ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 4 (527)

УДК 517.937

П.В. ВИНОГРАДОВА, А.Г. ЗАРУБИН

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДА РОТЭ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ БЮРГЕРСА В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Метод Ротэ [1] для параболических уравнений в цилиндрических областях достаточно хорошо изучен и имеется обширная библиография. В данной работе предлагается схема Ротэ решения начально-краевой задачи для системы квазилинейных уравнений Бюргерса в нецилиндрической области. В [2] исследовался метод явных асимметрических разностных аппроксимаций решения начально-краевой задачи для системы Бюргерса в цилиндре. Разрешимость начально-краевой задачи в пространствах Гёльдера в нецилиндрической области изучалась в [3]. В данной статье получены оценки скорости сходимости приближенных решений, построенных по методу Ротэ, к точному решению.

1. Постановка задачи

В R^3 рассмотрим область, ограниченную поверхностью $x^2+y^2=\Phi^2(t)$ и плоскостями $t=0$, $t=T$, где $\Phi(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция такая, что $\Phi(t)\geq r>0$ для всех $0\leq t\leq T$, $T<\infty$. Данную область и ее замыкание обозначим через D и $\overline{D}$.

В области D исследуем начально-краевую задачу для системы уравнений Бюргерса [2]

$$\frac{\partial u}{\partial t}-R\triangle u+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=f_1(x,y,t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}-R\triangle v+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=f_2(x,y,t), \tag{2}$$

$$u(x,y,t)=0,\quad v(x,y,t)=0\quad \text{при}\quad x^2+y^2=\Phi^2(t),\quad 0\leq t\leq T, \tag{3}$$

$$u(x,y,0)=0,\quad v(x,y,0)=0\quad \text{при}\quad x^2+y^2\leq\Phi^2(0), \tag{4}$$

где R — положительная постоянная.

Для задачи (1)–(4) рассмотрим метод Ротэ.

На отрезке $0\leq t\leq T$ введем равномерную сетку $\overline{\omega}=\{t_s=sh,\ s=0,1,\dots,N,\ hN=T\}$ с шагом h. Обозначим $\Phi_s=\Phi(t_s)/\Phi(t_{s+1})$, а через $\overline{D}^s$ — множество точек (x,y,t_s), удовлетворяющих неравенству $x^2+y^2\leq\Phi^2(t_s)$.

Векторы $\omega(\omega^0(x,y),\omega^1(x,y),\dots,\omega^N(x,y))$, $\theta(\theta^0(x,y),\theta^1(x,y),\dots,\theta^N(x,y))$ назовем приближенным решением задачи (1)–(4), построенным по методу Ротэ, если компоненты $\omega^s(x,y)$, $\theta^s(x,y)$ $(s=0,1,\dots,N)$ являются решением краевой задачи

$$h^{-1}\Big[\omega^{s+1}(x,y)-\omega^s(x\Phi_s,y\Phi_s)-\Big(x\frac{\partial\omega^{s+1}(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial\omega^{s+1}(x,y)}{\partial y}\Big)\frac{h\Phi'(t_{s+1})}{\Phi(t_{s+1})}\Big]-R\triangle\omega^{s+1}(x,y)+$$
$$+\omega^s(x\Phi_s,y\Phi_s)\frac{\partial\omega^{s+1}(x,y)}{\partial x}+\theta^s(x\Phi_s,y\Phi_s)\frac{\partial\omega^{s+1}(x,y)}{\partial y}=f_1(x,y,t_{s+1}),\quad (x,y)\in D^{s+1}, \tag{5}$$
$$h^{-1}\Big[\theta^{s+1}(x,y)-\theta^s(x\Phi_s,y\Phi_s)-\Big(x\frac{\partial\theta^{s+1}(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial\theta^{s+1}(x,y)}{\partial y}\Big)\frac{h\Phi'(t_{s+1})}{\Phi(t_{s+1})}\Big]-R\triangle\theta^{s+1}(x,y)+$$

$$+\omega^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\frac{\partial\theta^{s+1}(x,y)}{\partial x} + \theta^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\frac{\partial\theta^{s+1}(x,y)}{\partial y} = f_2(x,y,t_{s+1}), \quad (x,y)\in D^{s+1}, \tag{6}$$

$$\omega^{s+1}(x,y) = 0, \quad \theta^{s+1}(x,y) = 0 \quad \text{при} \quad x^2+y^2 = \Phi^2(t_{s+1}), \quad s = 0,1,\dots,N-1, \tag{7}$$

$$\omega^0(x,y) = 0, \quad \theta^0(x,y) = 0 \quad \text{при} \quad (x,y)\in \overline{D}^0.$$

Нетрудно видеть, что если $\Phi(t) = \mathrm{const}$, то получим классический метод Ротэ решения начально-краевой задачи для системы уравнений Бюргерса в цилиндре.

