ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 11 (486)

УДК 517.983

П.А. ЛУЖЕЦКАЯ, В.А. НОГИН

$L_p \to L_q$-ОЦЕНКИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ СИМВОЛАМИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ

1. *Введение.* В различных вопросах анализа и математической физики важную роль играют операторы Р. Стрихарца

$$M^\alpha f = \frac{\Gamma(n/2+\alpha)}{\pi^{n/2}\Gamma(\alpha)} \int_{|y|<1} (1-|y|^2)^{\alpha-1} f(x-y)dy \tag{1}$$

с символами

$$m^\alpha(|\xi|) = \Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right) |\xi|^{1-n/2-\alpha} J_{n/2+\alpha-1}(|\xi|),$$

где $J_\nu(z)$ — функция Бесселя порядка ν, а также их модификации (напр., [1]–[6]). Одна из наиболее интересных и трудных задач в теории указанных операторов относится к построению их $\mathcal{L}$-характеристик (см. п. 2 по поводу $\mathcal{L}$-характеристики оператора (1)).

Естественное обобщение указанных результатов связано с оператором

$$M^\alpha_\theta f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{|y|<1} \theta(y')(1-|y|^2)^{\alpha-1} f(x-y)dy, \tag{2}$$

$y' = y/|y|$. Здесь рассматривается случай, в котором $\theta(y') = Y_m(y')$ (будем писать $M^\alpha_\theta = M^\alpha_m$), где $Y_m(y')$ — сферическая гармоника порядка m. Строится $\mathcal{L}$-характеристика оператора M^α_m, т. е. дано описание всех пар $(1/p,\ 1/q)$, для которых указанный оператор ограничен из L_p в L_q. Именно, показано, что

$$\mathcal{L}(M^\alpha_m) = \mathcal{L}(M^\alpha), \quad \alpha > (1-n)/2 \tag{3}$$

(в случае $\alpha < 0$ интегралы (1) и (2) понимаются в смысле регуляризации). Аналогичный результат получен для оператора

$$(K^\alpha_m \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} Y_m(t')(1-|t|^2+i0)^{\alpha-1}\varphi(x-t)\,dt. \tag{4}$$

Показано, что

$$\mathcal{L}(K^\alpha_m) = \mathcal{L}(K^\alpha), \tag{5}$$

где K^α — оператор (4), в котором $Y_m(t') \equiv 1$ $(m=0)$.

Заметим, что при построении $\mathcal{L}$-характеристик операторов M^α_m и K^α_m мы существенно основываемся на интегральных представлениях для их символов в виде некоторых осциллирующих интегралов, понимаемых при $\alpha < 0$ в смысле регуляризации. В частности, при больших $|\xi|$ символ $b_{\alpha,m}(\xi)$ оператора M^α_m представи́м в виде

$$b_{\alpha,m}(\xi) = \frac{C_{n,m}}{|\xi|^{(n-2)/2}\Gamma(\alpha)} Y_m(\xi') \int_0^1 \rho^{n/2}(1-\rho^2)^{\alpha-1} J_{(n-2)/2+m}(\rho|\xi|)\,d\rho \tag{6}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00046а.

(регуляризация символа $b_{\alpha,m}(\xi)$ при $\alpha < 0$ осуществляется с помощью аналитического продолжения интеграла (6) в полуплоскость $\operatorname{Re}\alpha > (1-n)/2$). В этом принципиальное отличие от работ [1]–[5], в которых авторы имели дело с гораздо более простой ситуацией, когда символы соответствующих потенциалов выписывались явно через бесселевы функции.

Дано также приложение полученных $L_p \to L_q$-оценок для потенциала (4) к обращению и описанию образа указанного потенциала с L_p-плотностями.

2. *Об $\mathcal{L}$-характеристике операторов M^α и K^α.* Пусть M_p^q — класс мультипликаторов Фурье, порождающих линейные ограниченные операторы из L_p в L_q. Следующая теорема описывает $\mathcal{L}$-характеристику оператора M^α.

