ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 1 (512)

УДК 517.9

П.П. ВОЛОСЕВИЧ, Е.И. ЛЕВАНОВ, Е.В. СЕВЕРИНА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ С УЧЕТОМ РЕЛАКСАЦИИ ПОТОКА ТЕПЛА И ОБЪЕМНЫХ ИСТОЧНИКОВ ЭНЕРГИИ

При исследовании процессов теплопереноса во многих случаях плотность потока тепла представляется пропорциональной градиенту температуры (закон Фурье). Однако у закона Фурье есть свои рамки применимости: длина и время свободного пробега частиц должны быть малы по сравнению с характерными пространственными и временными масштабами изменения температуры. Далеко не во всех интересующих нас задачах это условие выполнимо, поэтому в данной работе предлагается изучать уравнение теплопереноса другого вида. В нем учитывается инерционный член, зависящий от производной потока по времени. Это в свою очередь приводит к изменению типа уравнения — оно станет гиперболическим, что может существенно изменить характер движения и переноса тепла (см., напр., [1]–[5] и библиографию в этих работах).

1. Анализ законов сохранения на фронте сильного разрыва

Пусть ρ — плотность среды, T — температура, p — давление, ε — удельная внутренняя энергия, v — скорость газа, r — переменная Эйлера, W — поток тепла, Q – мощность нелинейных объемных источников ($Q > 0$) или стоков ($Q < 0$) энергии. Уравнения газовой динамики запишем в массовых лагранжевых переменных m и t для случаев плоской ($\nu = 0$), осевой ($\nu = 1$) и сферической ($\nu = 2$) симметрий соответственно:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial m}(r^\nu v), \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial m}(r^\nu p) + \nu\frac{p}{\rho r}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = v, \quad r = r(m,t), \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon + \frac{1}{2}v^2\right) = -\frac{\partial}{\partial m}(r^\nu(pv + W)) + \frac{Q}{\rho}, \tag{4}$$

$$W = -Kr^\nu\frac{\partial T}{\partial m} - \tau\frac{\partial W}{\partial t}. \tag{5}$$

В уравнении (5) K — коэффициент теплопроводности, τ — время релаксации теплового потока. Будем считать справедливыми уравнения состояния идеального газа

$$p = R\rho T, \quad \varepsilon = \frac{RT}{\gamma - 1}, \tag{6}$$

где R — универсальная газовая постоянная, $\gamma > 1$ — постоянное отношение удельных теплоемкостей. Решение уравнений (1)–(5) допускает сильные разрывы. Поэтому в общем случае

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 02-01-00185, 02-01-00700).

они должны быть записаны в интегральной форме. Соответствующие интегральные уравнения получим аналогично ([6], с. 165–167) путем формального интегрирования системы (1)–(5) в окрестности разрыва.

Пусть $m_j = m_j(t)$ — след поверхности разрыва искомых величин в плоскости (m, t), проходящий через точки с координатами A $(m = m_1,\, t = t_1)$ и C $(m = m_2,\, t = t_2)$, где $m_2 = m_1 + \Delta m$, $t_2 = t_1 + \Delta t$, а Δm, Δt — малые величины. Построим прямоугольник $ABCD$ со сторонами, параллельными осям координат. Интегрируя в пределах от m_1 до m_2 и от t_1 до t_2 уравнения (1)–(4), с учетом (6) получим

$$\int_{m_1}^{m_2} \left[\left(\frac{1}{\rho}\right)_{t_2} - \left(\frac{1}{\rho}\right)_{t_1}\right] dm = \int_{t_1}^{t_2} [(r^\nu v)_{m_2} - (r^\nu v)_{m_1}] dt, \tag{7}$$

$$\int_{m_1}^{m_2} [(v)_{t_2} - (v)_{t_1}] dm = -\int_{t_1}^{t_2} [(r^\nu p)_{m_2} - (r^\nu p)_{m_1}] dt + \nu \int_{t_1}^{t_2} \int_{m_1}^{m_2} \frac{p}{r\rho} dm\, dt, \tag{8}$$

$$\int_{m_1}^{m_2} [(r)_{t_2} - (r)_{t_1}] dm = \int_{t_1}^{t_2} \int_{m_1}^{m_2} v\, dm\, dt, \tag{9}$$

$$\int_{m_1}^{m_2} \left[\left(\frac{RT}{\gamma - 1} + \frac{v^2}{2}\right)_{t_2} - \left(\frac{RT}{\gamma - 1} + \frac{v^2}{2}\right)_{t_1}\right] dm =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} [((pv + W) r^\nu)_{m_2} - ((pv + W) r^\nu)_{m_1}] dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{m_1}^{m_2} \frac{Q}{\rho} dm\, dt. \tag{10}$$

