ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 9 (508)

УДК 517.958:539.3

Л.П. ЛЕБЕДЕВ, А.Б. НЕЙМАРК

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ПОЛОГОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРЕПЯТСТВИЕМ

В данной статье доказывается существование обобщенного решения задачи контакта пологой нелинейной оболочки с жестким препятствием при некоторых ограничениях на тангенциальные нагрузки. Предлагается математическая модель препятствия. Решение задачи доставляет минимум функционалу полной энергии оболочки на множестве допустимых перемещений. Задача сводится к решению вариационного неравенства в энергетическом пространстве. Вариационным неравенствам в теории оболочек посвящены работы [1], [2]. Равновесие пологой нелинейной оболочки без препятствия рассмотрено в [3]–[5].

1. Постановка задачи. Рассматривается задача о равновесии пологой оболочки при общих условиях закрепления края, подверженной внешним распределенным нагрузкам F_1, F_2, F_3. Перемещения оболочки ограничены жестким препятствием. Для математической постановки задачи используется вариант нелинейной теории изотропных однородных пологих оболочек постоянной толщины $2h$, в котором геометрия срединной поверхности оболочки приближается к плоской ([6], с. 298). Срединная поверхность в плане занимает компактное множество Ω, которое имеет кусочно-гладкую границу Γ такую, что в соответствующих функциональных пространствах справедливы теоремы вложения Соболева ([7], с. 93).

Уравнения равновесия оболочки в перемещениях получаются из принципа виртуальных работ. Их вид определяется выражениями для усилий и деформаций срединной поверхности оболочки

$$T_1 = B(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad T_2 = B(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1), \quad T_{12} = \frac{1}{2}B(1-\nu)\varepsilon_{12},$$
$$M_1 = D(\varkappa_1 + \nu\varkappa_2), \quad M_2 = D(\varkappa_2 + \nu\varkappa_1), \quad M_{12} = D(1-\nu)\chi,$$
$$\varepsilon_1 = u_x + k_1 w + \frac{1}{2}w_x^2, \quad \varepsilon_2 = v_y + k_2 w + \frac{1}{2}w_y^2, \quad \varepsilon_{12} = u_y + v_x + w_x w_y,$$
$$\varkappa_1 = -w_{xx}, \quad \varkappa_2 = -w_{yy}, \quad \chi = -w_{xy}.$$

Здесь u, v — тангенциальные, а w — нормальная компоненты вектора перемещений $\mathbf{u}$ точек срединной поверхности оболочки, k_1, k_2 — главные кривизны, $B = 2Eh(1-\nu^2)^{-1}$, $D = \frac{2}{3}Eh^3(1-\nu^2)^{-1}$ — жесткости на растяжение и изгиб, E, ν — упругие постоянные.

Ниже формулируются минимально допустимые условия закрепления оболочки, при выполнении которых доказана теорема существования. Допускаются дополнительные однородные линейные условия закрепления оболочки, что на ход доказательств и формулировку результатов не влияет. Итак, в нормальном направлении оболочка имеет закрепления

$$w(x_i, y_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad w|_{\Gamma_1} = 0, \tag{1}$$

где точки $(x_i, y_i) \in \overline{\Omega}$ не лежат на одной прямой, а часть границы Γ_1 может быть нулевой. Подмножество функций из $C^{(4)}(\Omega)$, удовлетворяющих условию (1), обозначается $C_1^{(4)}$.

На части границы Γ_2 выполнены соотношения

$$u,\, v|_{\Gamma_2} = 0. \tag{2}$$

Множество вектор-функций $\tilde{\mathbf{u}}(u,v)$, удовлетворяющих условию (2), с компонентами из $C^{(2)}(\Omega)$ обозначается $C_1^{(2)}$. Для $\tilde{\mathbf{u}} \in C_1^{(2)}$ выполняется неравенство Корна для плоской задачи теории упругости:

$$\iint\limits_{\Omega}(u^2+v^2+u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2)dx\,dy \leqslant m\iint\limits_{\Omega}(u_x^2+v_y^2+(u_y+v_x)^2)dx\,dy$$

с постоянной m, не зависящей от $\tilde{\mathbf{u}}$.

Вместо краевых условий (2) в данной задаче можно использовать любые однородные граничные условия для тангенциальных смещений, гарантирующие справедливость неравенства Корна.