Теорема 1 ([1], [6]). *Пусть $\alpha > (1-n)/2$. Тогда*

1) *$m^\alpha \in M_p^q$, $1 < p \leqslant q < \infty$ тогда и только тогда, когда $1/p + 1/q \leqslant 1$, $1/p - n/q \leqslant \alpha$ или $1/p + 1/q \geqslant 1$, $n/p - 1/q \leqslant \alpha + n - 1$;*
2) *$m^\alpha \in M_1^q$, $1 \leqslant q < \infty$ тогда и только тогда, когда $0 < \alpha < 1$ и $1/q > 1 - \alpha$ или $\alpha = 0$ и $q = 1$;*
3) *$m^\alpha \in M_p^\infty$, $1 < p \leqslant \infty$ тогда и только тогда, когда $0 < \alpha < 1$ или $1/p < \alpha$, или $\alpha = 0$, или $p = \infty$;*
4) *$m^\alpha \in M^\infty$ тогда и только тогда, когда $\alpha \geqslant 1$.*

$\mathcal{L}$-характеристика оператора K^α может быть описана следующим образом.

Теорема 2 ([6], [7]). *Пусть $(2-n)/2 < \alpha < 1$, $\alpha \neq 0, -1, \dots, [(2-n)/2] + 1$. Тогда*

$$\mathcal{L}(K^\alpha) = \mathcal{L}(M^\alpha) \cap \left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right),\ \frac{n-2+2\alpha}{n} \leqslant \frac{1}{p} \leqslant 1,\ 0 \leqslant \frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{p} - \frac{n-2+2\alpha}{n} \right\}.$$

3. *Основные результаты.* Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть $\alpha > (1-n)/2$. Тогда справедливо равенство* (3).

Доказательство вложения

$$\mathcal{L}(M^\alpha) \subset \mathcal{L}(M_m^\alpha) \tag{7}$$

основано на равномерном асимптотическом разложении функции Бесселя $J_\nu(z)$, асимптотических свойствах некоторых интегралов по отрезку от осциллирующих функций, а также результатах из [4] для мультипликаторов вида

$$\mu_\beta^\pm(\xi) = u(|\xi|^2)|\xi|^{-b} e^{\pm i|\zeta|}, \quad b > 0,$$

где $u(r) \in C^\infty(R_+^1)$, $0 \leqslant u(r) \leqslant 1$; $u(r) = 0$ при $r \leqslant 1$; $u(r) = 1$ при $r \geqslant 2$.

При доказательстве точности вложения (7) (т. е. при доказательстве равенства (3)) мы существенно используем асимптотическую формулу для обратного преобразования Фурье $F^{-1}(Y_m(\xi')\mu_\beta^\pm(\xi))(x)$ (понимаемого в смысле S'-распределений) при $|x| \to 1$.

Для оператора K_m^α (4) имеет место следующая

Теорема 4. *Пусть $(2-n)/2 < \alpha < 1$, $\alpha \neq 0, -1, \dots, [(2-n)/2] + 1$. Тогда справедливо равенство* (5).

Замечание. Принципиальное отличие между множествами $\mathcal{L}(M_m^\alpha)$ и $\mathcal{L}(K_m^\alpha)$ состоит в том, что $\mathcal{L}(K_m^\alpha)$ не содержит точек, лежащих выше "соболевской" прямой $1/q = 1/p - (n+2\alpha-2)/n$, соответствующей порядку $n + 2\alpha - 2$ потенциала K_m^α на бесконечности.

4. *Приложение.* В [8] на основе вложения (7) было построено обращение потенциалов $f = M_m^\alpha \varphi$ с плотностями $\varphi(x) \in L_p$ методом аппроксимативных обратных операторов (АОО) в случае неэлиптической гармоники $Y_m(t')$ и был описан образ $M_m^\alpha(L_p)$ в терминах обращающих конструкций. Здесь мы получили аналогичные результаты для потенциалов (4).

В рамках метода АОО обращение потенциалов $f = K^\alpha_m\varphi$, $\varphi \in L_p$, будем строить в виде

$$(B^\alpha_m f)(x) = \overset{(L_p)}{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,\overset{(L_2)}{\lim_{\delta\to 0}} B^\alpha_{m,\varepsilon,\delta} f, \tag{8}$$

где

$$B^\alpha_{m,\varepsilon,\delta} f = F^{-1}\left[\frac{\overline{a_{\alpha,m}(\xi)}e^{-\varepsilon|\xi|^2}}{|a_{\alpha,m}(\xi)|^2 + i\delta}\right] * f,$$

$a_{\alpha,m}(\xi)$ — символ оператора (4), представимый в виде

$$a_{\alpha,m}(\xi) = \frac{c_{n,m}}{|\xi|^{(n-2)/2}} Y_m(\xi') \int_0^\infty \rho^{n/2}(1-\rho^2+i0)^{\alpha-1} J_{(n-2)/2+m}(\rho|\xi|)\,d\rho,$$

где гармоника $Y_m(\xi')$ неэллиптическая, константа $c_{n,m}$ зависит только от n и m. При $\alpha < 0$ этот интеграл понимается в смысле регуляризации.

