ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 1 (512)

УДК 519.635:539.319

*А.В. МУЗАЛЕВСКИЙ, С.И. РЕПИН*

# ОБ ОЦЕНКАХ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

## 1. Введение

Многие реальные проблемы, возникающие в приложениях, приводят к сложным системам, которые могут включать дифференциальные, интегральные и алгебраические уравнения. Проблема контроля точности приближенных решений таких систем весьма сложна, поскольку каждая из входящих в систему переменных заключает в себе некоторую погрешность и тем самым индуцирует дополнительные ошибки в определении всех остальных переменных задачи. В данной статье рассмотрена одна из типичных задач такого класса, которая возникает при совместном анализе термических и силовых полей, образующихся в упругих телах при нагревании. Здесь температурные напряжения, определяющие дополнительные деформации и напряжения определяются из решения задачи теплопроводности, присоединенной к уравнениям теории упругости.

Контроль точности приближенных решений является одной из важнейших задач вычислительной математики. Эту задачу можно решать как с помощью априорного, так и апостериорного подхода. Априорные оценки, как правило, требуют дополнительной регулярности точного решения и имеют асимптотический характер, т. е. показывают скорость убывания погрешности при уменьшении характерного параметра сетки. Апостериорные оценки возникли несколько позднее априорных в связи с необходимостью индикации распределения погрешности приближенного решения, построенного на конкретной сетке. Апостериорные индикаторы погрешности широко используются в современных вычислительных программах основанных на принципе последовательной адаптации сеток. Полное решение задачи апостериорного контроля требует не только получения индикатора распределения погрешности, но и построения гарантированной верхней границы ошибки аппроксимации в естественной (энергетической) норме.

Апостериорные оценки ошибки для приближенных решений, полученных методом конечных элементов, рассматривались многими авторами. Первым был предложен так называемый метод "невязок" (см., напр., [1]–[3]), который в дальнейшем получил широкое распространение. С математической точки зрения этот метод сводится к вычислению нормы невязки соответствующего дифференциального уравнения в пространстве распределений. Этот метод пригоден только для галёркинских аппроксимаций. Позднее для индикации распределения ошибок конечноэлементных решений был предложен метод осреднения градиента (см., напр., [4], [5]). Этот метод также применим только для галёркинских аппроксимаций и требует повышенной регулярности точного решения задачи.

Мажоранты энергетической нормы отклонения от точного решения, которые пригодны для любых функций из энергетического класса, были получены в [6]–[8]. Эти мажоранты получены из общих методов функционального анализа и теории двойственности для вариационного исчисления, поэтому их можно называть апостериорными оценками функционального типа. Для задач линейной теории упругости они ранее изучались в работах [9], [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки Российской Федерации (код проекта № Е02-1.0-55).

В данной работе этот подход используется для получения мажоранты функционального типа для задач линейной теории термоупругости и проверяется его эффективность на серии тестовых примеров.

## 2. Вариационные постановки

Пусть $\Omega$ — ограниченная связная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей $\partial\Omega$, причем $\partial\Omega$ состоит из двух непересекающихся частей $\partial_1\Omega$ и $\partial_2\Omega$. Классическая постановка краевой задачи теории термоупругости состоит в определении тензор-функции $\sigma$ и вектор-функции $u$, удовлетворяющих следующей системе уравнений:

$$\operatorname{div}\sigma + f + f_T = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$\sigma = \mathbb{L}\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2}$$

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T), \tag{3}$$

$$u = u_0 \quad \text{на} \quad \partial_1\Omega, \tag{4}$$

$$\sigma\nu = F + F_T \quad \text{на} \quad \partial_2\Omega, \tag{5}$$

где $F$, $u_0$ — заданные функции, определяющие краевые условия задачи упругости, $\varepsilon(u)$ обозначает тензор малых деформаций, $f$ — заданная функция, определяющая объемные силы, $\nu$ — внешняя нормаль к границе области, $\mathbb{L} = \{\mathbb{L}_{ijkl}\}$ — тензор упругих модулей, который должен удовлетворять условию

$$c_1|\varkappa|^2 \leq \mathbb{L}\varkappa : \varkappa \leq c_2|\varkappa|^2 \quad \forall\varkappa \in \mathbb{M}_s^{n\times n}$$

и условиям симметричности

$$\mathbb{L}_{ijkl} = \mathbb{L}_{jikl} = \mathbb{L}_{klij} \quad \forall i,j,k,l = 1,\dots,n,$$

