ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 9 (424)

УДК 514.76

А.Ю. ДАНЬШИН

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ОБЩЕГО ПРОСТРАНСТВА ПУТЕЙ

С помощью предложенного Ф.И. Каганом [4] аппарата полных лифтов тензоров произвольных валентностей из многообразия M в его касательное расслоение $T(M)$ исследуется структура инфинитезимальных проективных преобразований на касательном расслоении $T(M)$, наделенном аффинной связностью Γ, полученной с помощью лифта Яно-Окубо Кагана [3]–[5] из связности G общего пространства путей $M(G)$. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы векторное поле на $T(M(G))$ было инфинитезимальным проективным (в частности, аффинным) преобразованием относительно связности Γ (теорема 1). В частном случае, когда G есть аффинная связность на M, полученные выводы совпадают с результатами Ф.И. Кагана [6], непосредственным обобщением которых они являются.

1. Определения, обозначения, постановка задачи

Путями на многообразии M являются кривые $x^i = x^i(t)$, $i = 1, \dots, n$, $n = \dim M$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i(x, \dot{x}) = 0, \tag{1}$$

где $\dot{x}^i = dx^i/dt^i$, $G^i(x, \dot{x})$ — заданные функции линейных элементов $(x^i, \dot{x}^k)$ положительно однородные второй степени по $\dot{x}$. Многообразие M, на котором заданы пути (1), называется общим пространством путей (ОПП) [1] и обозначается ниже через $M(G)$. Связность G в общем пространстве путей задается коэффициентами

$$G^i_{km} \equiv G^i_{\cdot k \cdot m} \equiv \frac{\partial^2 G^i}{\partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^m}, \tag{2}$$

удовлетворяющими в соответствии с теоремой Эйлера соотношению

$$2G^i = G^i_{km} \dot{x}^k \dot{x}^m.$$

Напомним следующее определение, важное для нашего изложения: *векторное поле v на ОПП называется инфинитезимальным проективным преобразованием в ОПП, если порождаемая этим полем в окрестности каждой точки $x \in M$ локальная однопараметрическая группа преобразований сохраняет пути.* Необходимое и достаточное условие этого состоит в следующем [1]:

$$\mathcal{L}_v G^i = \dot{x}^i P, \tag{3}$$

где $P = P(x, \dot{x})$ — так называемый проективный фактор, $\mathcal{L}_v$ — производная Ли вдоль векторного поля v. Уравнение (3) равносильно следующему:

$$\mathcal{L}_u G^i_{km} = \delta^i_k P_m + \delta^i_m P_k + \dot{x}^i P_{km},$$

где $p_k \equiv P_{\cdot k}$, $P_{km} \equiv P_{\cdot k \cdot m}$.

Как известно [2], связность в $T(M)$ есть n-мерное распределение, задаваемое следующим набором форм:

$$\theta^i = d\dot{x}^i + H^i_k(x,\dot{x})dx^k.$$

Так как коэффициенты $G^i_k = G^i_{km}\dot{x}^m$ обладают такими же трансформационными свойствами, что и функции H^i_k, связность в ОПП естественным образом порождает связность в $T(M)$: $H^i_k = G^i_k$. Опираясь на этот простой факт, можно строить полные лифты тензорных полей относительно связности G и, как хорошо известно, любой тензор T валентности (a,b) на $T(M)$ может быть представлен в виде полного лифта набора $N = 2^{a+b}$ локальных тензорных полей $\underset{\nu}{t}(x,\dot{x})$ $(\nu = 0,\dots,N-1)$ [4]:

$$T = {}^G[\underset{0}{t},\underset{1}{t},\dots,\underset{N-1}{t}].$$

В статье используются обозначения, принятые в [4].

