$\max_{\lambda\in\Lambda}\dim\ker(K - \lambda E) = \min \operatorname{rang} S, \tag{8}$$

где минимум берется по всем матрицам S порядка n, для которых в области Λ нет собственных значений матрицы $K - S$.

Основным результатом данной работы является

Теорема. *Пусть Ω — произвольная область $\mathbb{C}$, содержащая не все ненулевые комплексные числа. Тогда*

$$\max_{\rho\in\Omega}\dim\ker(X(\omega) - \rho E) = \min \operatorname{rang} B,$$

где минимум берется по всем ω-периодическим $n \times n$-матрицам $B(t)$ с комплекснозначными локально суммируемыми компонентами, для которых возмущенная система (4) *не имеет мультипликаторов в заданной области* Ω.

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно показать, что в (5) оценка снизу достигается. Выберем максимально широкое множество Λ так, что $\Omega = \{\rho : \rho = e^{\omega\lambda}, \lambda \in \Lambda\}$. В силу (6) и (8)

$$\max_{\rho\in\Omega} \dim\ker(X(\omega) - \rho E) = \max_{\lambda\in\Lambda} \dim\ker(K - \lambda E) = \min \operatorname{rang} S, \qquad (9)$$

где минимум берется по всем матрицам S порядка n, для которых в области Λ нет собственных значений матрицы $K - S$. Для матрицы минимального ранга $S = S_0$ в (9) по формуле (7) построим ω-периодическую матрицу $B(t)$ такую, что для матрицы монодромии возмущенной системы (4) будем иметь $Y(\omega) = e^{\omega(K-S_0)}$. Так как в области Λ нет собственных значений матрицы $K - S_0$, то в области Ω не может быть собственных значений матрицы $Y(\omega)$. В силу (7) $B(t) = F(t)S_0$. Отсюда видим, что ранг функциональной матрицы $B(t)$ равен величине

$$\operatorname{rang} S_0 = \max_{\rho\in\Omega} \dim\ker(X(\omega) - \rho E).$$

Это доказывает, что равенство в (5) достигается. $\square$

Замечание. Пусть $Q(t)$ — ω-периодическая $n \times n$-матрица с комплекснозначными локально суммируемыми элементами. Отсутствие у возмущенной системы $\dot{x}(t) = [A(t) - Q(t)]x(t)$ мультипликаторов в заданной области Ω эквивалентно отсутствию при любом $\rho \in \Omega$ ее нетривиальных решений, обладающих свойством $x(t + \omega) = \rho x(t)$. При выполнении одного из этих эквивалентных условий функциональная матрица $Q(t)F(t)$ в силу леммы 1 должна иметь ранг, не меньший максимальной геометрической кратности мультипликаторов из области Ω невозмущенной системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Теорема показывает, что минимально возможное значение ранга совпадает с максимальной геометрической кратностью.

Литература

1. Якубович В.А., Старжинский В.М. *Параметрический резонанс в линейных системах.* – М.: Наука, 1987. – 328 с.
2. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
3. Исламов Г.Г. *Об управлении спектром динамической системы* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 8. – С. 1299–1302.

Удмуртский государственный университет

Поступила
25.06.1997