а $f_T$, $F_T$ — функции, связанные с тензором температурных деформаций

$$\varepsilon_T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} (T - T_0)$$

соотношениями (см., напр., [10], с. 458) $f_T = -\operatorname{div}(\mathbb{L}\varepsilon_T)$, $F_T = \mathbb{L}\varepsilon_T$. Здесь $\alpha_{11}$, $\alpha_{22}$, $\alpha_{33}$ — коэффициенты температурного расширения по соответствующим координатным осям, $T_0$ — отсчетная температура (т. е. температура, при которой отсутствуют температурные напряжения), а скалярная функция $T$ является решением задачи теплопроводности

$$-\Delta T = q \tag{6}$$

с граничными условиями

$$T = \theta_0 \;\text{ на }\; \partial_3\Omega, \quad \frac{\partial T}{\partial\nu} = Q \;\text{ на }\; \partial_4\Omega. \tag{7}$$

Здесь $q$ — функция, определяющая тепловые источники в области $\Omega$, $\partial_3\Omega$ и $\partial_4\Omega$ — две непересекающиеся части границы $\partial\Omega$, которые, вообще говоря, могут не совпадать с $\partial_1\Omega$ и $\partial_2\Omega$, $\theta_0$, $Q$ — заданные функции, определяющие соответственно заданную температуру на границе $\partial_3\Omega$ и тепловой поток через $\partial_4\Omega$.

Нетрудно видеть, что погрешности аппроксимации, возникающие в задаче (6), (7) вносят дополнительные погрешности в численное решение основной задачи (1)–(5). Для того чтобы учесть суммарный эффект такого наложения ошибок, мы используем подход, отличный от того, что обычно используется для галёркинских аппроксимаций (см., напр., [1]–[3]). Наш подход основан на использовании апостериорных оценок функционального типа (см. [8], [11]).

Введем следующие обозначения:

$$V_0 = \{u \in W_2^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid u = 0 \text{ на } \partial_1\Omega\},$$
$$U_0 = \{u \in W_2^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ на } \partial_3\Omega\},$$
$$|||\varepsilon(u)|||^2 = \int_\Omega \mathbb{L}\varepsilon(u) : \varepsilon(u)dx, \quad (\varepsilon, \tau) = \int_\Omega \varepsilon : \tau\, dx,$$
$$V_0 + u_0 = \{u \in W_2^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid u = u_0 \text{ на } \partial_1\Omega\},$$
$$Y^* = L_2(\Omega, \mathbb{M}_s^{n\times n}).$$

Данная задача может быть сформулирована в виде двух вариационных проблем, которые будем называть задачами $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$.

*Задача* $\mathcal{P}$. Найти элемент $u \in V_0 + u_0$ такой, что

$$J(u) = \inf_{v \in V_0 + u_0} J(v),$$

где

$$J(v) = \frac{1}{2}|||\varepsilon(v)|||^2 - \int_\Omega (f + f_T)\cdot v\, dx - \int_{\partial_2\Omega}(F + F_T)\cdot v\, d\Gamma.$$

*Задача* $\mathcal{Q}$. Найти элемент $T \in U_0 + \theta_0$ такой, что

$$I(T) = \inf_{\theta \in U_0 + \theta_0} I(\theta),$$

где

$$I(\theta) = \frac{1}{2}\|\nabla\theta\|^2 - \int_\Omega q\theta\, dx - \int_{\partial_4\Omega} Q\theta\, d\Gamma.$$

Пусть $v \in V_0 + u_0$ и $\theta \in U_0 + \theta_0$ являются приближенными решениями задачи термоупругости. Нашей задачей является получение апостериорной оценки для $u - v$.

Методика получения апостериорных оценок в энергетических нормах для широкого класса эллиптических краевых задач предложена в [8], [11]. Для задач линейной упругости эти оценки изучались в [9], где было продемонстрировано их эффективное использование в практических вычислениях.