Интегральное уравнение, соответствующее (5) при $\tau = 0$ (закон Фурье), представим в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} [(T)_{m_2} - (T)_{m_1}] dt = -\int_{t_1}^{t_2} \int_{m_1}^{m_2} \frac{W}{K r^\nu} dm\, dt. \tag{11}$$

При учете релаксации теплового потока ($\tau \neq 0$), интегрируя (5), можно записать

$$\int_{m_1}^{m_2} [(W)_{t_2} - (W)_{t_1}] dm = -\int_{t_1}^{t_2} \int_{m_1}^{m_2} \frac{K r^\nu \partial T}{\tau \partial m} dm\, dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{m_1}^{m_2} \frac{W}{\tau} dm\, dt. \tag{12}$$

Рассмотрим сначала уравнения (7)–(10). Следуя [6], воспользуемся теоремой о среднем для каждого слагаемого рассматриваемых уравнений. Пусть t_*, t_{**}, $\widetilde{t}$, m_*, m_{**}, $\widetilde{m}$ — средние значения аргументов m, t, находящиеся между значениями m_1 и m_2, t_1 и t_2 соответственно. Тогда, например, уравнение энергии (10) примет вид

$$\left[\left(\frac{RT}{\gamma - 1} + \frac{v^2}{2}\right)_{t_2 m_{**}} - \left(\frac{RT}{\gamma - 1} + \frac{v^2}{2}\right)_{t_1 m_*}\right] \Delta m =$$
$$= -[((W + pv) r^\nu)_{t_{**} m_2} - ((W + pv) r^\nu)_{t_* m_1}] \Delta t + \left(\frac{Q}{\rho}\right)_{\tilde{t}\tilde{m}} \Delta m\, \Delta t.$$

Аналогично получим соотношения, соответствующие (7)–(9). Переходя к пределу при $\Delta m \to 0$ и $\Delta t \to 0$ и обозначая индексом 1 значения функции перед фронтом разрыва, а индексом 2 — за фронтом разрыва, получим

$$r_2 = r_1, \tag{13.1}$$

$$\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) \frac{D_m}{r_1^\nu} = v_1 - v_2, \tag{13.2}$$

$$(v_2 - v_1) \frac{D_m}{r_1^\nu} = p_2 - p_1, \tag{13.3}$$

$$\left(\frac{RT_2}{\gamma - 1} + \frac{v_2^2}{2} - \frac{RT_1}{\gamma - 1} - \frac{v_1^2}{2}\right) \frac{D_m}{r_1^\nu} = p_2 v_2 - p_1 v_1 + W_2 - W_1, \tag{13.4}$$

где D_m — массовая лагранжева скорость распространения фронта разрыва

$$D_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm_j}{dt}. \tag{14}$$

Пусть $\theta = \frac{\rho_1}{\rho_2}$. Из (6) выразим температуру $T = \frac{p}{R\rho}$ и, используя введенные обозначения, проведем ряд преобразований, в результате которых соотношения (13) можно записать в виде

$$v_2 = v_1 + (1-\theta)\frac{D_m}{r_1^{\nu}\rho_1}, \tag{15.1}$$

$$p_2 = p_1 + (1-\theta)\frac{D_m^2}{r_1^{2\nu}\rho_1}, \tag{15.2}$$

$$T_2 = T_1\theta + \theta(1-\theta)\frac{D_m^2}{r_1^{2\nu}R\rho_1^2}, \tag{15.3}$$

$$W_2 = W_1 + \frac{D_m^3}{2r_1^{3\nu}\rho_1^2}(1-\theta)\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\theta - \left(1 + \frac{2\gamma\rho_1 p_1 r_1^{2\nu}}{(\gamma-1)D_m^2}\right)\right]. \tag{15.4}$$

При $W = 0$ из (15.4) получим известное в газовой динамике выражение для отношения плотностей при переходе через сильный разрыв

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{\theta} = \frac{\gamma+1}{\gamma - 1 + \frac{2C_{\gamma 1}^2 r_1^{2\nu}}{D_m^2}}, \tag{16}$$