Таким образом, в каждой точке границы Γ заданы четыре краевых условия: часть "вектора" обобщенных перемещений $(u,v,w,\partial w/\partial n)$ и дополняющая его часть "вектора" обобщенных усилий

$$M_n(s)=0 \text{ на } \Gamma,\quad T_1^*(s)=f_1^*,\quad T_2^*(s)=f_2^* \text{ на } \Gamma\setminus\Gamma_2,\quad Q_n(s)=f_3 \text{ на } \Gamma\setminus\Gamma_1.$$

Здесь f_1^*, f_2^* выражаются через внешние усилия f_1, f_2, f_3, действующие на торцах оболочки в направлениях перемещений u, v, w соответственно. Функции нагрузки f_i, $i=1,2,3$, формально продолжены нулем на ту часть границы Γ, где они не заданы.

2. Модель препятствия. Действие препятствия описывается двумя математическими моделями. Неравенство, определяющее каждую из них, называется условием непроникновения. В первой модели тангенциальные перемещения в области контакта считаются пренебрежимо малыми, что приводит к условию

$$N_1(\mathbf{u})=a+w-h\geqslant 0 \text{ на } \Omega, \tag{3}$$

где функция $a(x,y)$ на Ω описывает препятствие в терминах внутренних координат срединной поверхности оболочки.

Условие непроникновения для второй модели, учитывающей тангенциальные перемещения в линейном приближении, заключено в неравенстве

$$N_2(\mathbf{u})=w(1+b_xd_x+b_yd_y)-w_xd_xh-w_yd_yh-ud_x-vd_y+b-d-h\geqslant 0 \text{ на } \Omega, \tag{4}$$

в котором функции $b(x,y)$ и $d(x,y)$ на Ω задают соответственно срединную поверхность недеформированной оболочки и поверхность препятствия.

Геометрически условие (4) означает, что точка оболочки $(x,y,b(x,y)-h)$ не может переместиться по другую сторону касательной плоскости, построенной в точке $(x,y,d(x,y))$ поверхности препятствия.

Дальнейшее изложение справедливо для обоих вариантов условия непроникновения, а потому в формулировках его форма (3) или (4) не конкретизируется.

3. Вариационная постановка задачи. Решением задачи о равновесии оболочки при наличии препятствия является вектор-функция $\mathbf{u}$, минимизирующая функционал полной энергии деформированной оболочки

$$I(\mathbf{u})=E(\mathbf{u})-A(\mathbf{u})$$

на множестве элементов из $C_1^{(2)}\times C_1^{(4)}$, удовлетворяющих одному (любому) из условий непроникновения. При этом область контакта оболочки и препятствия заранее неизвестна и состоит из тех точек множества Ω, на которых достигается равенство в условии непроникновения.

Энергия деформации $E(\mathbf{u})$ и работа внешних сил $A(\mathbf{u})$ определяются соотношениями

$$E(\mathbf{u})=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}(M_1\varkappa_1+M_2\varkappa_2+2M_{12}\chi+T_1\varepsilon_1+T_2\varepsilon_2+T_{12}\varepsilon_{12})dx\,dy,$$

$$A(\mathbf{u})=\iint\limits_{\Omega}(F_1u+F_2v+F_3w)dx\,dy+\int\limits_{\Gamma}(f_1u+f_2v+f_3w)ds.$$

Вводятся энергетические пространства. Пусть H_1 — пространство, полученное пополнением множества $C_1^{(2)}$ по метрике пространства $W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$. Неравенство Корна обеспечивает существование на H_1 эквивалентной нормы

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{H_1}^2 = \frac{1}{2} B \iint_\Omega \left(u_x^2 + v_y^2 + 2\nu u_x v_y + \tfrac{1}{2}(1-\nu)(u_y + v_x)^2\right) dx\, dy.$$

Пространство H_2 есть пополнение множества $C_1^{(4)}$ по метрике пространства $W^{2,2}(\Omega)$. На H_2 имеется эквивалентная норма [8]:

$$\|w\|_{H_2}^2 = \frac{1}{2} D \iint_\Omega \left((\nabla^2 w)^2 + 2(1-\nu)(w_{xy}^2 - w_{xx} w_{yy})\right) dx\, dy.$$

Скалярные произведения в пространствах H_i индуцированы соответствующими нормами и обозначаются $(\cdot,\cdot)_{H_i}$, $i = 1, 2$. Дальнейшие рассуждения используют следующий частный факт теории соболевских пространств ([3], с. 80).

Лемма 1. *Пространство $W^{2,2}(\Omega)$ вложено в $W^{1,4}(\Omega)$ и $C(\Omega)$, причем операторы вложения усиленно непрерывны.*

Пусть K — множество тех элементов пространства $H = H_1 \times H_2$, для которых выполнено условие непроникновения. Потребуем, чтобы $a, b, d \in C^{(1)}(\Omega)$. Тогда в силу леммы 1 неравенства (3) и (4), определяющие множество K, имеют смысл в H. При этом неравенство (3) понимается в смысле непрерывных функций, а неравенство (4) определено как для элементов пространства $W^{1,2}(\Omega)$.