Если положить $F_T \equiv 0$ и $f_T \equiv 0$, то оценка для получившейся задачи теории упругости может быть записана в следующем виде:

$$\frac{1}{2}|||\varepsilon(v-u)|||^2 \leq \mathcal{M}_\oplus^{(1)}(v,\beta,\tau) = \frac{1+\beta}{2}(\varepsilon(v) - \mathbb{L}^{-1}\tau, \mathbb{L}\varepsilon(v) - \tau) + \\ + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)C_{1\Omega}^2(\|\operatorname{div}\tau + f\|_\Omega^2 + \|F - \tau\nu\|_{\partial_2\Omega}^2). \quad (8)$$

Здесь $\tau \in Y^*$ и $\beta > 0$ — произвольные параметры, а $C_{1\Omega}$ — константа, определяемая неравенством

$$\|w\|_\Omega^2 + \|w\|_{\partial_2\Omega}^2 \leq C_{1\Omega}^2|||\varepsilon(w)|||^2 \quad \forall w \in V_0. \quad (9)$$

В свою очередь оценка для задачи теплопроводности выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{2}\|\nabla(\theta - T)\|_\Omega^2 \leq \mathcal{M}_\oplus^{(2)}(\theta,\beta,y) = \frac{1+\beta}{2}(\nabla\theta - y, \nabla\theta - y) + \\ + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)C_{2\Omega}^2\left(\|\operatorname{div} y + q\|_\Omega^2 + \|\frac{\partial y}{\partial\nu} - Q\|_{\partial_4\Omega}^2\right), \quad (10)$$

где $y \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ и $\beta > 0$ — произвольные параметры, а $C_{2\Omega}$ — константа, определяемая аналогичным (9) неравенством

$$\|w\|_\Omega^2 + \|w\|_{\partial_4\Omega}^2 \leq C_{2\Omega}^2\|\nabla w\|_\Omega^2 \quad \forall w \in U_0.$$

Заметим, что если $\partial_4\Omega = \emptyset$, то константа $C_{2\Omega}$ является константой в неравенстве Фридрихса. В этом случае ее можно оценить аналитически как

$$C_{2\Omega} \leq \frac{l}{\sqrt{2}\pi},$$

где $l$ — сторона квадрата, охватывающего область $\Omega$.

В [8] было показано, что, во-первых, последовательность этих оценок, полученная путем решения только конечномерных задач, будет сходиться к точной оценке с увеличением размерности соответствующих конечномерных пространств, и, во-вторых, выбором свободных переменных $\beta$ и $\tau$ (или соответственно $\beta$ и $y$) можно получить равенство оценки точной величине отклонения.

В следующем параграфе данные оценки используются для построения апостериорной оценки в термоупругой задаче.

## 3. Оценки отклонения от точного решения в энергетической норме

Применив оценку (8), приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}|||\varepsilon(v-u)|||^2 \leq \frac{1+\beta_1}{2}(\varepsilon(v) - \mathbb{L}^{-1}\tau, \mathbb{L}\varepsilon(v) - \tau) + \\ + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right) C_{1\Omega}^2 (\|\operatorname{div}\tau + f + f_T\|_\Omega^2 + \|F + F_T - \tau\nu\|_{\partial_2\Omega}^2), \quad (11)$$

которое справедливо для любых $\tau \in Y^*$ и $\beta_1 > 0$. Заметим, что в правую часть (11) входят неизвестные величины $f_T$, $F_T$, которые зависят от точного решения задачи теплопроводности. Слагаемые, включающие в себя неизвестные величины, можно оценить через неравенства

$$\|\operatorname{div}\tau + f + f_T\|_\Omega^2 \leq (1+\beta_2)\|\operatorname{div}\tau + f + f_\theta\|_\Omega^2 + \left(1 + \frac{1}{\beta_2}\right)\|f_T - f_\theta\|_\Omega^2,$$

$$\|F + F_T - \tau\nu\|_{\partial_2\Omega}^2 \leq (1+\beta_3)\|F + F_\theta - \tau\nu\|_{\partial_2\Omega}^2 + \left(1 + \frac{1}{\beta_3}\right)\|F_T - F_\theta\|_{\partial_2\Omega}^2,$$

верные для любых положительных $\beta_2$ и $\beta_3$.

Теперь необходимо оценить величины $\|f_T - f_\theta\|_\Omega^2$ и $\|F_T - F_\theta\|_{\partial_2\Omega}^2$, где

$$f_\theta = -\operatorname{div}\left(\mathbb{L}\begin{pmatrix}\alpha_{11} & 0 & 0\\ 0 & \alpha_{22} & 0\\ 0 & 0 & \alpha_{33}\end{pmatrix}(\theta - T_0)\right), \quad F_\theta = \mathbb{L}\begin{pmatrix}\alpha_{11} & 0 & 0\\ 0 & \alpha_{22} & 0\\ 0 & 0 & \alpha_{33}\end{pmatrix}(\theta - T_0).$$