где $C_{\gamma 1} = \rho_1\sqrt{\frac{\gamma p_1}{\rho_1}}$ — массовая газодинамическая скорость звука перед фронтом ударной волны, записанная для уравнения состояния идеального газа (6). В случае, когда ударная волна распространяется по "нулевому начальному фону"

$$v = v_1 = 0, \quad p = p_1 = 0, \quad T = T_1 = 0, \quad W = W_1 = 0, \quad \rho = \rho_1 = \mathrm{const}, \tag{17}$$

из (15), (16) получим часто используемые выражения условий Гюгонио на фронте газодинамической ударной волны

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{\theta} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad v_2 = \frac{2}{\gamma+1}\frac{D_m}{r_1^{\nu}\rho_1}, \quad p_2 = \frac{2}{\gamma+1}\frac{D_m^2}{r_1^{2\nu}\rho_1}, \quad T_2 = \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\frac{D_m^2}{r_1^{2\nu}\rho_1^2 R}, \quad W_2 = 0. \tag{18}$$

При $W \neq 0$, но $\tau = 0$, используя (11), теорему о среднем и переход к пределам $\Delta m \to 0$, $\Delta t \to 0$, получим равенство температур справа и слева от разрыва

$$T_1 = T_2. \tag{19}$$

В этом случае сильный разрыв является изотермическим [7]–[9]. Из (15) получим соотношения

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{\theta} = \frac{D_m^2}{r_1^{2\nu}C_{i1}^2}, \tag{20.1}$$

$$v_2 = v_1 + (1-\theta)\frac{D_m}{r_1^{\nu}\rho_1}, \tag{20.2}$$

$$p_2 = \frac{p_1}{\theta}, \tag{20.3}$$

$$W_2 = W_1 - \frac{D_m^3}{2r_1^{3\nu}\rho_1^2}(1-\theta^2). \tag{20.4}$$

Здесь $C_{i1} = \rho_1\sqrt{RT_1}$ — массовая изотермическая скорость звука впереди фронта разрыва.

Пусть теперь $W \neq 0$, $\tau \neq 0$. При произвольных значениях функций K и τ уравнение (5) записано в недивергентном виде. Предположим, что теплофизические величины K и τ либо постоянны при $\nu = 0$, либо зависят от температуры $K = K(T)$, $\tau = \tau(T)$. Аналогично [10] рассмотрим функцию $V = V(T) = V(T(m,t)) = \widetilde{V}(m,t)$. Очевидно, можно записать $\frac{\partial}{\partial m}\widetilde{V} = \frac{dV}{dT}\frac{\partial T}{\partial m}$. Положим

$$\frac{dV}{dT} = \frac{K(T)}{\tau(T)} r^{\nu}. \tag{21}$$

Формула (21) определяет функцию $V(T) = \widetilde{V}(m,t)$ через заданные значения теплофизических величин $K(T)$ и $\tau(T)$. Используя уравнение (12) с учетом (21), после ряда преобразований, аналогичных изложенным выше, получим соотношение

$$(W_2 - W_1)D_m = \widetilde{V_2} - \widetilde{V_1}. \tag{22}$$

Формулы (15), (22) выражают законы сохранения при учете релаксации плотности потока тепла на фронте температурной ударной волны в случае постоянных или зависящих от температуры функций K и τ. Пусть

$$K = K_0 T^{a_0}, \quad \tau = \tau_0 T^{a_1}. \tag{23}$$

Из (21), (23) при $a_0 - a_1 + 1 \neq 0$ будем иметь

$$\widetilde{V_j} = \frac{K_0}{\tau_0} \frac{T_j^{a_0 - a_1 + 1}}{a_0 - a_1 + 1} r_1^{\nu}, \quad j = 1, 2. \tag{24}$$

Используя (15.4) и (22), с учетом (24) получим уравнение, определяющее отношение плотностей $\theta = \frac{\rho_1}{\rho_2}$,

$$(1-\theta)\Big[\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\Big(1 + \frac{2\gamma R T_1 \rho_1^2 r_1^{2\nu}}{(\gamma-1)D_m^2}\Big)\Big] =$$
$$= \frac{2K_0(\gamma-1)\rho_1^2 r_1^{4\nu}}{\tau_0(\gamma+1)(a_0 - a_1 + 1)D_m^4}\Big[\Big(T_1\theta + \theta(1-\theta)\frac{D_m^2}{R\rho_1^2 r_1^{2\nu}}\Big)^{a_0 - a_1 + 1} - T_1^{a_0 - a_1 + 1}\Big]. \tag{25}$$

Выпишем уравнение (25) для случая газодинамической тепловой ударной волны, распространяющейся по нулевому начальному фону (17):

$$\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = A_0 \theta^{a_0 - a_1 + 1}(1-\theta)^{a_0 - a_1}, \tag{26}$$

где $A_0 = \frac{2(\gamma-1)K_0}{(\gamma+1)(a_0-a_1+1)\tau_0} D_m^{2(a_0-a_1-1)} r_1^{-2\nu(a_0-a_1-1)} R^{-a_0+a_1-1} \rho_1^{-2(a_0-a_1)} > 0$.