Лемма 2. *Множество K является выпуклым и замкнутым.*

Доказательство следует из линейности операторов $N_1(\mathbf{u})$ и $N_2(\mathbf{u})$, определенных в условиях (3) и (4).

Определение. Обобщенным решением задачи о равновесии пологой оболочки с препятствием называется вектор-функция $\mathbf{u}_* = (u_*,\, v_*,\, w_*) \in K$, минимизирующая на K функционал $I(\mathbf{u})$.

Данное определение имеет смысл, если функционал $I(\mathbf{u})$ принимает конечные значения на элементах пространства H. Предполагается, что $k_1, k_2 \in L^2(\Omega)$. Тогда $E(\mathbf{u})$ определен на H в силу неравенства Гёльдера и леммы 1. Для корректности определения на H функционала работы внешних сил требуется, чтобы он был непрерывным в этом пространстве. Для этого достаточно, чтобы внешняя нагрузка принадлежала классу нагрузок H^f, элементы которого удовлетворяют требованиям

$$f_i \in L^p(\Gamma), \quad F_i \in L^p(\Omega), \quad i = 1, 2, \quad p > 1,$$

а f_3, F_3 — конечные суммы δ-функций и функций из L^1 на Γ и Ω соответственно. Поэтому по теореме Рисса о представлении непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве существует единственный элемент $\mathbf{g}(\widetilde{\mathbf{g}}, g_3) \in H$ такой, что

$$A(\mathbf{u}) = (\widetilde{\mathbf{g}}, \widetilde{\mathbf{u}})_{H_1} + (g_3, w)_{H_2}$$

для любого $\mathbf{u} \in H$.

4. Разрешимость задачи. Для формулировки основной теоремы существования вводится константа

$$c_* = \sqrt{2} \sup_M \left| B \iint_\Omega [(u_x + \nu v_y)(w_x^2 + \nu w_y^2) + (v_y + \nu u_x)(w_y^2 + \nu w_x^2) + (1-\nu)(u_y + v_x) w_x w_y] dx\, dy \right|,$$

где $M = \{\mathbf{u} \in H : \|\mathbf{u}\|_H = 1,\ \|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{H_1}^2 \geqslant 1/2\}$. Согласно лемме 1 c_* — конечная константа.

Теорема. *Пусть для характеристик оболочки и препятствия выполняется* $a, b, d \in C^{(1)}(\Omega)$, $k_1, k_2 \in L^2(\Omega)$, *внешняя нагрузка принадлежит классу* H^f *и* $\|\widetilde{\mathbf{g}}\|_{H_1} < c_*^{-1}$. *Тогда существует по меньшей мере одно обобщенное решение нелинейной задачи равновесия пологой оболочки с препятствием.*

Для доказательства теоремы необходимо убедиться в существовании минимума функционала $I(\mathbf{u})$ на K. Для этого на первом этапе с помощью теоремы Цитланадзе (см., напр, [9], с. 269) о минимуме слабо непрерывного растущего функционала на гильбертовом пространстве показывается существование минимума функционала $I(\mathbf{u})$ на H, затем — существование его минимума на подмножестве K.

Доказательство теоремы существования основано на следующих четырех леммах, в которых предполагается, что выполнены условия этой теоремы.

Лемма 3. *Функционал полной энергии деформированной оболочки в пространстве* H *имеет вид*

$$I(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|_H^2 + \Phi(\mathbf{u}) - (\mathbf{g}, \mathbf{u})_H. \tag{5}$$

Лемма 4. *Функционал* $\Phi(\mathbf{u})$ *является слабо непрерывным на* H.

Лемма 5. *Пусть* $\|\widetilde{\mathbf{g}}\|_{H_1} < c_*^{-1}$. *Тогда функционал* $I(\mathbf{u})$ *является растущим на* H, *т. е.*

$$I(\mathbf{u}) \to \infty \quad \text{при} \quad \|\mathbf{u}\|_H \to \infty.$$

Лемма 6. *Если выполнены условия теоремы разрешимости, то существует элемент* $\mathbf{u}_* \in K$, *минимизирующий на* K *функционал* $I(\mathbf{u})$.

Доказательство леммы 3. Представление (5) справедливо в силу определения нормы пространства H. $\square$

Доказательство леммы 4. Пусть последовательность $\{\mathbf{u}_n\}$ слабо сходится к $\mathbf{u}_0$ в H. Требуется доказать, что

$$|\Phi(\mathbf{u}_n) - \Phi(\mathbf{u}_0)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В дальнейшем символ “$\rightharpoonup$” означает слабую сходимость в функциональных пространствах или сходимость числовых последовательностей, а символ “$\Rightarrow$” — сильную сходимость. Обозначение $\cdot_{,i}$ соответствует дифференцированию по x_i, $i = 1, 2$, где $x_1 = x$, $x_2 = y$.