Заметим, что ошибки в силовых добавках удобно будет оценить через $\|\nabla(\theta - T)\|_\Omega$, поскольку оценка этой ошибки уже известна как ошибка задачи теплопроводности (10). Рассмотрим неравенства

$$\|f_T - f_\theta\|_\Omega \leq C_{3\Omega}\|\nabla(\theta - T)\|_\Omega, \quad \|F_T - F_\theta\|_{\partial_2\Omega} \leq C_{4\Omega}\|\nabla(\theta - T)\|_\Omega.$$

Здесь $C_{3\Omega}$ — константа, зависящая от термоупругих свойств среды, которая может быть получена просто из выражения для $f_\theta$. Действительно, обозначив

$$\xi = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & 0 & 0\\ 0 & \alpha_{22} & 0\\ 0 & 0 & \alpha_{33}\end{pmatrix},$$

получим $f_\theta = -\operatorname{div}(\mathbb{L}\xi)(\theta - T_0) - (\mathbb{L}\xi)\nabla\theta$. Откуда

$$\|f_T - f_\theta\|_\Omega \leq \sup_\Omega|\operatorname{div}(\mathbb{L}\xi)|\,\|\theta - T\| + \sup_\Omega|\mathbb{L}\xi|\,\|\nabla(\theta - T)\| \;\text{ и }\; C_{3\Omega} = C_\Omega\sup_\Omega|\operatorname{div}(\mathbb{L}\xi)| + \sup_\Omega|\mathbb{L}\xi|,$$

где $C_\Omega$ — константа в неравенстве Фридрихса. Очевидно, в случае изотропной модели среды, константа $C_{3\Omega}$ не зависит от $\Omega$. С другой стороны,

$$C_{4\Omega} = \widehat{C}_{4\Omega} \sup_\Omega |\mathbb{L}\xi|,$$

где $\widehat{C}_{4\Omega}$ является нормой оператора следа на $\partial_2\Omega$,

$$\|\varphi\|_{\partial_2\Omega} \le \widehat{C}_{4\Omega} \|\nabla\varphi\|_\Omega \quad \forall\varphi \in W_1^2(\Omega).$$

Собирая все оценки вместе, получим неравенство

$$\frac{1}{2}|||\varepsilon(v-u)|||^2 \le \mathcal{M}_\oplus^{(3)}(v,\theta,\tau,y,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4) =$$
$$= \frac{1}{2}(1+\beta_1)(\varepsilon(v) - \mathbb{L}^{-1}\tau, \mathbb{L}\varepsilon(v) - \tau) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\beta_1}\right) C_{1\Omega}^2 \Bigg[(1+\beta_2)\|\operatorname{div}\tau + f + f_\theta\|_\Omega^2 + (1+\beta_3)\|F + F_\theta - \tau\nu\|_{\partial_2\Omega}^2 +$$
$$+ \left(C_{3\Omega}^2\left(1+\frac{1}{\beta_2}\right) + C_{4\Omega}^2\left(1+\frac{1}{\beta_3}\right)\right)\Bigg[(1+\beta_4)\|\nabla\theta - y\|^2 +$$
$$+ \left(1+\frac{1}{\beta_4}\right) C_{2\Omega}^2 \left(\|\operatorname{div} y + q\|_\Omega^2 + \left\|\frac{\partial y}{\partial\nu} - Q\right\|_{\partial_4\Omega}^2\right)\Bigg]\Bigg],$$

которое верно для любых $\tau \in Y^*$, $y \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ и любых положительных $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, $\beta_4$.

Если задача термоупругости ставится при $\partial\Omega_2 = \emptyset$, $\partial\Omega_4 = \emptyset$, то выражение для мажоранты упрощается, т. к. пропадают слагаемые, отвечающие за ошибки на границе. В этом случае соответствующая оценка имеет вид

$$\frac{1}{2}|||\varepsilon(v-u)|||^2 \le \mathcal{M}_\oplus^{(4)}(v,\theta,\tau,y,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \frac{1}{2}(1+\beta_1)(\varepsilon(v) - \mathbb{L}^{-1}\tau, \mathbb{L}\varepsilon(v) - \tau) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\beta_1}\right) C_{1\Omega}^2 \Bigg[(1+\beta_2)\|\operatorname{div}\tau + f + f_\theta\|_\Omega^2 +$$
$$+ C_{3\Omega}^2\left(1+\frac{1}{\beta_2}\right)\Bigg[(1+\beta_3)\|\nabla\theta - y\|^2 + \left(1+\frac{1}{\beta_3}\right) C_{2\Omega}^2(\|\operatorname{div} y + q\|_\Omega^2)\Bigg]\Bigg].$$