Теорема 5. *Пусть* $(2-n)/2 < \alpha < 1$, $\alpha \neq 0, -1, \ldots, [(2-n)/2]+1$, $1 \leqslant p \leqslant 2$ *таковы, что* $(1/p, 1/q) \in \mathcal{L}(K^\alpha_m)$ *при некотором* q. *Тогда* $B^\alpha_m K^\alpha_m \varphi = \varphi$, $\varphi \in L_p$, *где* B^α_m *— оператор* (8), *предел по* L_p*-норме в* (8) *можно заменить пределом почти всюду.*

Описание образа $K^\alpha_m(L_p)$ существенно основано на следующей лемме.

Лемма. 1) *Если* $n > 2$,

$$\frac{2-n}{2} < \alpha \leqslant \frac{(n-1)(4-n)}{2(n-2)}, \quad \alpha \neq -1, -2, \ldots, \left[\frac{2-n}{2}\right] + 1,$$
$$\frac{n-1}{\alpha+n-1} \leqslant p \leqslant \frac{2n}{3n-4+4\alpha},$$

или $n < 4$, $0 < \alpha < (4-n)/n$, $1 < p \leqslant 2n/(3n-4+4\alpha)$, *то оператор* K^α_m *ограничен из* L_p *в* $L_{q_1} + L_{q_2}$, *где*

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{q_2} \leqslant \frac{1}{p} - \frac{n-2+2\alpha}{n}, \quad \frac{1}{2} \leqslant \frac{n}{p} - (\alpha+n-1) \leqslant \frac{1}{q_1} \leqslant \frac{1}{p}.$$

2) *Если* $n < 4$, $0 < \alpha < (4-n)/4$, *то оператор* K^α_m *ограничен из* L_1 *в* $L_{q_1} + L_{q_2}$, *где*

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{q_2} < \frac{2(1-\alpha)}{n}, \quad 1-\alpha < \frac{1}{q_1} \leqslant 1.$$

Теорема 6. *Пусть* p *и* α *таковы, что оператор* K^α_m *ограничен из* L_p *в* $L_{q_1} + L_{q_2}$ *для некоторых* $q_1, q_2 \leqslant 2$ *в соответствии с леммой. Тогда*

$$K^\alpha_m(L_p) = \{f :\ f \in L_{q_1} + L_{q_2},\ B^\alpha_m f \in L_p\},$$

где q_1, q_2 $(1 \leqslant q_1, q_2 \leqslant 2)$ *— любые числа такие, что оператор* K^α_m *ограничен из* L_p *в* $L_{q_1} + L_{q_2}$ *в соответствии с леммой,* B^α_m *— оператор* (8).

Авторы благодарны профессору С.Г. Самко за полезное обсуждение результатов работы.

Литература

1. Strichartz R.S. *Convolutions with kernels having singularities on a sphere* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1970. – V. 146. – № 2. – P. 461–471.
2. Peral I.C. *L_p-estimates for the wave equation* // J. Funct. Anal. – 1980. – V. 36. – P. 114–145.
3. Miyachi A. *On some singular Fourier multipiers* // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo., Sec. IA. – 1981. – V. 28. – P. 267–315.
4. Miyachi A. *On some estimates for the wave equation in L^p and H^p* // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo., Sec. IA. – 1980. – V. 27. – № 2. – P. 331–354.
5. Рубин Б.С. *Мультипликаторные операторы, связанные с задачей Коши для волнового уравнения. Разностная регуляризация* // Матем. сб. – 1989. – Т. 180. – № 11. – С. 1524–1547.

6. Nogin V.A., Samko S.G. *Some applications of potentials and approximative inverse operators in multi-dimensional fraction calculus* // Fractional Calculus & Appl. Anal. – 1999. – V. 2. – № 2. – P. 205–228.
7. Ногин В.А., Лужецкая П.А. *Об $\mathcal{L}$-характеристике некоторых операторов типа потенциала с особенностями ядер на сфере* // Рост. ун-т. – Ростов-на-Дону, 1999. – 19 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 1307-В99.
8. Nogin V.A., Luzhetskaya P.A. *Inversion and description of the ranges of multiplier operators of Strichartz–Peral–Miyachi-type* // Fractional Calculus & Appl. Anal. – 2000. – V. 3. – № 1. – P. 87–96.

Ростовский государственный университет

Поступила
24.01.2002