Покажем, что при $a_0 - a_1 + 1 > 0$ уравнение (26) имеет хотя бы один действительный корень. Для этого сравним левую ($y_1 = \theta - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$) и правую ($y_2 = A_0\theta^{a_0-a_1+1}(1-\theta)^{a_0-a_1}$) части соотношения (26). Так как $0 \le \theta \le 1$, то при $a_0 - a_1 + 1 > 0$ функция $y_2 = y_2(\theta)$ целиком находится в области $y \ge 0$, $\theta \ge 0$. Ее производная $\frac{dy_2}{d\theta} = \theta^{a_0-a_1}(1-\theta)^{a_0-a_1+1}[a_0 - a_1 + 1 - (2(a_0-a_1)+1)\theta]$ обращается в нуль при $\theta = 0$, $\theta = \frac{a_0-a_1+1}{2(a_0-a_1)+1}$, $\theta = 1$. Функция $y = y_2(\theta)$ при $\theta \to 0$ стремится к нулю пропорционально $\theta^{a_0-a_1+1}$ и линейна в окрестности $\theta = 1$. Сравнение ее с положительной частью прямой $y = y_1$, расположенной в области $\theta > \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$, показывает, что функции $y = y_1(\theta)$ и $y = y_2(\theta)$ пересекаются при некотором действительном значении $\theta = \theta_k$, $\frac{\gamma-1}{\gamma+1} < \theta_k < 1$.

Рассмотрим теперь ряд характерных свойств теплопереноса в релаксационных средах при некоторых конкретных значениях параметров a_0 и a_1, ограничиваясь случаем $\nu = 0$ (плоская симметрия).

1. Пусть $a_0 = a_1$. В этом случае из (26) следует, что скачок плотностей на фронте тепловой ударной волны можно представить в виде

$$\frac{1}{\theta} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\Big(1 - \frac{2(\gamma-1)K_0}{(\gamma+1)\tau_0 R D_m^2}\Big). \tag{27}$$

Подставляя в (27) известное выражение массовой лагранжевой скорости распространения тепла при $\tau \neq 0$ (напр., [1], [2], [5])

$$C_T = \sqrt{\frac{(\gamma-1)K}{R\tau}}, \tag{28}$$

получим

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\Big(1 - \frac{2C_T^2}{(\gamma+1)D_m^2}\Big). \tag{29}$$

Так как $\rho_2 > \rho_1$, то из (29) получим

$$D_m > C_T. \tag{30}$$

Неравенство (30) означает, что массовая скорость движения фронта газодинамической ударной волны больше характерной скорости распространения релаксационных тепловых возмущений.

Выше речь шла о переносе тепла в движущейся среде. При $v_2 = v_1 = 0$, $\rho = \rho_1 = \rho_2 = \text{const}$, но $T_1 \neq 0$, $W_1 \neq 0$ закон сохранения энергии имеет вид (13.4)

$$W_2 - W_1 = \frac{R}{\gamma-1}(T_2 - T_1)D_m. \tag{31}$$

Для случая неподвижной среды из формул (22), (24) при $a_0 = a_1$ получим

$$D_m(W_2 - W_1) = \widetilde{V_2} - \widetilde{V_1} = \frac{K_0}{\tau_0}(T_2 - T_1). \tag{32}$$

Умножая далее левую часть (31) на D_m и сравнивая полученную при этом формулу с (32), при $T_1 \neq T_2$ будем иметь равенство $D_m = C_T$. Таким образом, в отличие от предыдущего случая, в неподвижной среде скорости распространения фронта разрыва и скорости теплопереноса при учете релаксации теплового потока совпадают.