Отметим несколько типов лифтов, используемых в дальнейшем

1) вертикальный лифт векторного поля v

$${}^V v = {}^G[0,v];$$

2) горизонтальный лифт векторного поля v

$${}^H v = {}^G[v,0];$$

3) естественный лифт векторного поля v

$${}^N v = {}^G[v,\overset{0}{\nabla}v],$$

где $\overset{0}{\nabla} = \dot{x}^k\nabla_k$, ∇_k — ковариантная производная относительно связности G;

4) горизонтально-векторный лифт тензорного поля A типа (1,1)

$${}^{HX}A = {}^G[A\cdot\dot{x},0],$$

где $(A\cdot\dot{x})^i = A^i_k\dot{x}^k$;

5) вертикально-векторный тип тензорного поля A типа (1,1)

$${}^{VX}A = {}^G[0,A\cdot\dot{x}].$$

Компоненты всех рассматриваемых тензоров и связностей на $T(M)$ будут записываться в специальной системе координат $x^\alpha = (x^k,\dot{x}^m)$, $\alpha,\beta,\gamma\ldots = 1,\dots,2n$.

Следуя К. Яно, Т. Окубо и Ф.И. Кагану [5], введем в касательном расслоении $T(M(G))$ симметричную аффинную связность Γ, называемую естественным лифтом связности G. Ее ненулевые коэффициенты $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(Z)$ имеют вид

$$\Gamma^{i+n}_{k+nm} = \Gamma^{i+n}_{mk+n} = \Gamma^i_{km} = G^i_{km},$$
$$\Gamma^{i+m}_{km} = \dot{x}^t\partial_t G^i_{km} - 2G^t G^i_{kmt},$$

где $\partial_k = \partial/\partial x^k$, $G^i_{kmt} \equiv G^i_{km\cdot t}$.

Пусть векторное поле $\tilde{v}$ на $T(M)$ является инфинитезимальным проективным преобразованием связности Γ. Тогда оно удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}_{\tilde{v}}\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\beta\varphi_\gamma + \delta^\alpha_\gamma\varphi_\beta. \qquad (4)$$

Целью нашего исследования является выяснение структуры векторного поля $\tilde{v}$.

2. Теорема о разложении векторного поля инфинитезимальных проективных преобразований в $T(M(G))$

Решение поставленной задачи является

Теорема. *Пусть $M(G)$ — общее пространство путей ($n > 2$). Для того чтобы векторное поле $\tilde{v}$ на касательном расслоении $T(M(G))$ определяло инфинитезимальные проективные преобразования связности Γ, являющейся естественным лифтом связности G, необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид*

$$\tilde{v} = {}^N u + {}^V v + {}^{HX} A + {}^{VX} B + p(\dot{x})^{VX} id,$$

где $u = u(x)$ — векторное поле на M, определяющее инфинитезимальные проективные преобразования на $M(G)$

$$\mathcal{L}_u G^i = \dot{x}^i q_k \dot{x}^k$$

с проективным фактором $P = q_k(x)\dot{x}^k$;
$v = v(x)$ — векторное поле на M, определяющее инфинитезимальные аффинные преобразования на $M(G)$

$$\mathcal{L}_v G^i = 0,$$

и, кроме того, удовлетворяющее условиям

$$v^t G^i_{kmt} = 0, \quad v^t \dot{x}^s \nabla_s G^i_{kmt} = 0;$$

$p = p(x)$, $q = q(x)$ — параллельные 1-формы на M, т. е.

$$\nabla_k p_m = \nabla_k q_m = 0;$$

$A = A(x)$, $B = B(x)$ — тензорные поля типа $(1,1)$ на M, удовлетворяющие условиям

$$\nabla_k A^i_m = \delta^i_k p_m, \quad A^s_t H^i_{mks} = 0,$$
$$\nabla_k B^i_m = -\delta^i_k q_m, \quad B^s_t H^i_{mks} - B^i_s H^s_{mkt} = 0,$$

где H^i_{klm} — тензор кривизны связности G [1]

$$H^i_{klm} = \partial_m G^i_{kl} - \partial_l G^i_{km} + G^s_{kl} G^i_{sm} - G^s_{km} G^i_{sl} + G^s_l G^i_{kms} - G^s_m G^i_{kls}.$$

При этом 1-форма φ в уравнении (4) для $\tilde{v}$ имеет вид $\varphi = {}^G[p, q]$.