2. Аппроксимация и сходимость

В данном параграфе введем понятие аппроксимации по методу Ротэ и получим оценку быстроты сходимости приближенных решений в узлах сетки.

Пусть $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ — решения задачи (1)–(4) из пространства Гёльдера $H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{D})\times H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{D})$.

Аппроксимацией задачи (1)–(4) по методу Ротэ на сечении D^{s+1} назовем величины

$$\varphi_{s+1} = \frac{u(x,y,t_{s+1}) - u(x\Phi_s, y\Phi_s, t_s)}{h} - \frac{\Phi'(t_{s+1})}{\Phi(t_{s+1})}\left(x\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial x} + y\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial y}\right) -$$

$$-R\Delta u(x,y,t_{s+1}) + u(x\Phi_s, y\Phi_s, t_s)\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial x} + v(x\Phi_s, y\Phi_s, t_s)\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial y} - f_1(x,y,t_{s+1}),$$

$$\psi_{s+1} = \frac{v(x,y,t_{s+1}) - v(x\Phi_s, y\Phi_s, t_s)}{h} - \frac{\Phi'(t_{s+1})}{\Phi(t_{s+1})}\left(x\frac{\partial v(x,y,t_{s+1})}{\partial x} + y\frac{\partial v(x,y,t_{s+1})}{\partial y}\right) -$$

$$-R\Delta v(x,y,t_{s+1}) + u(x\Phi_s, y\Phi_s, t_s)\frac{\partial v(x,y,t_{s+1})}{\partial x} +$$

$$+v(x\Phi_s, y\Phi_s, t_s)\frac{\partial v(x,y,t_{s+1})}{\partial y} - f_2(x,y,t_{s+1}),$$

где функции $f_1(x,y,t)$, $f_2(x,y,t)$ принадлежат пространству Гёльдера $H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$.

Теорема 2.1. *Пусть функции $f_1(x,y,t)$, $f_2(x,y,t)$ принадлежат пространству Гёльдера $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$; $f_1(x,y,0) = 0$, $f_2(x,y,0) = 0$, $\frac{\partial f_1}{\partial t}\big|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial t}\big|_{t=0} = 0$ при $x^2+y^2 = \Phi^2(0)$. Тогда для величин φ_{s+1}, ψ_{s+1} справедливо неравенство*

$$|\varphi_{s+1}| + |\psi_{s+1}| \le Kh, \quad s = 0,1,\dots,N-1,$$

где K — положительная постоянная, не зависящая от h и s.

Доказательство. В работе [3] при предположениях, что функции $f_i(x,y,t)$ $(i=1,2)$ принадлежат пространству $H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$ и $f_i(x,y,0) = 0$ при $x^2+y^2 = \Phi^2(0)$, установлены теоремы существования и единственности решения задачи (1)–(4) из пространства Гёльдера $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})\times H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$. По аналогии с [3] с использованием условий данной теоремы и теоремы о повышении гладкости ([4], с. 364) можно показать, что решение задачи (1)–(4) принадлежит пространству Гёльдера $H^{4+\alpha,2+\alpha/2}(\overline{D})\times H^{4+\alpha,2+\alpha/2}(\overline{D})$.

Рассмотрим функцию $u(\xi,\eta,t)$, где $(\xi,\eta,t)\in\overline{D}$. Пусть (a,b,τ) — точка, принадлежащая области D. Запишем формулу Тейлора для функции $u(\xi,\eta,t)$ в точке (a,b,τ), ограничиваясь вторым дифференциалом $d^2\overline{u}$ при $d\xi = \xi - a$, $d\eta = \eta - b$, $dt = t-\tau$ ($\overline{u}$ — значение функции u в промежуточной точке). Получим

$$u(\xi,\eta,t) = u(a,b,\tau) + \frac{\partial u(a,b,\tau)}{\partial\xi}(\xi - a) + \frac{\partial u(a,b,\tau)}{\partial\eta}(\eta - b) + \frac{\partial u(a,b,\tau)}{\partial t}(t-\tau) + \frac{1}{2}d^2\overline{u}.$$