2. Пусть теперь $a_0 - a_1 = 1$, что справедливо, например, для случая полностью ионизированного газа: $a_0 = \frac{5}{2}$, $a_1 = \frac{3}{2}$ (см. [11]). При $a_0 - a_1 = 1$ уравнение (26) принимает вид

$$\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = A_0\theta^2(1-\theta), \tag{33}$$

где $A_0 = \frac{(\gamma-1)K_0}{(\gamma+1)\tau_0 R^2\rho_1^2}$. Уравнение (33) является кубическим, имеет единственный действительный корень. Формулу (33) аналогично предыдущему можно записать в виде отношения плотностей $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{\theta}$, выраженного через параметры C_T и D_m: $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{\theta} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}(1 - \frac{C_T^2}{(\gamma+1)D_m^2})$. Из условия $\rho_2 > \rho_1$ следует $D_m^2 > \frac{1}{2}C_T^2$.

3. Очевидно, что в общем случае $a_0 - a_1 + 1 > 0$; используя выражения $T_2 = \theta(1-\theta)\frac{D_m^2}{R\rho_1^2}$, $C_T^2 = \frac{(\gamma-1)K_0}{R\tau_0}T_2^{a_0-a_1}$, соотношение (26) можно представить в виде отношения плотностей $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{\theta} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}(1 - \frac{2C_T^2}{(\gamma+1)(a_0-a_1+1)D_m^2})$. Из условия $\rho_2 > \rho_1$ получим для движущейся среды неравенство $D_m^2 > \frac{1}{a_0-a_1+1}C_T^2$.

2. Два сильных разрыва в случае $\tau \neq 0$

Одним из замечательных свойств теплопереноса в движущейся среде с учетом релаксации потока является существование при заданных краевых условиях двух сильных разрывов (напр., [1], [2], [4], [12]). Указанный факт связан с наличием при $\tau \neq 0$ двух различных скоростей звука.

В случае $W = 0$ характерной скоростью движения нелинейной среды является *газодинамическая* скорость звука. Соответствующая массовая скорость представлена выше в виде фомулы $C_\gamma = \rho\sqrt{\gamma RT}$, справедливой для случая идеального газа. Со скоростью C_γ связана *классическая* ударная волна (см. формулы (15), (16), (18)).

При $W \neq 0$, но $\tau = 0$, определяющей является *изотермическая* скорость звука. В случае идеального газа (6) массовая скорость выражается формулой $C_i = \rho\sqrt{RT} = \rho\sqrt{\frac{p}{\rho}}$. Упомянутая выше скорость распространения тепла вида (28) при $\tau = 0$ равна бесконечности. При $\tau = 0$, нулевом начальном фоне ($T(m,0) = v(m,0) = W(m,0) = 0$) и $\frac{\partial K}{\partial T} > 0$ существуют температурные волны, распространяющиеся с конечной скоростью. Это связано с тем, что при $K = 0$, но бесконечном или конечном и отличном от нуля градиенте температуры, тепловой поток на фронте волны обращается в нуль. При этом в окрестности фронта температурной волны газодинамические и тепловые величины непрерывны [7]–[9]. В глубине фронта волны существует изотермический разрыв (см. формулы (19), (20)).

Если $W \neq 0$ и $\tau \neq 0$, то отличны от нуля и бесконечности обе скорости звука, как C_i, так и C_T. В [12] отмечено, что при $W \neq 0$ и $\tau \neq 0$ уравнения для характеристик системы (1)–(5) определяются формулами

$$\frac{dm}{dt} = \lambda_n, \quad n = 1, 2.$$

Параметры λ_1 и λ_2 имеют смысл скоростей распространения малых возмущений и слабых разрывов, они выражаются через скорости звука C_i и C_T:

$$\lambda_1^2 = \frac{C_T^2 + \gamma C_i^2 + \sqrt{(C_T^2 - \gamma C_i^2)^2 + 4(\gamma - 1)C_T^2 C_i^2}}{2},$$
$$\lambda_2^2 = \frac{C_T^2 + \gamma C_i^2 - \sqrt{(C_T^2 - \gamma C_i^2)^2 + 4(\gamma - 1)C_T^2 C_i^2}}{2}.$$

При $W \neq 0$ и $\tau \neq 0$ существует температурная ударная волна, причем их может быть две. На рис. 1 для случая $\tau \neq 0$ приведены некоторые результаты автомодельного решения системы уравнений (1)–(5) при нестационарном граничном условии для задачи о поршне с заданным на нем температурным режимом и степенными законами $K = K(T, \rho)$, $\tau = \tau(T, \rho)$. Предполагалось, что начальная плотность среды постоянна и имеют место нулевые значения остальных величин. Соответствующие условия автомодельности приведены в [4]. В данной работе теплофизические параметры были заданы степенными функциями вида $K = K_0 T^{\frac{5}{2}}\rho$, $\tau = \tau_0 T^{\frac{3}{2}}\rho^{-1}$. Решение строилось с помощью численных методов. При этом "размазывание" разрывов осуществлялось с помощью обычной классической псевдовязкости [13], используемой в газовой динамике и в случае $W = 0$.