3. Доказательство теоремы

Доказательство теоремы основано на представлении производной Ли связности Γ в виде полного лифта. В уравнении (4) в виде полного лифта представляются также его правая часть и поля $\tilde{v}$ и φ, т. е.

$$\tilde{v} = {}^G[\underset{0}{v}, \underset{1}{v}], \quad \varphi = {}^G[\underset{0}{p}, \underset{1}{p}].$$

Это проверяется вычислениями, основанными на теории лифтов, развитой в работе [4]. Непосредственные вычисления показывают также, что уравнение (4) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\underset{0}{v}{}^i{}_{\cdot k \cdot m} = 0,$$
$$\underset{1}{v}{}^i{}_{\cdot k \cdot m} - \underset{0}{v}{}^t G^i_{kmt} = \delta^i_k \underset{0}{p}_m + \delta^i_m \underset{0}{p}_k,$$
$$\nabla_k(\underset{0}{v}{}^i{}_{\cdot m}) = \delta^i_k \underset{0}{p}_m,$$
$$\nabla_k(\underset{1}{v}{}^i{}_{\cdot m}) + \underset{1}{v}{}^t G^i_{kmt} + \underset{0}{v}{}^t{}_{\cdot m} H^i_{tks}\dot{x}^s + \underset{0}{v}{}^t H^i_{mkt} = \delta^i_m \underset{1}{p}_k,$$
$$\underset{1}{v}{}^t G^i_{kmt} + \nabla_k \nabla_m \underset{0}{v}{}^i - \underset{0}{v}{}^i{}_{\cdot t} H^t_{mks}\dot{x}^s + \underset{0}{v}{}^t H^i_{mkt} = \delta^i_k \underset{1}{p}_m + \delta^i_m \underset{1}{p}_k,$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_k \nabla_m \underset{1}{v}^i - \underset{1}{v}^i{}_{\cdot t} H^t_{mks} \dot{x}^s + \underset{1}{v}^t (H^i_{mkt} + \dot{x}^s \nabla_s G^i_{kmt}) + H^i_{tks} \dot{x}^s \nabla_m \underset{0}{v}^t + \\
+ H^i_{tms} \dot{x}^s \nabla_k \underset{0}{v}^t + \underset{0}{v}^t (\dot{x}^s \nabla_k H^i_{tms} + \dot{x}^s \nabla_s H^i_{mkt} + H^s_k G^i_{tms} - H^s_t G^i_{kms}) = 0.
\end{aligned}
$$

Проанализируем приведенную выше систему. Из первого и третьего уравнений этой системы следует

$$
\begin{gathered}
\underset{0}{v}^i = u^i(x) + A^i_k(x) \dot{x}^k, \\
\underset{0}{p}_k = p_k(x) = \partial_k (trA), \\
\nabla_k A^i_m = \delta^i_k p_m,
\end{gathered}
$$

а из второго благодаря факту $\underset{0}{v}^s G^i_{kms} = \partial_{\cdot k} \nabla_m u^i$ следует

$$
\underset{1}{v}^i = v^i(x) + \dot{x}^s \nabla_s u^i + B^i_k(x) \dot{x}^k + \dot{x}^i p_k \dot{x}^k.
$$