Положим в этой формуле

$$a = x, \quad b = y, \quad \tau = t_{s+1}, \quad \xi = \Phi_s x, \quad \eta = \Phi_s y, \quad t = t_s.$$

Тогда

$$u(\Phi_s x, \Phi_s y, t_s) - u(x, y, t_{s+1}) - (\Phi_s - 1)x\frac{\partial u(x, y, t_{s+1})}{\partial \xi} - \left(\frac{\Phi(t_s)}{\Phi(t_{s+1})} - 1\right)y\frac{\partial u(x, y, t_{s+1})}{\partial \eta} =$$
$$= \frac{\partial u(x, y, t_{s+1})}{\partial t}(t_s - t_{s+1}) + \frac{1}{2}d^2\overline{u}.$$

Так как

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta},$$

то

$$u(\Phi_s x, \Phi_s y, t_s) - u(x, y, t_{s+1}) - (1 - \Phi_s)x\frac{\partial u(x, y, t_{s+1})}{\partial x} - (1 - \Phi_s)y\frac{\partial u(x, y, t_{s+1})}{\partial y} =$$
$$= -\frac{\partial u(x, y, t_{s+1})}{\partial t}h + \frac{1}{2}d^2\overline{u}.$$

Функция $\Phi(t)$ дважды непрерывно дифференцируема, поэтому согласно формуле Тейлора последнее соотношение можно записать в виде

$$u(\Phi_s x, \Phi_s y, t_s) - u(x, y, t_{s+1}) + h\frac{\Phi'(t_{s+1})}{\Phi(t_{s+1})}\left(\frac{\partial u(x, y, t_{s+1})}{\partial x}x + \frac{\partial u(x, y, t_{s+1})}{\partial y}y\right) -$$
$$- \frac{1}{2\Phi(t_s)}\left(\frac{\partial u(x, y, t_{s+1})}{\partial x}x + \frac{\partial u(x, y, t_{s+1})}{\partial y}y\right)\frac{\partial^2\Phi(\nu_s)}{\partial t^2}h^2 = -\frac{\partial u(x, y, t_{s+1})}{\partial t}h + \frac{1}{2}d^2\overline{u}. \quad (8)$$

В силу (8) аппроксимация φ_{s+1} примет вид

$$\varphi_{s+1} = \frac{\partial u(x, y, t_{s+1})}{\partial t} - \frac{1}{2h}d^2\overline{u} - \frac{1}{2\Phi(t_s)}\left(\frac{\partial u(x, y, t_{s+1})}{\partial x}x + \frac{\partial u(x, y, t_{s+1})}{\partial y}y\right)\frac{\partial^2\Phi(\nu_s)}{\partial t^2}h -$$
$$- R\Delta u(x, y, t_{s+1}) + u(x\Phi_s, y\Phi_s, t_s)\frac{\partial u(x, y, t_{s+1})}{\partial x} + v(x\Phi_s, y\Phi_s, t_s)\frac{\partial u(x, y, t_{s+1})}{\partial y} - f_1(x, y, t_{s+1}).$$

Так как $u(x, y, t)$ — решение задачи (1)–(4), то в круге $x^2 + y^2 < \Phi^2(t_{s+1})$ получаем

$$\varphi_{s+1} = -\frac{1}{2h}d^2\overline{u} + \big(u(x\Phi_s, y\Phi_s, t_s) - u(x, y, t_{s+1})\big)\frac{\partial u(x, y, t_{s+1})}{\partial x} +$$
$$+ \big(v(x\Phi_s, y\Phi_s, t_s) - v(x, y, t_{s+1})\big)\frac{\partial u(x, y, t_{s+1})}{\partial y} - \frac{1}{2\Phi(t_s)}\left(\frac{\partial u(x, y, t_{s+1})}{\partial x}x + \frac{\partial u(x, y, t_{s+1})}{\partial y}y\right)\frac{\partial^2\Phi(\nu_s)}{\partial t^2}h.$$

