ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 1 (512)

УДК 519.63

А.В. ГУЛИН, Н.И. ИОНКИН, В.А. МОРОЗОВА

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

1. Введение. В работе исследуется устойчивость разностных схем с весами, аппроксимирующих уравнение теплопроводности с нелокальными краевыми условиями двух типов. В случае краевых условий первого типа система собственных функций основного разностного оператора не образует базиса в пространстве сеточных функций. Показано, что в этом случае не существует нормы, в которой явная схема была бы устойчивой при обычном условии $\tau \leqslant 0{,}5h^2$. Найдено близкое к указанному условие, необходимое и достаточное для устойчивости в специально построенной норме. В случае краевых условий второго типа система собственных функций является базисной и существует норма, в которой схема устойчива при обычном условии на шаги сетки.

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad u(x,0) = u_0(x) \tag{1}$$

с дополнительными условиями

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t), \quad t > 0. \tag{2}$$

Известно, что определяющий указанную задачу дифференциальный оператор

$$Lu(x) = -u''(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = u'(1) \tag{3}$$

не является самосопряженным и не обладает базисной системой собственных функций.

Общая постановка неклассической задачи для уравнений в частных производных сформулирована в [1]. Задачи (1), (2) и более сложные изучались в [2]–[5]. Было показано, что для операторов вида (3) существует базис Рисса, состоящий из собственных и присоединенных функций. С помощью разложения по базису Рисса в упомянутых работах доказано существование и единственность многих задач с нелокальными граничными условиями. Различные аспекты теории разностных схем для задач с нелокальными граничными условиями рассматривались в [6]–[9]. Впервые разностные схемы для задачи (1), (2) рассмотрены в [10]. Здесь в явном виде построен базис из собственных и присоединенных функций разностного оператора, и на этой основе получены достаточные условия устойчивости разностных схем с весами. В [11] предпринята попытка вложить исследование разностных схем с нелокальными граничными условиями в общую теорию устойчивости разностных схем, предложенную в работах [12], [13] (см. также [14]). Такое вложение позволило бы получить необходимые и достаточные условия устойчивости в различных нормах.

Напомним о некоторых положениях общей теории устойчивости. Любая линейная двуслойная разностная схема записывается в канонической форме

$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-00555) и программы “Университеты России”.

где $y_n = y(t_n) \in H$ — функция дискретного аргумента $t_n = n\tau$ со значениями в конечномерном линейном пространстве H, A и B — линейные операторы, действующие в H.

Схема (4) называется устойчивой в пространстве H_D, если существует самосопряженный положительный оператор D такой, что для решения уравнения (4) при любых начальных данных выполняются неравенства

$$(Dy_{n+1}, y_{n+1}) \leqslant (Dy_n, y_n), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

Таким образом, в рамках общей теории требуется построить положительно определенную функцию (Dy, y) и выяснить, при каких ограничениях на шаг τ квадратичная форма (Dy, y) является невозрастающей функцией времени на решении задачи (4). Как известно, в теории дифференциальных уравнений такие функции называются функциями Ляпунова.

Заметим, что условие устойчивости разностной схемы зависит от выбора функции (Dy, y). Поэтому возникает проблема построения такой функции Ляпунова, для которой условие устойчивости налагает минимальные ограничения на шаги сетки. Для самосопряженного оператора A эти задачи были решены в цитированных выше работах А.А. Самарского. Для несамосопряженного оператора A такие задачи в общем случае не решены до сих пор, исследованы лишь отдельные частные случаи. Один из таких случаев, когда несамосопряженность разностных задач возникает в связи с нелокальными краевыми условиями, представлен в данной работе.

2. Разностные схемы для уравнения теплопроводности с нелокальными граничными условиями. В области $G = (0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T)$ введем сетку $\omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$, где $\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots, N,\ hN = 1\}$, $\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0, 1, \ldots, K,\ \tau K = T\}$ и обозначим

$$y_i^n = y(x_i, t_n), \quad y_{\overline{x},i}^n = \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h}, \quad y_{x,i}^n = \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h}, \quad y_{\overline{x}x,i}^n = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2},$$
$$y_{t,i}^n = \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau}, \quad v_i^{(\sigma)} = \sigma v_i^{n+1} + (1-\sigma) v_i^n.$$

Дифференциальное уравнение (1) аппроксимируем разностной схемой

$$y_{t,i}^n = y_{\overline{x}x,i}^{(\sigma)}, \quad y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad y_0^{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

где σ — произвольный пока вещественный параметр. Построим разностную аппроксимацию нелокальных граничных условий. Будем исходить из эквивалентности условий (2) нелокальному условию в интегральной форме $\int\limits_0^1 u(x,t)dx = 0$. Заменяя интеграл квадратурной формулой трапеций, потребуем, чтобы решение разностной задачи (6) удовлетворяло условию

$$I_n = \sum_{i=1}^{N-1} h y_i^n + 0{,}5h(y_0^n + y_N^n) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{7}$$