Оставшиеся три уравнения преобразуются соответственно к виду

$$
\begin{gathered}
\mathcal{L}_u G^i_{km} + \nabla_k B^i_m + v^s G^i_{kms} + \dot{x}^t (B^s_t G^i_{kms} + \delta^i_m \nabla_k p_t + \delta^i_t \nabla_k p_m + A^s_t H^i_{mks} + A^s_m H^i_{skt}) = \delta^i_m \underset{1}{p}_k, \\
\mathcal{L}_u G^i_{km} + v^s G^i_{kms} + \dot{x}^t (B^s_t G^i_{kms} + \delta^i_m \nabla_k p_t + A^s_t H^i_{mks} - A^i_s H^s_{mkt}) = \delta^i_k \underset{1}{p}_m + \delta^i_m \underset{1}{p}_k, \\
\mathcal{L}_v G^i_{km} - 2 G^i_{kms} \mathcal{L}_u G^s + \dot{x}^t (\nabla_t \mathcal{L}_u G^i{}_{km} + \nabla_k \nabla_m B^i_t + B^s_t H^i_{mks} - B^i_s H^s_{mkt} - A^s_t H^r_s G^i_{kmr}) + \\
+ \dot{x}^t \dot{x}^l (B^s_t \nabla_l G^i_{kms} + \delta^i_t \nabla_k \nabla_m p_l - \delta^i_t p_s H^s_{mkl} + p_t H^i_{kml} + p_t H^i_{mkl} + A^s_t \nabla_k H^i_{sml} + A^s_t \nabla_l H^i_{mks}) = 0.
\end{gathered}
$$

Пользуясь однородностью входящих в уравнения величин и предыдущими тождествами, получаем из этих уравнений следующие следствия. Из первых двух уравнений имеем

$$
\begin{gathered}
\mathcal{L}_u G^i = \dot{x}^i q_k \dot{x}^k, \\
v^t G^i_{kmt} = 0, \\
\nabla_k B^i_m = -\delta^i_k q_m, \\
\underset{1}{p}_k = q_k(x) + C_{km}(x, \dot{x}) \dot{x}^m, \\
A^s_t H^i_{mks} - A^i_s H^s_{mkt} = \delta^i_k C_{mt} + \delta^i_m C_{kt} - \delta^i_m \nabla_k p_t, \\
A^s_t H^i_{mks} + A^s_m H^i_{skt} = \delta^i_m C_{kt} - \delta^i_m \nabla_k p_t - \delta^i_t \nabla_k p_m,
\end{gathered}
$$

где C_{km} — однородные функции степени 0 по $\dot{x}$. Из двух последних соотношений следует

$$
C_{km} = 0, \quad \nabla_k p_m = 0, \quad A^s_t H^i_{mks} = 0.
$$

И, наконец, из последнего уравнения системы, учитывая тождества и дифференциальные следствия предыдущих соотношений, получим

$$
\mathcal{L}_v G^1 = 0, \quad \nabla_k q_m = 0, \quad B^s_t H^i_{mks} - B^i_s H^i_{mkt} = 0, \quad v^t \dot{x}^s \nabla_s G^i_{kmt} = 0.
$$

Теорема доказана.

В заключение автор благодарит проф. А.В. Аминову за постановку задачи и полезные советы.

Литература

1. Рунд Х. *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств.* – М.: Наука, 1981. – 502 с.
2. Номидзу К. *Группы Ли и дифференциальная геометрия.* – М.: Ин. лит., 1960. – 128 с.
3. Yano K., Okubo T. *On the tangent bundles of generalized spaces of path* // Rend. mat. – 1971. – V. 4. – № 2. – P. 327–348.
4. Каган Ф.И. *К теории лифтов тензорных полей из многообразия в его касательный пучок* // Изв. вузов. Математика. – 1969. – № 9. – С. 37–46.
5. Каган Ф.И. *Аффинные связности на касательном расслоении* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 2. – С. 31–42.
6. Каган Ф.И. *Каноническое разложение проективно-киллинговых и аффинно-киллинговых векторов на касательном расслоении* // Матем. заметки. – 1976. – Т. 19. – № 2. – С. 247–258;

Казанский государственный университет

Поступила
25.04.1995