Функции $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ принадлежат пространству $H^{4+\alpha, 2+\alpha/2}(\overline{D})$, а функция $\Phi(t)$ — пространству $C^2[0, T]$, поэтому из последнего равенства вытекает оценка

$$|\varphi_{s+1}| \leq M_1 h.$$

Аналогично можно получить оценку

$$|\psi_{s+1}| \leq M_2 h. \quad \square$$

Лемма 2.1. *Пусть функции $f_1(x, y, t)$, $f_2(x, y, t)$ принадлежат пространству Гёльдера $H^{\alpha, \alpha/2}(\overline{D})$, тогда задача (5)–(7) имеет решение $\omega^{s+1}(x, y)$, $\theta^{s+1}(x, y)$ из пространства $H^{2+\alpha}(\overline{D}^{s+1})$, и оно единственно. Верна оценка*

$$\max_{\overline{D}^{s+1}} |\omega^{s+1}(x, y)| + \max_{\overline{D}^{s+1}} |\theta^{s+1}(x, y)| \leq T(\|f_1(x, y, t)\|_{C(\overline{D})} + \|f_2(x, y, t)\|_{C(\overline{D})}). \quad (9)$$

Доказательство. Так как функции $f_i(x,y,t)$ $(i=1,2)$ принадлежат пространству $H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$, то для $\omega^1(x,y)$, $\theta^1(x,y)$, $(x,y)\in\overline{D}^1$ имеем линейную краевую задачу для эллиптических уравнений. Известно ([5], с. 133), что решения этих задач существуют и принадлежат пространству $H^{2+\alpha}(\overline{D}^1)$, причем эти решения единственны. Рассуждая аналогичным образом, устанавливаем разрешимость задачи (5)–(7) в пространстве Гёльдера $H^{2+\alpha}(\overline{D}^{s+1})$ $(s=0,1,\ldots,N-1)$. Из известных оценок на модуль решения первой краевой задачи для линейных эллиптических уравнений (напр., [5]) следует оценка

$$\max_{\overline{D}^{s+1}}|\omega^{s+1}(x,y)|\le h\max_{\overline{D}^{s+1}}|f_1(x,y,t_{s+1})|+\max_{\overline{D}^{s+1}}|\omega^s(x\Phi_s,y\Phi_s)|. \tag{10}$$

Положив в (10) $s=0$, получим

$$\max_{\overline{D}^1}|\omega^1(x,y)|\le h\max_{\overline{D}^1}|f_1(x,y,t_1)|\le h\|f_1(x,y,t)\|_{C(\overline{D})}\le Nh\|f_1(x,y,t)\|_{C(\overline{D})}=T\|f_1(x,y,t)\|_{C(\overline{D})}.$$

Если $s=1$, то

$$\max_{\overline{D}^2}|\omega^2(x,y)|\le h\max_{\overline{D}^2}|f_1(x,y,t_2)|+\max_{\overline{D}^2}|\omega^1(x\Phi_1,y\Phi_1)|\le$$
$$\le 2h\|f_1(x,y,t)\|_{C(\overline{D})}\le T\|f_1(x,y,t)\|_{C(\overline{D})}.$$

Продолжая данный процесс, для любого $s=0,1,\ldots,N-1$ получим оценку

$$\max_{\overline{D}^{s+1}}|\omega^{s+1}(x,y)|\le T\|f_1(x,y,t)\|_{C(\overline{D})}.$$

Аналогично выводится оценка

$$\max_{\overline{D}^{s+1}}|\theta^{s+1}(x,y)|\le T\|f_2(x,y,t)\|_{C(\overline{D})}. \quad \square$$

Теорема 2.2. *Пусть функции $f_1(x,y,t)$, $f_2(x,y,t)$ принадлежат пространству Гёльдера $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$; $f_1(x,y,0)=0$, $f_2(x,y,0)=0$, $\frac{\partial f_1}{\partial t}|_{t=0}=0$, $\frac{\partial f_2}{\partial t}|_{t=0}=0$ при $x^2+y^2=\Phi^2(0)$. Тогда существует такое положительное число h_0, что для всех $0<h<h_0$ верна оценка*

$$\|\nabla(\omega^{s+1}(x,y)-u(x,y,t_{s+1}))\|^2_{L_2(D^{s+1})}+\|\nabla(\theta^{s+1}(x,y)-v(x,y,t_{s+1}))\|^2_{L_2(D^{s+1})}\le M_3h^2, \tag{11}$$

где постоянная M_3 не зависит от h и s.