Просуммируем уравнение (6) по i от 1 до $N-1$. Тогда получим

$$\left(\sum_{i=1}^{N-1} h y_i^n\right)_t = \left(\sum_{i=1}^{N-1} h y_{\overline{x}x,i}\right)^{(\sigma)} = (y_{\overline{x},N} - y_{x,0})^{(\sigma)}.$$

После очевидных преобразований приходим к тождеству

$$\left(\sum_{i=1}^{N-1} h y_i^n + 0{,}5h(y_0^n + y_N^n)\right)_t - (0{,}5h(y_0^n + y_N^n))_t = (y_{\overline{x},N} - y_{x,0})^{(\sigma)}$$

или $(I_{n+1} - I_n)/\tau = (0{,}5h(y_0^n + y_N^n))_t + (y_{\overline{x},N} - y_{x,0})^{(\sigma)}$. Отсюда и из (7), учитывая условие $y_0^n = 0$, получаем нелокальное разностное граничное условие в потоковой форме

$$0{,}5h y_{t,N}^n + (y_{\overline{x},N} - y_{x,0})^{(\sigma)} = 0. \tag{8}$$

Заметим, что при $\sigma \neq 0{,}5$ условие (8) имеет погрешность аппроксимации $\nu = O(h^2 + \tau)$ на решении уравнения (1). Если же $\sigma = 0{,}5$, то $\nu = O(h^2 + \tau^2)$. Итак, приходим к разностной схеме

$$
\begin{gathered}
y_{t,i}^n - y_{\overline{x}x,i}^{(\sigma)} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad y_0^{n+1} = 0, \\
y_{t,N}^n + \frac{2}{h}(y_{\overline{x},N} - y_{x,0})^{(\sigma)} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad y_i^0 = u_0(x_i).
\end{gathered} \tag{9}
$$

Приведем разностную схему (9) к каноническому виду (4). Для этого введем линейное пространство H, состоящее из вещественных векторов $v = (v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_N)^T$, $v_i = v(x_i)$, $x_i = ih$, со скалярным произведением

$$
(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} h y_i v_i + 0{,}5 h y_N v_N \tag{10}
$$

и нормой $\|y\| = \sqrt{(y,y)}$. Определим оператор $A : H \to H$ правилом

$$
(Ay)_i = -y_{\overline{x}x,i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad (Ay)_N = \frac{2}{h}(y_{\overline{x},N} - y_{x,0}), \quad y_0 = 0. \tag{11}
$$

Тогда разностная схема (9) запишется в каноническом виде (4), где $B = E + \sigma\tau A$, E — единичный оператор.

Необходимое условие устойчивости схемы (9) вытекает из требования принадлежности спектра оператора перехода единичному кругу и формулируется в виде ограничения

$$
\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}. \tag{12}
$$

Далее приведен пример, показывающий, что при любом выборе оператора нормы D достаточное условие устойчивости не может совпасть с необходимым условием (12).

3. Явная разностная схема с жордановой клеткой второго порядка. Пусть линейное пространство H состоит из вещественных векторов $v = (v_1 \ v_2)^T$. Скалярное произведение и норма в H определены как $(y, v) = y_1 v_1 + r y_2 v_2$, $\|y\| = \sqrt{(y,y)}$, $r > 0$. Рассмотрим явную разностную схему

$$
\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A y_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{13}
$$

где $y_n = (y_1^{(n)} \ y_2^{(n)})^T$ и оператор A задан матрицей

$$
A = \begin{bmatrix} \lambda & p \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad p \neq 0. \tag{14}
$$

Любой самосопряженный в H оператор представляется матрицей

$$
D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ r^{-1} d_{12} & d_{22} \end{bmatrix}.
$$

Отсюда следует критерий положительности

$$
d_{11} > 0, \quad r d_{11} d_{22} - d_{12}^2 > 0 \tag{15}
$$

и критерий неотрицательности

$$
d_{11} \geqslant 0, \quad r d_{11} d_{22} - d_{12}^2 \geqslant 0 \tag{16}
$$

самосопряженного оператора D. Заметим, что в неравенствах (15) и (16) условия $d_{11} > 0$ и $d_{11} \geqslant 0$ можно заменить соответственно условиями $d_{22} > 0$ и $d_{22} \geqslant 0$.

В дальнейшем, не ограничивая общности, считаем, что $d_{11} = 1$ и выбираем оператор нормы в виде

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ r^{-1}\alpha & \beta \end{bmatrix}, \tag{17}$$

где α, $\beta > 0$ — пока произвольные параметры и $r\beta - \alpha^2 = \Delta > 0$.

Из определения устойчивости (5) следует, что явная схема (13), (14) с $\lambda > 0$ устойчива в пространстве H_D, определяемом оператором (17), тогда и только тогда, когда шаг τ удовлетворяет неравенствам

$$0 < \tau \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(2 - \frac{|p|}{\lambda\sqrt{\Delta}}\right), \quad \text{где} \quad \Delta = r\beta - \alpha^2 > 0. \tag{18}$$

Правая часть неравенства (18) является возрастающей функцией Δ, поэтому условие устойчивости налагает минимальное ограничение на шаг τ при выборе $\alpha = 0$. Итак, оптимальным является диагональный оператор нормы

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}. \tag{19}$$

При этом необходимым и достаточным условием устойчивости в H_D является выполнение неравенства

$$0 < \tau \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(2 - \frac{|p|}{\lambda\sqrt{r\beta}}\right), \tag{20}$$

где $r > 0$ — константа, входящая в определение скалярного произведения.