## 4. Оценки для изотропной модели

Для трехмерной изотропной модели линейной теории упругости тензор упругих постоянных $\mathbb{L}$ определяется двумя постоянными $K_0$ и $\mu$, которые называются соответственно модулями объемного сжатия и сдвига. В этом случае определяющие соотношения (2) имеют вид

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{9K_0}\operatorname{Sp}\sigma\mathbf{1} + \frac{1}{2\mu}\sigma^D$$

или

$$\varepsilon(u) = \frac{1-2\nu}{3E}\operatorname{Sp}\sigma\mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E}\sigma^D,$$

где $\mathbf{1}$ — единичный тензор, $\operatorname{Sp}\sigma := \mathbf{1} : \sigma$ — след тензора, $\sigma^D = \sigma - \frac{1}{3}\mathbf{1}\operatorname{Sp}\sigma$ — девиатор тензора $\sigma$, а $E$, $\nu$ — часто используемые в прикладных задачах параметры, определяющие упругие свойства среды (модуль Юнга и коэффициент Пуассона). Они связаны с $K_0$ и $\mu$ соотношениями

$$K_0 = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Для изотропного тела $\alpha_{ii} = \alpha$, $i = 1, 2, 3$,

$$f_T = -\frac{\alpha E}{1-2\nu}\nabla T, \quad F_T = \frac{\alpha E}{1-2\nu}(T - T_0).$$

Введем обозначение $\beta = \frac{\alpha E}{1-2\nu}$, тогда, принимая во внимание определяющие соотношения

$$\mathbb{L}\varepsilon = K_0 \operatorname{Sp}\varepsilon \mathbf{1} + 2\mu\varepsilon^D,$$

получим $C_{3\Omega} = \sup\limits_{\Omega} |\mathbb{L}\xi| = \beta$, $C_{4\Omega} = \widehat{C}_{4\Omega}\beta$. Оценку (11) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}|||\varepsilon(v-u)|||^2 \le \mathcal{M}_\oplus(v,\theta,\tau,y,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4) = \frac{1}{2}(1+\beta_1)(\varepsilon(v) - \mathbb{L}^{-1}\tau, \mathbb{L}\varepsilon(v) - \tau) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\beta_1}\right)C_{1\Omega}^2\left[(1+\beta_2)\|\operatorname{div}\tau + f - \beta\nabla\theta\|_\Omega^2 + (1+\beta_3)\|F + \beta(\theta - T_0) - \tau\nu\|_{\partial_2\Omega}^2 +\right.$$
$$\left.+\beta^2\left(\left(1+\frac{1}{\beta_2}\right) + \widehat{C}_{4\Omega}^2\left(1+\frac{1}{\beta_3}\right)\right)\left[(1+\beta_4)\|\nabla t - y\|^2 + \left(1+\frac{1}{\beta_4}\right)C_{2\Omega}^2\left(\|\operatorname{div} y + q\|_\Omega^2 + \left\|\frac{\partial y}{\partial \nu} - Q\right\|_{\partial_4\Omega}^2\right)\right]\right].$$

Здесь $\tau \in Y^*$ — произвольная тензор-функция, $y \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ — произвольная вектор-функция, $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, $\beta_4$ — положительные константы. Заметим, что эта оценка обращается в нуль только тогда, когда $v = u$ и $\theta = T$, т. е. для точного решения задачи теплопроводности. Также обратим внимание, что оценку легко разбить на слагаемые, каждое из которых отвечает за ошибки в разных уравнениях классической постановки, т. е. первое слагаемое отвечает за ошибку в определяющих соотношениях, второе и третье — за ошибки в силовых условиях, четвертое, пятое и шестое — за ошибки в задаче теплопроводности.