Доказательство. Пусть $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ — решение задачи (1)–(4). Введем обозначения

$$\phi^{s+1}(x,y)=\omega^{s+1}(x,y)-u(x,y,t_{s+1}),$$
$$\chi^{s+1}(x,y)=\theta^{s+1}(x,y)-v(x,y,t_{s+1})$$

для всех точек $(x,y)\in\overline{D}^{s+1}$, $s=0,1,\ldots,N-1$. Тогда верны тождества

$$h^{-1}\left\{\phi^{s+1}(x,y)-\phi^s(\Phi_sx,\Phi_sy)-\frac{\Phi'(t_{s+1})}{\Phi(t_{s+1})}h\left(x\frac{\partial\phi^{s+1}(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial\phi^{s+1}(x,y)}{\partial y}\right)\right\}-$$
$$-R\Delta\phi^{s+1}(x,y)+\omega^s(x\Phi_s,y\Phi_s)\frac{\partial\omega^{s+1}(x,y)}{\partial x}-u(x,y,t_{s+1})\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial x}+$$
$$+\theta^s(x\Phi_s,y\Phi_s)\frac{\partial\omega^{s+1}(x,y)}{\partial y}-v(x,y,t_{s+1})\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial y}=F^{s+1}(x,y), \tag{12}$$

где $(x, y) \in D^{s+1}$,

$$F^{s+1}(x,y) = \frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial t} - h^{-1}\{u(x,y,t_{s+1}) - u(x\Phi_s, y\Phi_s, t_s)\} -$$
$$-\frac{\Phi'(t_{s+1})}{\Phi(t_{s+1})}\Big(x\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial x} + y\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial y}\Big),$$
$$\phi^{s+1}(x,y) = 0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 = \Phi^2(t_{s+1}). \tag{13}$$

Умножим тождество (12) на $(-2h\Delta\phi^{s+1}(x,y))$ и проинтегрируем по области D^{s+1}, тогда

$$\|\nabla\phi^{s+1}(x,y)\|^2_{L_2(D^{s+1})} - \|\nabla\phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\|^2_{L_2(D^{s+1})} + h^2\Big\|\frac{\nabla(\phi^{s+1}(x,y) - \phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s))}{h}\Big\|^2_{L_2(D^{s+1})} +$$
$$+ 2hR\|\Delta\phi^{s+1}(x,y)\|^2_{L_2(D^{s+1})} = 2h\int_{D^{s+1}}\bigg\{\Big(\omega^s(x\Phi_s, y\Phi_s) - \frac{\Phi'(t_{s+1})}{\Phi(t_{s+1})}x\Big)\frac{\partial\phi^{s+1}(x,y)}{\partial x} +$$
$$+ \phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial x} + (u(x\Phi_s, y\Phi_s, t_s) - u(x,y,t_{s+1}))\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial x} +$$
$$+ \Big(\theta^s(x\Phi_s, y\Phi_s) - \frac{\Phi'(t_{s+1})}{\Phi(t_{s+1})}y\Big)\frac{\partial\phi^{s+1}(x,y)}{\partial y} + \chi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial y} +$$
$$+ (v(x\Phi_s, y\Phi_s, t_s) - v(x,y,t_{s+1}))\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial y}\bigg\}\Delta\phi^{s+1}(x,y)dx\,dy -$$
$$- 2h\int_{D^{s+1}} F^{s+1}(x,y)\Delta\phi^{s+1}(x,y)dx\,dy. \tag{14}$$

Оценим каждое слагаемое правой части равенства (14).

Согласно неравенству (9) и условиям, налагаемым на функцию $\Phi(t)$, имеем

$$|J_1| = 2h\int_{D^{s+1}}\Big|\omega^s(x\Phi_s, y\Phi_s) - \frac{\Phi'(t_{s+1})}{\Phi(t_{s+1})}x\Big|\Big|\frac{\partial\phi^{s+1}(x,y)}{\partial x}\Big||\Delta\phi^{s+1}(x,y)|dx\,dy \le$$
$$\le 2M_4h\int_{D^{s+1}}\Big|\frac{\partial\phi^{s+1}(x,y)}{\partial x}\Big||\Delta\phi^{s+1}(x,y)|dx\,dy \le$$
$$\le M_4h\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{D^{s+1}}|\nabla\phi^{s+1}(x,y)|^2dx\,dy + \varepsilon\int_{D^{s+1}}|\Delta\phi^{s+1}(x,y)|^2dx\,dy\Big).$$