Важно отметить, что при любом выборе нормы условие (20) накладывает более сильное ограничение на шаг τ, чем необходимое условие устойчивости $0 < \tau\lambda \leqslant 2$. Условие (20) переходит в необходимое условие устойчивости в пределе при $\beta \to \infty$.

Неравенство $\beta > p^2/(4\lambda^2 r)$, вытекающее из (20), следует рассматривать как ограничение на параметр β, входящий в матрицу (19).

4. Критерий устойчивости. Возвращаясь к разностной схеме (9), введем сеточное пространство H и скалярное произведение в нем так же, как и в разделе 2, и определим оператор A согласно (11).

Свойства оператора A хорошо известны [10]. Сформулируем их в удобном для дальнейшего виде. Предположим сначала, что N нечетно, и обозначим $m = (N-1)/2$. Введем матрицу

$$X = [X^{(0)}\, X_1\, X_2\, \ldots\, X_m], \tag{21}$$

столбцами которой являются определенным образом упорядоченные и нормированные собственные и присоединенные векторы матрицы A. Здесь X_k — матрица, имеющая два столбца,

$$X_k = [X^{(2k-1)}\; X^{(2k)}], \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

$X^{(2k)}$ — собственная и $X^{(2k-1)}$ — присоединенная функции оператора A, отвечающие собственному значению λ_k. Известен явный вид собственных и присоединенных функций

$$\begin{gathered} \lambda_0 = 0, \quad X^{(0)}(x_i) = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \\ \lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2 \pi k h, \quad X^{(2k)}(x_i) = \sin 2\pi k x_i, \\ X^{(2k-1)}(x_i) = x_i \cos 2\pi k x_i, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \end{gathered} \tag{22}$$

В работе [10] показано, что система собственных и присоединенных функций образует базис в сеточном пространстве H. Следовательно, матрица (21) имеет обратную.

Далее, введем блочно диагональную матрицу

$$J = \mathrm{diag}[J_0,\ J_1,\ \cdots,\ J_m], \tag{23}$$

где

$$J_0 = 0, \quad J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 0 \\ p_k & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

числа λ_k определены согласно (22) и

$$p_k = -2\sqrt{\lambda_k}\cos \pi k h = -\frac{2}{h}\sin 2\pi k h, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{24}$$

Справедливо равенство

$$AX = XJ, \tag{25}$$

означающее подобие матрицы A блочно диагональной матрице J.

В случае четного N выполнены равенства (22) и (24) с $m = N/2-1$, кроме того, добавляется собственное значение $\lambda_{N/2} = 4/h^2$ кратности 1, которое является максимальным. Соответственно матрицы (21) и (23) принимают вид

$$X = [X^{(0)}\, X_1\, \ldots\, X_m\, X^{(N/2)}], \quad J = \mathrm{diag}[J_0,\ J_1,\ \ldots,\ J_m,\ J_{N/2}], \tag{26}$$

где $J_{N/2} = \lambda_{N/2}$ и $X^{(N/2)}$ — собственная функция оператора A, отвечающая собственному значению $\lambda_{N/2}$, а именно $X^{(N/2)}(x_i) = (-1)^i x_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Остается в силе матричное равенство (25). В дальнейшем под X понимается матрица (21), если N нечетное, и матрица (26), если N четное. Точно так же матрица J определяется согласно (23) или (26).

Пусть задан какой-либо самосопряженный положительный в H оператор D, определяющий энергетическую норму $\|y\|_D = \sqrt{(Dy, y)}$. Обозначим через X оператор, представленный матрицей X, и через X^* — оператор, сопряженный оператору X в смысле скалярного произведения (10).

Теорема 1. *Для устойчивости разностной схемы* (9) *в пространстве* H_D *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось операторное неравенство*

$$\widetilde{D}J + J^*\widetilde{D} + (2\sigma - 1)\tau J^*\widetilde{D}J \geqslant 0, \tag{27}$$

где $\widetilde{D} = X^*DX$.

Доказательство. Из определения (5) устойчивости в H_D следует критерий устойчивости в виде операторного неравенства $D \geqslant S^*DS$, где $S = E - \tau B^{-1}A$ — оператор перехода и $B = E + \sigma\tau A$. Отсюда после элементарных преобразований получаем неравенство

$$DB^{-1}A + A^*B^{-1*}D \geqslant \tau A^*B^{-1*}DB^{-1}A.$$

Далее, учитывая перестановочность A и B, приходим к неравенству

$$DAB^{-1} + B^{-1*}A^*D \geqslant \tau B^{-1*}A^*DAB^{-1}.$$

Умножая полученное неравенство слева на B^* и справа на B, получаем эквивалентное неравенство

$$B^*DA + A^*DB \geqslant \tau A^*DA.$$

Подставляя $B = E + \sigma\tau A$ в последнее неравенство, после очевидных преобразований получим

$$DA + A^*D + (2\sigma - 1)\tau A^*DA \geqslant 0.$$

Воспользуемся тождеством $A = XJX^{-1}$, следующим из (25). Тогда получим неравенство

$$DXJX^{-1} + X^{-1*}J^*X^*D + (2\sigma - 1)\tau X^{-1*}J^*X^*DXJX^{-1} \geqslant 0,$$