Для первой краевой задачи термоупругости, которая получается при $\partial\Omega_2 = \emptyset$ и $\partial\Omega_4 = \emptyset$, выражение для мажоранты упрощается. В этом случае

$$\frac{1}{2}|||\varepsilon(v-u)|||^2 \le \mathcal{M}_\oplus(v,\theta,\tau,y,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \frac{1}{2}(1+\beta_1)(\varepsilon(v) - \mathbb{L}^{-1}\tau, \mathbb{L}\varepsilon(v) - \tau) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\beta_1}\right)C_{1\Omega}^2\left[(1+\beta_2)\|\operatorname{div}\tau + f - \beta\nabla\theta\|_\Omega^2 +\right.$$
$$\left.+\beta^2\left(1+\frac{1}{\beta_2}\right)\left[(1+\beta_3)\|\nabla\theta - y\|^2 + \left(1+\frac{1}{\beta_3}\right)C_{2\Omega}^2(\|\operatorname{div} y + q\|_\Omega^2)\right]\right].$$

## 5. Численные эксперименты

Полученные выше оценки были использованы для анализа качества приближенных решений ряда задач термоупругости. Ниже мы приводим некоторые из полученных результатов, в которых расчеты производились для модели плоского напряженного состояния с постоянными $E = 4$, $\nu = 0{,}3$ и $\alpha = 1$.

Качество получаемых оценок принято оценивать при помощи так называемого индекса эффективности $I_{\text{eff}}$, который определяется следующим образом:

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{2\mathcal{M}_\oplus(v,\theta,\tau,y,\beta_1,\beta_2,\beta_3)}{|||\varepsilon(v-u)|||^2}.$$

Ясно, что чем ближе $I_{\text{eff}}$ к единице, тем выше качество полученной оценки.

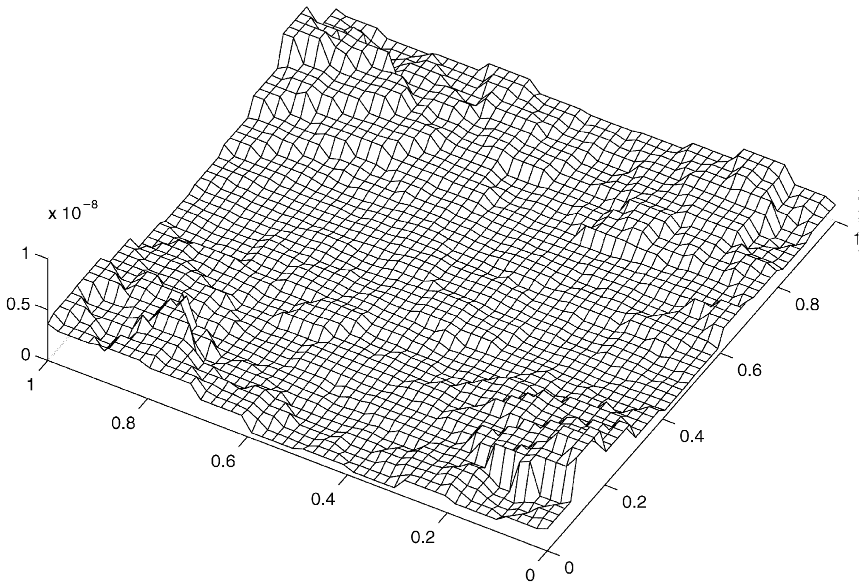
Для последующей адаптации сетки важно знать не только интегральное значение мажоранты, но и величину вклада в него на каждом элементе разбиения. Так как мажоранта $\mathcal{M}_\oplus(v,\beta,\tau)$ представляет собой интеграл, то возникает вопрос о том, насколько хорошо соответствующие подинтегральные выражения воспроизводят локальное распределение ошибок по области $\Omega$. Этот вопрос также исследовался в приведенных ниже экспериментах.

**Пример 1.** Рассматривается задача в квадрате $(0,1) \times (0,1)$.

В табл. 1 приведены соответствующие результаты. Здесь $N_{\text{elm}}$ обозначает число элементов в триангуляции, $M_{\oplus}$ — значение мажоранты, полученной в результате численного эксперимента, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$ — вклады в мажоранту ошибки в определяющих соотношениях, ошибки в уравнениях равновесия и ошибки задачи теплопроводности соответственно, $I_{\text{eff}}$ — индекс эффективности. На рис. 1 приведены трехмерные гистограммы точной ошибки и мажоранты ($N_{\text{elm}} = 312$).