На рис. 1 представлены безразмерные профили температуры (f), удельного объема ($1/\delta$) и скорости (α) в зависимости от "автомодельной переменной s". Четко просматриваются следующие друг за другом две температурные ударные волны. Анализ показывает, что с увеличением параметра τ_0 (см. рис. 1a) и 1b)) уменьшается расстояние между граничным источником (поршнем) и обоими фронтами ударных волн.

Как известно, при $\tau = 0$ существуют различные режимы теплопереноса в движущейся среде — режимы температурной волны первого рода (ТВ-1) и температурной волны второго рода (ТВ-2) (см. [8], [9] и библиографию в этих работах).

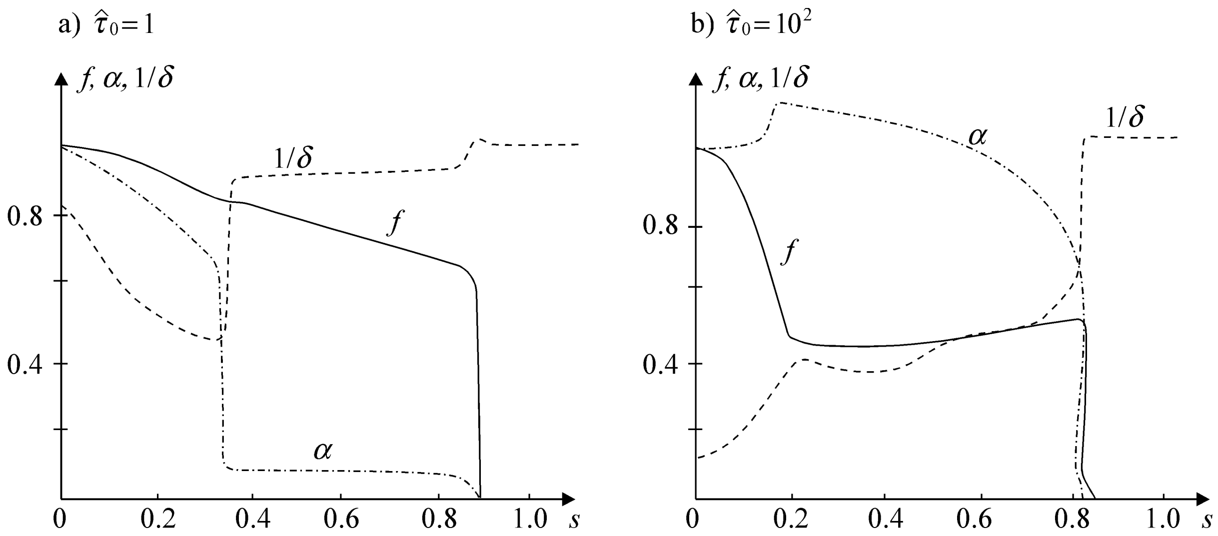

Рис. 1

Для режима ТВ-1 характерным является монотонность профиля функции температуры $f = f(s)$. В глубине фронта тепловой волны в некоторой точке имеет место изотермический разрыв. Расстояние между фронтом температурной волны в случае $\tau = 0$ и изотермическим разрывом может быть различным, что в зависимости от параметров задачи характеризует глубину прогрева вещества в режиме ТВ-1. В режиме ТВ-2 температура немонотонна. Основная область прогрева находится позади волны сжатия и изотермического разрыва.

По аналогии со случаем $\tau = 0$ можно сказать, что при τ, отличном от нуля, на рис. 1a) представлено распределение искомых величин, характерное для режима ТВ-1. Второй разрыв может служить аналогом изотермического разрыва в глубине фронта температурной волны. С увеличением параметра τ_0, а следовательно, с уменьшением эффективной скорости распространения тепла, условно можно сказать, что ТВ-1 переходит в режим ТВ-2 (см. рис. 1b)). При этом фронт волны прогрева в режиме ТВ-2 соответствует внутреннему разрыву тепловых и газодинамических величин.