эквивалентное неравенству $(X^*DX)J + J^*(X^*DX) + (2\sigma - 1)\tau J^*(X^*DX)J \geqslant 0$, совпадающему с (27). $\square$

В дальнейшем, в соответствии с жордановой структурой матрицы A, при формулировке теорем об устойчивости различаются случаи четного и нечетного числа точек N. Для нечетного N полагаем $m = (N-1)/2$, вводим функцию $r_k = 1$ для $k = 1, 2, \dots, m-1$, $r_m = 0{,}5$ и задаем положительные параметры β_k, $k = 1, 2, \dots, m$. Вспомогательный оператор нормы определяется как блочно-диагональная матрица

$$\widetilde{D} = \mathrm{diag}[\widetilde{D}_0, \widetilde{D}_1, \dots, \widetilde{D}_m], \tag{28}$$

где $\widetilde{D}_0 = 1$, $\widetilde{D}_k = \mathrm{diag}[1, \beta_k]$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Теорема 2. *Пусть N — нечетное число, $m = (N-1)/2$, числа λ_k, p_k и матрицы X, $\widetilde{D}$ определены формулами (22), (24) и (21), (28) соответственно. Зададим оператор $D = X^{*-1}\widetilde{D}X^{-1}$. Если параметры β_k удовлетворяют условиям*

$$\sqrt{r_k\beta_k} > \frac{|p_k|}{2\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \tag{29}$$

то для устойчивости схемы (9) в пространстве H_D необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\lambda_k}\left(1 - \frac{|p_k|}{2\lambda_k\sqrt{r_k\beta_k}}\right), \quad k = 1, 2, \dots, m. \tag{30}$$

Доказательство. В случае диагональной матрицы $\widetilde{D}$ операторное неравенство (27) распадается на неравенства $P_0 = 2\lambda_0 + (2\sigma - 1)\tau\lambda_0^2 \geqslant 0$ и

$$P_k = \widetilde{D}_k J_k + J_k^*\widetilde{D}_k + (2\sigma - 1)\tau J_k^*\widetilde{D}_k J_k \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \tag{31}$$

где

$$\widetilde{D}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta_k \end{pmatrix}, \quad J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \\ p_k & \lambda_k \end{pmatrix}$$

— матрицы второго порядка. Неравенство $P_0 \geqslant 0$ всегда выполнено, т. к. $\lambda_0 = 0$. Применение критерия неотрицательности (16) к матрицам P_k приводит к условиям (30). $\square$

Замечание. Пусть выполнены условия (29). Тогда из (30) следует, что схема (9) с $\sigma \geqslant 0{,}5$ устойчива при любых шагах τ и h. Если же $\sigma < 0{,}5$, то условие устойчивости (30) можно переписать в виде ограничений

$$\tau \leqslant \tau_0(k) = \frac{1}{(0{,}5 - \sigma)\lambda_k}\left(1 - \frac{|p_k|}{2\lambda_k\sqrt{r_k\beta_k}}\right), \quad k = 1,\, 2,\, \dots,\, m.$$

Отсюда видно, что требование (29) обеспечивает положительность шага τ.

В случае четного N полагаем $m = N/2 - 1$ и оператор $\widetilde{D}$ определяем как

$$\widetilde{D} = \mathrm{diag}[\widetilde{D}_0, \widetilde{D}_1, \dots, \widetilde{D}_m, \widetilde{D}_{N/2}], \quad \widetilde{D}_0 = \widetilde{D}_{N/2} = 1. \tag{32}$$

Поскольку последняя жорданова клетка оператора A имеет порядок 1, нет необходимости вводить функцию r_k.

Теорема 3. *Пусть N — четное число, $m = N/2 - 1$, числа λ_k, p_k и матрицы X, $\widetilde{D}$ определены формулами (22), (24) и (26), (32) соответственно. Зададим оператор $D = X^{*-1}\widetilde{D}X^{-1}$. Если параметры β_k удовлетворяют условиям*

$$\sqrt{\beta_k} > \frac{|p_k|}{2\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

то для устойчивости схемы (9) в пространстве H_D необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\lambda_k}\left(1 - \frac{|p_k|}{2\lambda_k\sqrt{\beta_k}}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad \sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\lambda_{N/2}}. \tag{33}$$

Доказательство. Отличие от доказательства теоремы 2 состоит только в том, что к матричным неравенствам (31) добавляется числовое неравенство $P_m = 2\lambda_m + (2\sigma - 1)\tau\lambda_m^2 \geqslant 0$, которое приводит к дополнительному ограничению $\sigma \geqslant 0{,}5 - 1/(\tau\lambda_{N/2})$. $\square$