Таблица 1. Результаты для примера 1

| $N_{\text{elm}}$ | $M^{(1)}$ | $M^{(2)}$ | $M^{(3)}$ | $M_{\oplus}$ | $\frac{1}{2}\lvert\lvert\lvert\varepsilon(v-u)\rvert\rvert\rvert^2$ | $I_{\text{eff}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 84 | 0,003110 | 0,001457 | 0,001447 | 0,006015 | 0,001274 | 2,17 |
| 312 | 0,000911 | 0,000542 | 0,000443 | 0,001896 | 0,000369 | 2,26 |
| 1372 | 0,000187 | 0,000110 | 0,000087 | 0,000384 | 0,000084 | 2,13 |
| 5458 | 0,000047 | 0,000029 | 0,000021 | 0,000097 | 0,000021 | 2,14 |



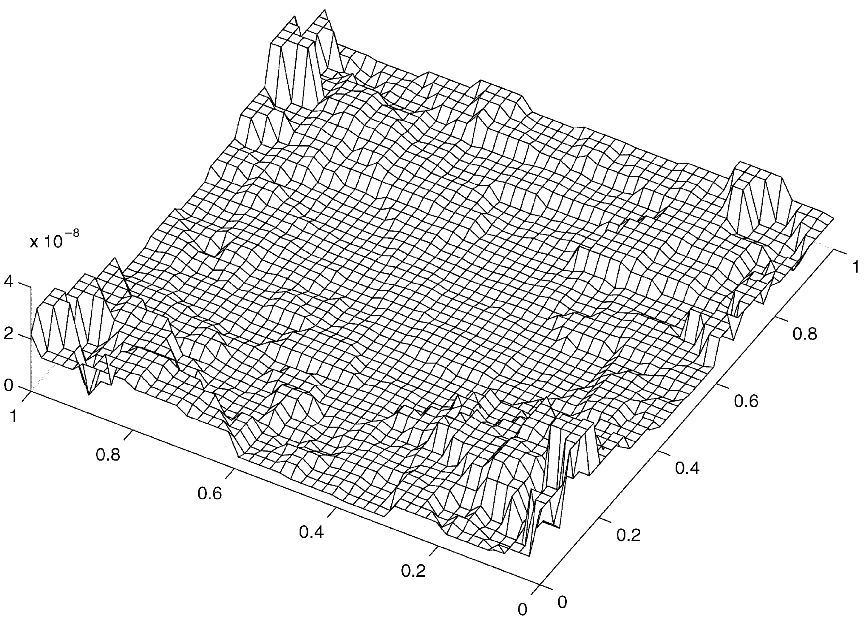



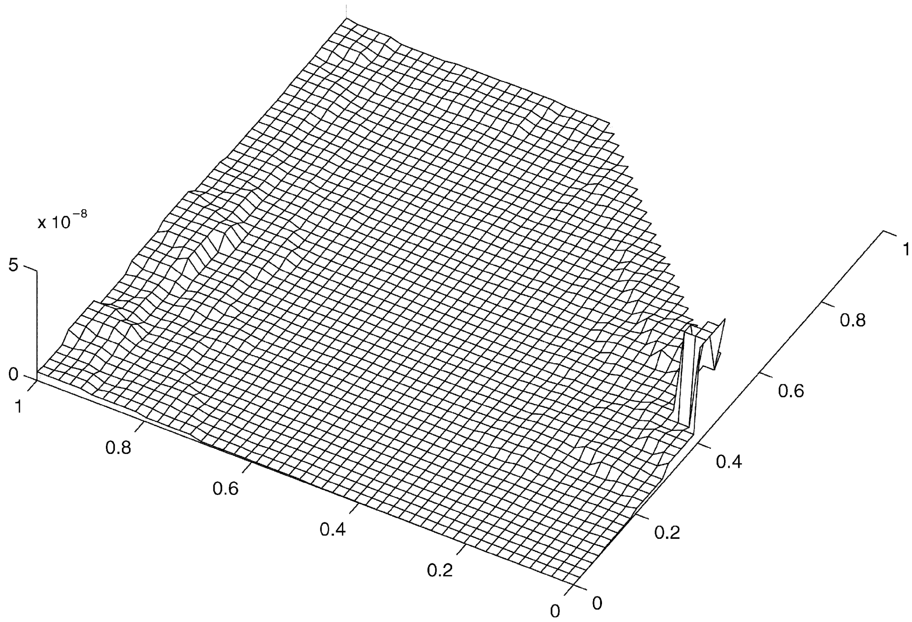

Рис. 1

**Пример 2.** Пусть $\Omega$ представляет собой область $(-1,1)\times(-1,1)$, в которой сделаны боковые треугольные вырезы. Численное моделирование производилось для одной четвертой этой области.

Соответствующие результаты приведены в табл. 2. На рис. 2 приведены трехмерные гистограммы точной ошибки и мажоранты ($N_{\rm elm} = 286$) для задачи термоупругости.