3. Оценка влияния объемных источников и стоков энергии на исследуемые процессы

Описанные выше расчеты были также проведены с учетом объемного источника (стока) энергии степенного вида $Q = Q_0 T^{\frac{1}{2}} \rho^{-1}$ при различных значениях параметра Q_0. Анализ и вычислительные эксперименты показали, что с изменением Q возможен переход от монотонного распределения температуры по пространственной координате m к немонотонному. Аналогичную тенденцию может иметь и пространственное распределение плотности.

Анализ влияния объемных источников и стоков энергии на процесс теплопереноса проводился для случая $\tau = 0$ в [14] и при $\tau \neq 0$ в [4]. В обоих случаях нелинейная среда предполагалась неподвижной. В случае $\tau = 0$ решение является непрерывным, а при $\tau \neq 0$ имеет разрыв температуры и потока тепла. Анализ проводился с помощью решения задачи о бегущих волнах, т. е. в предположении, что искомые функции зависят от m и t в комбинации $x = Dt - m$, где $D = \mathrm{const}$ — скорость бегущей волны. Коэффициент теплопроводности, время релаксации теплового потока и мощность источников и стоков энергии рассматривались степенными функциями температуры $K = K_0 T^{a_0}$, $\tau = \tau_0 T^{a_1}$, $Q = Q_0 T^{a_2}$. Считалось, что фронт бегущей волны находится в точке $x = 0$ ($m = Dt$). Перед фронтом ($x = 0$) задаются нулевые условия $T = 0$, $W = 0$. Зависимость процесса переноса тепла от характера изменения объемного источника (стока) энергии, в приведенных выше предположениях, представлена на рис. 2.