Так как функция $u(x,y,t)$ принадлежит пространству $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$, то

$$|J_2| = 2h\int_{D^{s+1}}|\phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)|\Big|\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial x}\Big||\Delta\phi^{s+1}(x,y)|dx\,dy \le$$
$$\le 2M_5h\int_{D^{s+1}}|\phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)|\,|\Delta\phi^{s+1}(x,y)|dx\,dy \le$$
$$\le M_5h\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{D^{s+1}}|\phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)|^2dx\,dy + \varepsilon\int_{D^{s+1}}|\Delta\phi^{s+1}(x,y)|^2dx\,dy\Big).$$

Оценивая первое слагаемое в правой части по неравенству Фридрихса, получим

$$|J_2| \le M_6h\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{D^{s+1}}|\nabla\phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)|^2dx\,dy + \varepsilon\int_{D^{s+1}}|\Delta\phi^{s+1}(x,y)|^2dx\,dy\Big),$$

$$|J_3| = 2h\int_{D^{s+1}}|u(x\Phi_s, \Phi_y, t_s) - u(x,y,t_{s+1})|\Big|\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial x}\Big||\Delta\phi^{s+1}(x,y)|dx\,dy \le$$
$$\le M_7h\int_{D^{s+1}}|u(x\Phi_s, y\Phi_s, t_s) - u(x,y,t_{s+1})|\,|\Delta\phi^{s+1}(x,y)|dx\,dy.$$

Из формулы Тейлора для разности $u(x\Phi_s, y\Phi_s, t_s) - u(x, y, t_{s+1})$ следует оценка

$$|u(x\Phi_s, y\Phi_s, t_s) - u(x, y, t_{s+1})| \le M_8 h,$$

где положительная постоянная M_8 не зависит от h и s. Тогда

$$|J_3| \le M_9 h^2 \int_{D^{s+1}} |\Delta\phi^{s+1}(x,y)| dx\, dy \le M_{10}\Big(\frac{h^3}{\varepsilon} + \varepsilon h \int_{D^{s+1}} |\triangle\phi^{s+1}(x,y)|^2 dx\, dy\Big).$$

Аналогично оцениваются следующие три слагаемые правой части уравнения (14)

$$|J_4| = 2h \int_{D^{s+1}} \Big|\theta^s(x\Phi_s, y\Phi_s) - \frac{\Phi'(t_{s+1})}{\Phi(t_{s+1})} y\Big| \Big|\frac{\partial\phi^{s+1}(x,y)}{\partial y}\Big| |\Delta\phi^{s+1}(x,y)| dx\, dy \le$$
$$\le M_{11} h \Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{D^{s+1}} |\nabla\phi^{s+1}(x,y)|^2 dxdy + \varepsilon \int_{D^{s+1}} |\Delta\phi^{s+1}(x,y)|^2 dx\, dy\Big),$$
$$|J_5| = 2h \int_{D^{s+1}} |\chi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)| \Big|\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial y}\Big| |\Delta\phi^{s+1}(x,y)| dx\, dy \le$$
$$\le M_{12} h \Big(\frac{M_{13}}{\varepsilon}\int_{D^{s+1}} |\nabla\chi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)|^2 dx\, dy + \varepsilon \int_{D^{s+1}} |\Delta\phi^{s+1}(x,y)|^2 dx\, dy\Big),$$
$$|J_6| = 2h \int_{D^{s+1}} |v(x\Phi_s, y\Phi_s, t_s) - v(x,y,t_{s+1})| \Big|\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial y}\Big| |\Delta\phi^{s+1}(x,y)| dx\, dy \le$$
$$\le M_{14}\Big(\frac{h^3}{\varepsilon} + \varepsilon h \int_{D^{s+1}} |\Delta\phi^{s+1}(x,y)|^2 dx\, dy\Big).$$

Согласно (8) имеем

$$|J_7| = 2h \int_{D^{s+1}} |F^{s+1}(x,y)|\, |\Delta\phi^{s+1}(x,y)| dxdy \le$$
$$\le 2h^2 M_{15} \int_{D^{s+1}} |\Delta\phi^{s+1}(x,y)| dx\, dy \le M_{16}\Big(\frac{h^3}{\varepsilon} + \varepsilon h \int_{D^{s+1}} |\Delta\phi^{s+1}(x,y)|^2 dx\, dy\Big).$$