Таблица 2. Результаты для примера 2

| $N_{\rm elm}$ | $M_\oplus$ | $\frac{1}{2}\|\|\|\varepsilon(v-u)\|\|\|^2$ | $I_{\rm eff}$ |
|---|---|---|---|
| 82 | 0,00348 | 0,00154 | 1,50 |
| 286 | 0,00130 | 0,00042 | 1,76 |
| 1131 | 0,00050 | 0,00012 | 2,03 |



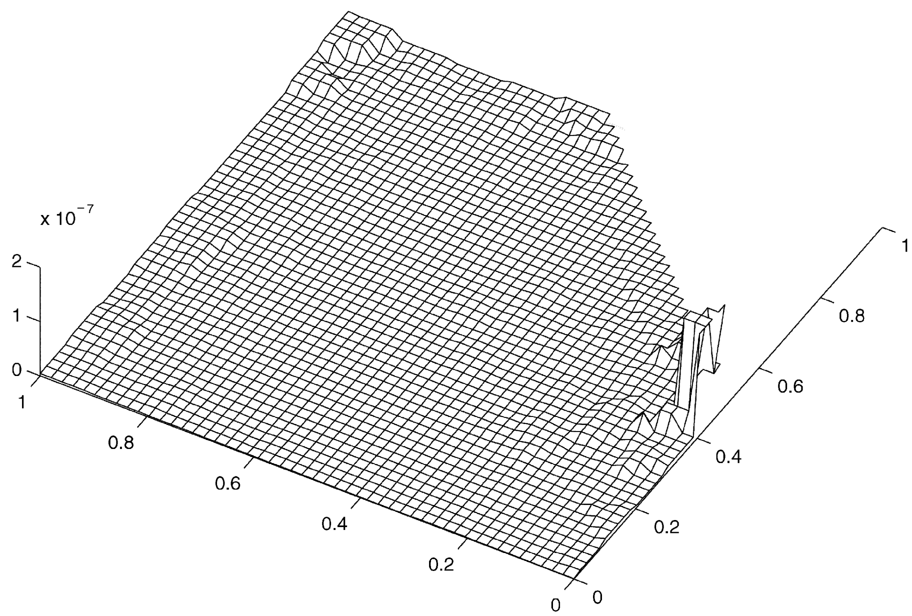




Рис. 2

Из этих результатов видно, что функционал $M_\oplus$ дает хорошие оценки величины погрешности, а интегранд мажоранты достаточно точно воспроизводит распределение ошибки по области.

## Литература


1. Ainsworth M., Oden J.T. *A posteriori error estimation in finite element analysis.* – John Wiley & Sons, Inc., 2000. – 264 p.
2. Babuška I., Strouboulis T. *The finite element method and its reliability.* – Oxford University Press Inc., New York, 2001. – 736 p.
3. Verfürth R. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques.* – Wiley–Teubner, 1996. – 127 p.
4. Wahlbin L.B. *Superconvergence in Galerkin finite element methods* // Lect. Notes Math., Springer-Verlag. – 1995. – V. 1605.
5. Zienkeiewicz O.C., Zhu J.Z. *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis* // Internat. J. Numer. Methods Engrg. – 1987. – T. 24. – C. 337–357.
6. Repin S. *A posteriori error estimation for nonlinear variational problems by duality theory* // Zapiski Nauchnych Seminarov V.A. Steklov Math. Inst. in St.-Petersburg. – 1997. – T. 243. – C. 201–214.
7. Repin S. *A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals* // Math. Comput. – 2000. – T. 69. – C. 481–500.
8. Репин С.И. *Двусторонние оценки отклонения от точного решения для равномерно эллиптических уравнений* // Тр. Санкт-Петерб. матем. о-ва. – 2001. – Т. 9. – С. 148–179.
9. Muzalevsky A.V., Repin S.I. *On two-sided error estimates for approximate solutions of problems in the linear theory of elasticity* // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2003. – T. 18. – C. 65–85.
10. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. *Теория упругости.* – М.: Наука, 1979. – 576 с.
11. Repin S. *A unified approach to a posteriori error estimation based on duality error majorants* // Math. Comput. Simul. – 1999. – T. 50. – C. 305–321.



*Санкт-Петербургский государственный технический университет*

*Санкт-Петербургское отделение математического института им. В.А. Стеклова Российской Академии наук*



*Поступила*
17.09.2004