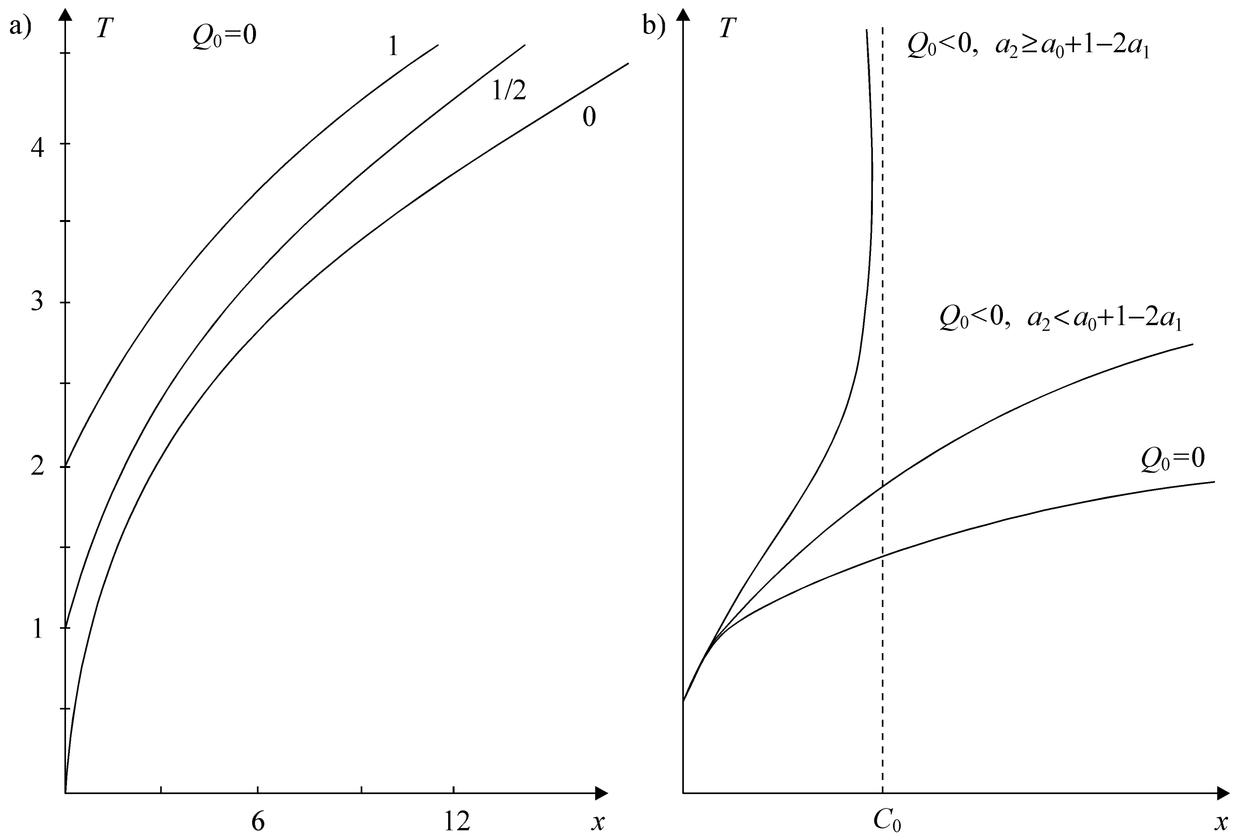

Рис. 2

На рис. 2a) для случая $Q_0 = 0$ приведены примеры распространения бегущих волн по переменной $x = Dt - m$ для случаев $a_0 = \frac{5}{2}$, $a_1 = \frac{3}{2}$, при фиксированном значении $K_0 = 1$ и различных значениях множителя $\tau_0 = 0, \frac{1}{2}, 1$, отмеченых цифрами на кривых. При постановке задачи предполагалось, что скорость фронта бегущей волны и его положение ($x = 0$) совпадают со скоростью и расположением фронта разрыва тепловой волны. При $\tau_0 = 0$ решение непрерывно, на фронте имеем $T(0) = 0$. При τ_0, отличных от нуля, имеет место разрыв. Решение построено в аналитической форме.

На рис. 2b) представлен качественный характер изменения функции $T{=}T(x)$ при $Q \leq 0$. Анализ показывает, что в случае $Q_0 < 0$ (в рассматриваемой среде существуют объемные потери энергии), решение типа бегущей волны существует во всей области изменения $x \geq 0$, если выполняется неравенство $a_2 < a_0 + 1 - 2a_1$. В противном случае решение задачи о бегущей волне оказывается физически непротиворечивым лишь на конечном интервале изменения $0 \leq x \leq C_0$ и, следовательно, конечном прмежутке времени. При некотором значении $x = C_0$ имеем $T = \infty$.

Если $Q > 0$ (существуют объемные источники энергии), то при любых значениях показателей зависимости T, τ, Q от температуры решение типа бегущей волны существует лишь конечное время.

Литература

1. Косарев В.И., Леванов Е.И., Сотский Е.Н. *Об одном способе описания процесса электронной теплопроводности в высокотемпературной плазме* // Препринт № 142 ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. – М, 1981. – 25 с.
2. Леванов Е.И., Сотский Е.Н. *Теплоперенос с учетом релаксации теплового потока. Математическое моделирование. Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики.* – М: Наука, 1987. – С. 155–190.

3. Бурханов Е.М., Лютиков Е.Н., Медин С.А. *Гиперболическая теплопроводность и второй закон термодинамики* // Препринт № 2-462 ОИВТ РАН институт теплофизики экстремальных состояний. – М., 2002. – 28 с.
4. Волосевич П.П., Леванов Е.И. *Анализ процессов теплопереноса с учетом в среде релаксации теплового потока и объемных источников энергии* // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 1. – С. 38–44.
5. Шабловский О.Н. *Релаксационный процесс в нелинейных средах.* – Гомель: Изд-во Гомельск. гос. техн. ун-та им. П.О. Сухого, 2003. – 382 с.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* – М: Изд-во Московск. гос. ун-та, 1999. – 798 с.
7. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.* – М: Наука, 1966. – 686 с.
8. Волосевич П.П., Леванов Е.И. *Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса.* – М: Изд-во МФТИ, 1997. – 240 с.
9. Волосевич П.П., Леванов Е.И., Фетисов С.А. *Автомодельные решения задач нагрева и динамики плазмы.* – М: Изд-во МФТИ, 2001. – 256 с.
10. Шабловский О.Н. *Распространение плоской ударной тепловой волны в нелинейной среде* // Инженеро–физический журнал. – 1985. – Т. 49. – № 3. – С. 499–500.
11. Спитцер Л. *Физика полностью ионизированного газа.* – М: Мир, 1965. – 212 с.
12. Леванов Е.И., Сотский Е.Н. *О бегущих волнах в среде с теплопроводностью гиперболического типа* // Препринт № 193 ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. – М, 1982. – 27 с.
13. Самарский А.А., Попов Ю.П. *Разностные методы решения задач газовой динамики.* – М: Наука, 1980. – 350 с.
14. Волосевич П.П., Ларионов Е.А., Леванов Е.И. *Бегущие тепловые волны в высокотемпературной среде* // Тр. 4-й международн. конф. по матем. моделир. – М: Изд-во Станкин, 2001. – С. 112–120.

Институт математического
моделирования
Российской Академии наук

Поступила
28.05.2004