С помощью оценок для $|J_1|, \ldots, |J_7|$ из (14) получим

$$\|\nabla\phi^{s+1}(x,y)\|^2_{L_2(D^{s+1})} - \|\nabla\phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\|^2_{L_2(D^{s+1})} +$$
$$+ h(2R - \varepsilon(M_4 + M_5 + M_6 + M_{10} + M_{11} + M_{12}M_{13} + M_{14} + M_{16}))\|\Delta\phi^{s+1}(x,y)\|^2_{L_2(D^{s+1})} \le$$
$$\le \frac{h}{\varepsilon}(M_4\|\nabla\phi^{s+1}(x,y)\|^2_{L_2(D^{s+1})} + M_6\|\nabla\phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\|^2_{L_2(D^{s+1})} +$$
$$+ M_{10}h^2 + M_{11}\|\nabla\phi^{s+1}(x,y)\|^2_{L_2(D^{s+1})} + M_{12}M_{13}\|\nabla\chi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\|^2_{L_2(D^{s+1})} + M_{14}h^2 + M_{16}h^2).$$

Выбирая ε так, чтобы коэффициент при $\|\triangle\phi^{s+1}(x,y)\|^2_{L_2(D^{s+1})}$ был положительным, имеем

$$\|\nabla\phi^{s+1}(x,y)\|^2_{L_2(D^{s+1})} - \|\nabla\phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\|^2_{L_2(D^{s+1})} \le$$
$$\le hM_{17}(\|\nabla\phi^{s+1}(x,y)\|^2_{L_2(D^{s+1})} + \|\nabla\phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\|^2_{L_2(D^{s+1})} + \|\nabla\chi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\|^2_{L_2(D^{s+1})} + h^2).$$

Отсюда

$$(1 - hM_{17})(\|\nabla\phi^{s+1}(x,y)\|^2_{L_2(D^{s+1})} - \|\nabla\phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\|^2_{L_2(D^{s+1})}) \le$$
$$\le hM_{18}(\|\nabla\phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\|^2_{L_2(D^{s+1})} + \|\nabla\chi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\|^2_{L_2(D^{s+1})}) + M_{17}h^3.$$

Если число $h_0 > 0$ такое, что $1 - h_0 M_{17} > 0$, то для всех $0 < h < h_0$ из предыдущего неравенства следует оценка

$$\|\nabla \phi^{s+1}(x,y)\|^2_{L_2(D^{s+1})} - \|\nabla \phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\|^2_{L_2(D^{s+1})} \le$$
$$\le \frac{hM_{18}}{1 - h_0 M_{17}}(\|\nabla \phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\|^2_{L_2(D^{s+1})} + \|\nabla \chi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\|^2_{L_2(D^{s+1})}) + \frac{M_{17}h^3}{1 - h_0 M_{17}}. \quad (15)$$

В интеграле

$$\int_{D^{s+1}} |\nabla \phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)|^2 dx\, dy$$

произведем замену переменных $x = \xi/\Phi_s$, $y = \eta/\Phi_s$. Получим

$$\int_{D^{s+1}} |\nabla \phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)|^2 dx\, dy = \int_{D^s} |\nabla \phi^s(\xi, \eta)|^2 d\xi\, d\eta.$$

Тогда, суммируя неравенство (15) по s от 0 до $k \le N-1$, имеем

$$\|\nabla \phi^{k+1}(x,y)\|^2_{L_2(D^{k+1})} \le M_{19} h\Bigg(\sum_{s=0}^{k} \|\nabla \phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\|^2_{L_2(D^{s+1})} +$$
$$+ \sum_{s=0}^{k} \|\nabla \chi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\|^2_{L_2(D^{s+1})}\Bigg) + M_{20}h^2,$$

где постоянные M_{19}, M_{20} не зависят от h и s.

Аналогично выводится оценка

$$\|\nabla \chi^{k+1}(x,y)\|^2_{L_2(D^{k+1})} \le M_{19} h\Bigg(\sum_{s=0}^{k} \|\nabla \chi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\|^2_{L_2(D^{s+1})} + \sum_{s=0}^{k} \|\nabla \phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\|^2_{L_2(D^{s+1})}\Bigg) + M_{20}h^2.$$

Из последних двух неравенств и из разностного аналога неравенства Гронуолла (напр., [6], с. 222) следует оценка (11). □

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Тогда верна оценка*

$$\max_{\overline{D}^{s+1}} |\omega^{s+1}(x,y) - u(x,y,t_{s+1})| + \max_{\overline{D}^{s+1}} |\theta^{s+1}(x,y) - v(x,y,t_{s+1})| \le \overline{M} h, \quad (16)$$

где постоянная $\overline{M}$ *не зависит от* s *и* h.