5. Постоянные параметры. Рассмотрим подробнее случай постоянных параметров β_k. Полагаем, что при нечетных N параметры задаются условиями $r_k\beta_k = \beta > 0$ для $k = 1, 2, \ldots, m = (N-1)/2$, т. е. $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{m-1} = \beta$, $\beta_m = 2\beta$, а при четных N — условиями $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_m = \beta$, $m = N/2 - 1$. В случае постоянных параметров β_k условия устойчивости (30) и (33) можно переписать в виде ограничений

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\lambda_k}\left(1 - \frac{|p_k|}{2\sqrt{\beta}\lambda_k}\right). \tag{34}$$

Здесь $k = 1, 2, \ldots, m = (N-1)/2$ для нечетного N и $k = 1, 2, \ldots, m = N/2 - 1$ для четного N. Кроме того, при четном N добавляется условие, не зависящее от β:

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\lambda_{N/2}}. \tag{35}$$

Подставляя в (34) выражения для λ_k и p_k и учитывая, что $\frac{|p_k|}{\lambda_k} = h \operatorname{ctg} \pi k h$, $h = \frac{1}{N}$, запишем условия устойчивости при нечетном N в виде

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{h^2 f(x_k)}{2\tau}, \tag{36}$$

где $x_k = \pi k/N$, $k = 1, 2, \ldots, m = (N-1)/2$ и

$$f(x) = \frac{1}{2\sin^2 x}\left(1 - \frac{h \operatorname{ctg} x}{2\sqrt{\beta}}\right), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{37}$$

Точно так же из (34) и (35) при четном N получаем условия (36), где $k = 1, 2, \ldots, m + 1 = N/2$.

В следующих леммах выясняется при каком условии на параметр β функция $f(x)$ достигает минимума на правой границе, т. е. при $x = x_{(N-1)/2} = 0{,}5(1-h)\pi$ для нечетного N и при $x = x_{N/2} = 0{,}5\pi$ для четного N.

Лемма 1. *Если параметр β удовлетворяет условию*

$$\sqrt{\beta} \geqslant \frac{h(2 - \cos \pi h)}{2 \sin \pi h}, \tag{38}$$

то функция $f(x)$, определенная согласно (37), имеет точку минимума $x_{(1)} \in [x_m, \pi/2)$, где $x_m = 0{,}5\pi(1-h)$.

Доказательство. Стандартный анализ приводит к утверждению о том, что на интервале $(0, \pi/2)$ функция $f(x)$ имеет только две экстремальные точки, а именно точку максимума $x_{(0)} = 0{,}5(\arcsin 2\eta + \arcsin\eta)$ и точку минимума $x_{(1)} = 0{,}5[\pi - (\arcsin 2\eta - \arcsin\eta)]$, где $\eta = \alpha/\sqrt{4+\alpha^2}$, $\alpha = h/\sqrt{\beta}$. Неравенство $x_{(1)} < \pi/2$ очевидно и выполнено. Неравенство $x_m < x_{(1)}$ приводит к условию

$$g(\eta) = \arcsin 2\eta - \arcsin\eta < \pi h. \tag{39}$$

Функция $g(\eta)$ возрастает на сегменте $[0, \pi/2]$, поэтому неравенство (39) выполнено для всех $\eta \in [0, \eta_0)$, где η_0 — корень уравнения

$$\arcsin 2\eta - \arcsin\eta = \pi h. \tag{40}$$

Единственным корнем уравнения (40) является число $\eta_0 = (\sin\pi h)/\sqrt{5 - 4\cos\pi h}$. Следовательно, если $\eta < \eta_0$, то выполнено требуемое неравенство $x_m < x_{(1)}$. Поскольку $\eta = \eta(\alpha) = \alpha/\sqrt{4+\alpha^2}$ — возрастающая функция α, неравенство $\eta \leqslant \eta_0$ эквивалентно неравенству $\alpha \leqslant \alpha_0$, где $\alpha_0 = \frac{2\eta_0}{\sqrt{1-\eta_0^2}} = \frac{2\sin\pi h}{2-\cos\pi h}$ — корень уравнения $\alpha_0/\sqrt{4+\alpha_0^2} = \eta_0$. Неравенство $\alpha \leqslant \alpha_0$ совпадает с (38). $\square$

Замечание. При малых h и конечных β имеем

$$\eta \approx \frac{h}{2\sqrt{\beta}}, \quad x_{(0)} \approx \frac{3h}{4\sqrt{\beta}}, \quad x_{(1)} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{h}{4\sqrt{\beta}}.$$

Отсюда видно, что точки экстремума функции $f(x)$ расположены вблизи границы области ее определения.

Лемма 2. *Если выполнено условие*

$$\sqrt{\beta} > \frac{h}{\sin 2\pi h}, \tag{41}$$

то $f(x_k) > 0$ для всех k и

$$\min_{1\leqslant k\leqslant m} f(x_k) = f(x_m) = \frac{1}{2\cos^2\frac{\pi h}{2}}\left(1 - \frac{h}{2\sqrt{\beta}}\operatorname{tg}\frac{\pi h}{2}\right)$$

при нечетном N и $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant m+1} f(x_k) = f(x_{N/2}) = 0{,}5$ *при четном N.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай нечетного N и $m = (N-1)/2$. Заметим, что из условия (41) следует неравенство (38), поэтому справедлива лемма 1, согласно которой точка минимума $x_{(1)}$ функции $f(x)$ расположена правее точки $x_m = 0{,}5\pi(1-h)$. Поскольку функция $f(x)$ не имеет локальных минимумов на интервале (x_1, x_m), ее минимум достигается на одной из границ $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant m} f(x_k) = \min\{f(x_1), f(x_m)\}$. Покажем, что при условии (41) справедливо неравенство $f(x_m) < f(x_1)$ и, следовательно, минимум $f(x_k)$ достигается на правой границе. Учитывая выражение для $f(x)$, запишем условие $f(x_m) < f(x_1)$ в виде $\sin^2 x_1(2 - \alpha\operatorname{ctg} x_m) < \sin^2 x_m(2 - \alpha\operatorname{ctg} x_1)$, $\alpha = h/\sqrt{\beta}$, и сгруппируем слагаемые при α. Тогда получим неравенство

$$\alpha(\cos x_1 \sin^3 x_m - \cos x_m \sin^3 x_1) < 2\sin x_1 \sin x_m(\sin^2 x_m - \sin^2 x_1). \tag{42}$$

Преобразуем сомножители, входящие в (42), следующим образом:

$$\sin^2 x_m - \sin^2 x_1 = \sin(x_m + x_1)\sin(x_m - x_1),$$

$$\cos x_1 \sin^3 x_m - \cos x_m \sin^3 x_1 = \frac{\sin(x_m - x_1)}{2}[\sin^2(x_1 + x_m) + \sin^2 x_1 + \sin^2 x_m].$$

Поделив обе части неравенства (42) на положительное число $\sin(x_m - x_1)$, приходим к неравенству

$$\alpha[\sin^2(x_1 + x_m) + \sin^2 x_1 + \sin^2 x_m] < 4 \sin x_1 \sin x_m \sin(x_1 + x_m), \quad \alpha = h/\sqrt{\beta}.$$

Следовательно, функция $f(x)$ обращается в минимум на правой границе $x = x_m$, если параметр β удовлетворяет условию

$$\sqrt{\beta} > \frac{h(\sin^2(x_1 + x_m) + \sin^2 x_1 + \sin^2 x_m)}{4 \sin x_1 \sin x_m \sin(x_1 + x_m)}. \tag{43}$$

Подставляя в (43) $x_1 = \pi h$ и $x_m = 0{,}5\pi(1 - h)$, получаем неравенство

$$\sqrt{\beta} > \frac{h\left(2\cos^2 \frac{\pi h}{2} + \sin^2 \pi h\right)}{4 \sin \pi h \cos^2 \frac{\pi h}{2}},$$

которое легко преобразуется к виду (38). Итак, если параметр β удовлетворяет условию (41), то при нечетном N имеем $\min\limits_{x_1 \leqslant x \leqslant x_m} f(x) = f(x_m)$. Заметим, что при условии (41) $f(x_m) > 0$. Действительно,

$$f(x_m) > \frac{1}{2\cos^2 \frac{\pi h}{2}} \left(1 - \frac{\sin 2\pi h \sin \frac{\pi h}{2}}{2 \cos \frac{\pi h}{2}}\right) = \frac{1 - \cos \pi h + \cos^2 \pi h}{2 \cos^2 \frac{\pi h}{2}} \geqslant \frac{3}{8 \cos^2 \frac{\pi h}{2}} > 0.$$

В случае четного N и $m = N/2 - 1$ имеем $x_m = 0{,}5\pi - \pi h < 0{,}5\pi(1 - h)$, поэтому справедливо неравенство $x_m < x_{(1)}$. Покажем, что требование

$$f(x_m) = f(0{,}5\pi - \pi h) < f(x_1) = f(\pi h)$$

эквивалентно условию (41). Как и прежде, неравенство $f(x_m) < f(x_1)$ преобразуется к виду (43). Подставляя в (43) значения $x_1 = \pi h$ и $x_m = 0{,}5\pi - \pi h$, приходим к неравенству (41). Для завершения доказательства леммы 2 необходимо убедиться в том, что $f(x_m) > f(x_{N/2}) = 0{,}5$. Действительно,

$$f(x_m) = f(0{,}5\pi - \pi h) = \frac{1}{2 \cos^2 \pi h} \left(1 - \frac{h \operatorname{tg} \pi h}{2\sqrt{\beta}}\right),$$

и, учитывая требование (41), получим

$$\frac{1}{\cos^2 \pi h} \left(1 - \frac{h \operatorname{tg} \pi h}{2\sqrt{\beta}}\right) > \frac{1}{\cos^2 \pi h} \left(1 - \frac{h \operatorname{tg} \pi h \sin 2\pi h}{2h}\right) = 1.$$

Положительность функции $f(x_k)$ следует из положительности ее минимального значения. $\square$

Критерий устойчивости разностной схемы (9) в случае постоянных параметров β_k сформулирован в теореме 4. В соответствии с (28) и (32), в этой теореме в качестве оператора $\widetilde{D}$ берется матрица $\widetilde{D} = \operatorname{diag}[1,\ 1,\ \beta,\ 1,\ \beta,\ \ldots,\ 1,\ 2\beta]$ в случае нечетного N и матрица $\widetilde{D} = \operatorname{diag}[1,\ 1,\ \beta,\ 1,\ \beta,\ \ldots,\ 1,\ \beta,\ 1]$ в случае четного N. Матрица X определена согласно (21) для нечетного N и согласно (26) — для четного N.