Доказательство. Запишем тождество (12) в виде

$$\phi^{s+1}(x,y) - Rh\triangle\phi^{s+1}(x,y) - \frac{\Phi'(t_{s+1})}{\Phi(t_{s+1})} h\left(x\frac{\partial \phi^{s+1}(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial \phi^{s+1}(x,y)}{\partial y}\right) +$$
$$+ h\left[\omega^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\frac{\partial \phi^{s+1}(x,y)}{\partial x} + \theta^s(x\Phi_s, y\Phi_s)\frac{\partial \phi^{s+1}(x,y)}{\partial y}\right] =$$
$$= hF^{s+1} + \phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s) + h[u(x,y,t_{s+1}) - \omega^s(x\Phi_s, y\Phi_s)]\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial x} +$$
$$+ h[v(x,y,t_{s+1}) - \theta^s(x\Phi_s, y\Phi_s)]\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial y}. \quad (17)$$

Функция $\phi^{s+1}(x,y)$ является решением краевой задачи (17), (13) и для нее известна оценка (напр., [5])

$$\max_{\overline{D}^{s+1}} |\phi^{s+1}(x,y)| \le h \max_{\overline{D}^{s+1}} |F^{s+1}| + \max_{\overline{D}^{s+1}} |\phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)| +$$
$$+ h \max_{\overline{D}^{s+1}} |u(x,y,t_{s+1}) - u(x\Phi_s, y\Phi_s, t_s)| \max_{\overline{D}^{s+1}} \left|\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial x}\right| +$$
$$+ h \max_{\overline{D}^{s+1}} |v(x,y,t_{s+1}) - v(x\Phi_s, y\Phi_s, t_s)| \max_{\overline{D}^{s+1}} \left|\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial y}\right| +$$
$$+ h \max_{\overline{D}^{s+1}} |\phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)| \max_{\overline{D}^{s+1}} \left|\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial x}\right| + h \max_{\overline{D}^{s+1}} |\chi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)| \max_{\overline{D}^{s+1}} \left|\frac{\partial u(x,y,t_{s+1})}{\partial y}\right|.$$

Используя известную оценку для $|F^{s+1}|$ и принадлежность решения $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ пространству $H^{4+\alpha,2+\alpha/2}(\overline{D})$, получим

$$\max_{\overline{D}^{s+1}} |\phi^{s+1}(x,y)| \le M_{21}h^2 + M_{22}h\{\max_{\overline{D}^{s+1}} |\phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)| +$$
$$+ \max_{\overline{D}^{s+1}} |\chi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)|\} + \max_{\overline{D}^{s+1}} |\phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)|.$$

Аналогично выводится оценка

$$\max_{\overline{D}^{s+1}} |\chi^{s+1}(x,y)| \le M_{21}h^2 + M_{22}h\{\max_{\overline{D}^{s+1}} |\phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)| +$$
$$+ \max_{\overline{D}^{s+1}} |\chi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)|\} + \max_{\overline{D}^{s+1}} |\chi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)|.$$

Таким образом,

$$\max_{\overline{D}^{s+1}} |\phi^{s+1}(x,y)| + \max_{\overline{D}^{s+1}} |\chi^{s+1}(x,y)| \le$$
$$\le M_{23}\{h^2 + (1+h)(\max_{\overline{D}^{s+1}} |\phi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)| + \max_{\overline{D}^{s+1}} |\chi^s(x\Phi_s, y\Phi_s)|)\}.$$

Так как $\phi^0(x,y) \equiv 0$, $\chi^0(x,y) \equiv 0$, то из последнего соотношения вытекает оценка (16). $\square$

Литература

1. Rothe E. *Warmeleitungsgleichung mit nichtconstanten Koeffizienten* // Math. Ann. – 1931.– № 104. – S. 340–362.
2. Саульев И.К. *Применение явных асимметричных разностных аппроксимаций для решения уравнения Бюргерса* // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 12. – С. 2190–2195.
3. Виноградова П.В. *О разрешимости двумерных уравнений Бюргерса в пространстве Гёльдера в нецилиндрической области* // Изд-во Ярославск. ун-та. Матем. заметки. – 2002. – Т. 9. – Вып. 2. – С. 20–31.
4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* – М.: Наука, 1967. – 736 с.
5. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* – М.: Наука, 1964. – 540 с.
6. Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы.* – М.: Наука, 1989. – 432 с.

Хабаровский государственный технический университет

Хабаровский государственный педагогический университет

Поступила
29.06.2004