Теорема 4. *Пусть параметр β удовлетворяет ограничению* (41) *и $D = X^{*-1}\widetilde{D}X^{-1}$. Для устойчивости разностной схемы* (9) *в H_D необходимо и достаточно выполнения неравенства*

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau \widetilde{\lambda}_N},$$

где $\widetilde{\lambda}_N = 4/h^2$, если N — четное число, и

$$\widetilde{\lambda}_N = \frac{4}{h^2} \frac{\cos^2 \frac{\pi h}{2}}{1 - \frac{h}{\sqrt{\beta}} \operatorname{tg} \frac{\pi h}{2}},$$

если N нечетное.

Доказательство следует из теорем 2, 3 и леммы 2.

6. Краевые условия второго типа. В [15] приведен пример, в определенном смысле имитирующий задачу с переменными коэффициентами, но допускающий построение точного решения в аналитическом виде. Показано, что спектр рассматриваемого разностного оператора является простым, и только в случае постоянных коэффициентов возникают кратные собственные значения. Следствием простоты спектра является базисность системы собственных векторов разностной задачи.

Пример состоит в следующем. Рассмотрим то же самое уравнение теплопроводности (1), а граничные условия (2) заменим условиями

$$u(0,t)=0, \quad \gamma\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,t), \tag{44}$$

где $\gamma\in(0,1)$ — числовой параметр. Значение $\gamma=0$ приводит к хорошо известным локальным условиям и здесь не рассматривается. Случай $\gamma=1$ является особым и рассмотрен выше. При $0<\gamma<1$ дифференциальная задача

$$u''(x)+\lambda u(x)=0, \quad 0<x<1, \quad u(0)=0, \quad \gamma u'(0)=u'(1) \tag{45}$$

имеет собственные значения $\lambda_k^{(1)}=(2\pi k-\psi)^2$, $\lambda_k^{(2)}=(2\pi k+\psi)^2$, и отвечающие им собственные функции $u_k^{(1)}(x)=\sin(2\pi k-\psi)x$, $u_k^{(2)}(x)=\sin(2\pi k+\psi)x$, где $k=0,1,\ldots$ и $\psi=\arccos\gamma$. Каждому собственному значению отвечает с точностью до множителя только одна собственная функция. Присоединенных функций задача (45) с $0<\gamma<1$ не имеет.

Аналогичная ситуация имеет место и в разностном случае. Для задачи (1), (44) рассмотрим схему с весами

$$\begin{gathered} y_{t,i}^n-y_{\overline{x}x,i}^{(\sigma)}=0, \quad i=1,2,\ldots,N-1, \quad y_0^{n+1}=0, \\ y_{t,N}^n+\frac{2}{h}(y_{\overline{x},N}-\gamma y_{x,0})^{(\sigma)}=0, \quad n=0,1,\ldots, \quad y_i^0=u_0(x_i). \end{gathered} \tag{46}$$

Схема (46) имеет канонический вид (4), где $B=E+\sigma\tau A$ и оператор A определяется правилом

$$(Ay)_i=-y_{\overline{x}x,i}, \quad i=1,2,\ldots,N-1, \quad (Ay)_N=\frac{2}{h}(y_{\overline{x},N}-\gamma y_{x,0}), \quad y_0=0. \tag{47}$$

Рассмотрим задачу на собственные значения для разностного оператора (47)

$$y_{\overline{x}x,i}+\lambda y_i=0, \quad i=1,2,\ldots,N-1, \quad -\frac{2}{h}(\gamma y_{x,0}-y_{\overline{x},N})=\lambda y_N, y_0=0. \tag{48}$$

Нетрудно показать, что задача (48) имеет собственные значения

$$\lambda=\lambda_k^{(1,2)}=\frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\mp\frac{\psi}{2N}\right) \tag{49}$$

и отвечающие им собственные функции

$$\mu_k^{(1)}(x_j)=\sin\left(\frac{2\pi k-\psi}{N}j\right), \quad \mu_k^{(2)}(x_j)=\sin\left(\frac{2\pi k+\psi}{N}j\right). \tag{50}$$

В случае $0<\gamma<1$ имеем $0<\psi<\pi$ и все собственные значения (49), кроме собственных значений с индексом $k=0$, различны. Следовательно, множество собственных функций составляет базис в пространстве H сеточных функций, определенном в п. 2. При нечетном N собственные значения определены формулами (49) для $k=0,1,\ldots,(N-1)/2$, им отвечают собственные функции (50). При четном N имеем $k=0,1,\ldots,N/2-1$, кроме того, при $k=N/2$ имеется собственная пара $\lambda_{N/2}=\frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\psi}{2N}$, $\mu_{N/2}(x_j)=(-1)^j\sin\left(\frac{\psi j}{2N}\right)$.

В дальнейшем считаем, что собственные значения задачи (48) расположены в порядке возрастания: $0<\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_{N-1}$; обозначим через $\mu_k(x)$ собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_k. Пусть μ — матрица порядка N, столбцами которой являются указанные собственные векторы. При $0 < \gamma < 1$ спектр оператора A является простым, следовательно, система его собственных векторов образует базис и матрица μ невырожденная. Будем рассматривать матрицу μ как линейный оператор, действующий из H в H. Обозначим через μ^* оператор, сопряженный μ в смысле скалярного произведения (10). Согласно (48) справедливо матричное равенство $A\mu = \mu\Lambda$, где $\Lambda = \mathrm{diag}[\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}]$.

Теорема 5. *Для устойчивости разностной схемы* (46) *в пространстве* H_D *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось операторное неравенство*

$$\widetilde{D}\Lambda + \Lambda\widetilde{D} + (2\sigma - 1)\tau\Lambda\widetilde{D}\Lambda \geqslant 0, \tag{51}$$

где $\widetilde{D} = \mu^* D\mu$.

Эта теорема доказывается так же, как и теорема 1, если заменить X на μ и J на Λ.

Рассмотрим частный случай теоремы 5, когда оператор $\widetilde{D}$ задается как диагональная матрица

$$\widetilde{D} = \mathrm{diag}[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N], \tag{52}$$

где β_k — положительные параметры, $k = 1, 2, \ldots, N$. Обозначим через λ_N максимальное собственное значение оператора A:

$$\lambda_N = \frac{4}{h^2}\cos^2\left(\frac{\pi - \psi}{2N}\right), \text{ если } N \text{ нечетное}, \quad \lambda_N = \frac{4}{h^2}\cos^2\left(\frac{\psi}{2N}\right), \text{ если } N \text{ четное}.$$

Теорема 6. *Пусть оператор* $\widetilde{D}$ *определен согласно* (52) *и* $D = \mu^{*-1}\widetilde{D}\mu^{-1}$. *Для устойчивости разностной схемы* (46) *в пространстве* H_D *необходимо и достаточно выполнения неравенства*

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\lambda_N}. \tag{53}$$

Доказательство. В случае диагональных матриц $\widetilde{D}$ и Λ операторное неравенство (51) эквивалентно системе числовых неравенств $2\beta_k\lambda_k + (2\sigma - 1)\tau\beta_k\lambda_k^2 \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, N$, которая сводится к одному неравенству (53). □

Литература

1. Бицадзе А.В., Самарский А.А. *О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач* // ДАН СССР. – 1969. – Т. 185. – № 4. – С. 739–740.
2. Ильин В.А. *Необходимые и достаточные условия базисности подсистемы собственных и присоединенных функций пучка М.В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов* // ДАН СССР. – 1976. – Т. 227. – № 4. – С. 796–799.
3. Ильин В.А. *Об абсолютной и равномерной сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного эллиптического оператора* // ДАН СССР. – 1984. – Т. 274. – № 1. – С. 19–22.
4. Ильин В.А., Моисеев Е.И. *Нелокальная краевая задача для оператора Штурма–Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках* // ДАН СССР. – 1986. – Т. 291. – № 3. – С. 534–539.
5. Самарская Т.А. *Абсолютная и равномерная сходимость разложения по корневым функциям нелокальной краевой задачи* I *рода* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 7. – С. 1155–1160.
6. Макаров В.Л. *Разностные схемы для квазилинейных уравнений параболического типа с нелокальными краевыми условиями в классе обобщенных решений* // В сб. “Численные методы и приложения’84”, София, 1985. – С. 82–90.

7. Гордезиани Д.Г. *О методах решения одного класса нелокальных краевых задач* // Ротопринт ИПМ им. ак. Векуа, ТГУ, 1981. – 28 с.
8. Сапаговас М.П., Чегис Р.Ю. *О некоторых краевых задачах с нелокальным условием* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 7. – С. 1268–1274.
9. Sun Zhi-Zhong. *A high order difference scheme for a nonlocal boundary value problem for the heat equation* // Computational methods in applied mathematics. – 2001. – V. 1. – № 1. – P. 1–15.
10. Ионкин Н.И. *Разностные схемы для одной неклассической задачи* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. вычисл. матем. и кибернет. – 1977. – № 2. – С. 20–32.
11. Ионкин Н.И., Морозова В.А. *Устойчивость разностных схем с нелокальными граничными условиями* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. вычисл. матем. и кибернет. – 2000. – № 3. – С. 19–23.
12. Самарский А.А. *О регуляризации разностных схем* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1967. – Т. 7. – № 1. – С. 62–93.
13. Самарский А.А. *Классы устойчивых разностных схем* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1967. – Т. 7. – №5. – С. 1096–1133.
14. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* – М.: Наука, 1989. – 616 с.
15. Гулин А.В., Морозова В.А. *Об устойчивости нелокальной разностной краевой задачи* // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39. – № 7. – С. 912–917.

Московский государственный
университет

Поступила
17.09.2004