Вследствие леммы 1 справедливы соотношения

$$k_i w_n \Rightarrow k_i w_0, \quad w_{n,i} w_{n,j} \Rightarrow w_{0,i} w_{0,j} \quad \text{в} \quad L^2(\Omega), \quad i, j = 1, 2.$$

Следовательно, $\Phi(\mathbf{u}_n)$ состоит из слагаемых вида $(u_{n,i}, \xi_n)_{L^2}$, $(v_{n,i}, \eta_n)_{L^2}$ и $(\xi_n, \eta_n)_{L^2}$, где $\xi_n \Rightarrow \xi_0$, $\eta_n \Rightarrow \eta_0$ в $L^2(\Omega)$. Тогда применение неравенства

$$|(a_1, b_1)_{L^2} - (a_2, b_2)_{L^2}| \leqslant |(a_1, b_1 - b_2)_{L^2}| + |(a_1 - a_2, b_1)_{L^2}|, \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in L^2,$$

неравенства Шварца и использование линейности по u функционала $(u_{,i}, \xi_0)_{L^2}$ завершают доказательство.

Доказательство леммы 5 повторяет практически без изменений соответствующие рассуждения из [5]. $\square$

Доказательство леммы 6. Справедливость лемм 4 и 5 означает выполнение условий теоремы Цитланадзе. Поэтому существует конечное значение $\inf\limits_{\mathbf{u} \in H} I(\mathbf{u})$. Но тогда существует и конечное $d = \inf\limits_{\mathbf{u} \in K} I(\mathbf{u})$. По лемме 5 последовательность $\{\mathbf{u}_n\}$, минимизирующая функционал $I(\mathbf{u})$ на K, ограничена в H. Поэтому она содержит слабосходящуюся в H подпоследовательность. Переобозначим ее через $\{\mathbf{u}_n\}$. По определению $\{\mathbf{u}_n\}$ выполняется неравенство

$$d \leqslant I(\mathbf{u}_n) < d + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тогда в силу правила параллелограмма и выпуклости множества K для произвольных n и m справедливы соотношения

$$\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_m\|_H^2 = 2\|\mathbf{u}_n\|_H^2 + 2\|\mathbf{u}_m\|_H^2 - 4\left\|\frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_m}{2}\right\|_H^2 =$$
$$= 2I(\mathbf{u}_n) + 2I(\mathbf{u}_m) - 4I\left(\frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_m}{2}\right) + 4\Phi\left(\frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_m}{2}\right) - 2\Phi(\mathbf{u}_n) - 2\Phi(\mathbf{u}_m) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{n} + \frac{2}{m} + 4\Phi\left(\frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_m}{2}\right) - 2\Phi(\mathbf{u}_n) - 2\Phi(\mathbf{u}_m).$$

Переход к пределу в полученном неравенстве при $n, m \to \infty$ в силу леммы 4 ведет к фундаментальности последовательности $\{\mathbf{u}_n\}$. Тогда в силу замкнутости множества K найдется $\mathbf{u}_* \in K$, для которого $I(\mathbf{u}_*) = d$.

Литература

1. Хлуднев А.М. *Существование и регулярность решения односторонних краевых задач линейной теории пологих оболочек* // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. – № 11. – С. 1968–1975.
2. Львов Г.И. *Вариационная постановка контактной задачи для линейноупругих и физически нелинейных пологих оболочек* // ПММ. – 1982. – Т.46. – № 5. – С. 841–846.
3. Vorovich I.I. *Nonlinear theory of shallow shells.* – Springer-Verlag, 1999. – 390 p.
4. Ворович И.И., Лебедев Л.П. *О существовании решений в нелинейной теории пологих оболочек* // ПММ. – 1972. – Т. 36. – № 4. – С. 691–704.
5. Ворович И.И., Лебедев Л.П. *О разрешимости нелинейной задачи равновесия пологой оболочки* // ПММ. – 1988. – Т. 52. – № 5. – С. 814–820.
6. Власов В.З. *Общая теория оболочек и ее приложение в технике.* –М.–Л.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.
7. Lebedev L.P., Vorovich I.I., Gladwell G.M.L. *Functional analysis*; *Applications in mechanics and inverse problems.* – Kluwer Acad. Publ., 1996. – 248 p.
8. Лебедев Л.П. *О равновесии свободной нелинейной пластины* // ПММ. – 1980. – Т. 44. – № 1. – С. 161–165.
9. Ворович И.И., Лебедев Л.П. *Функциональный анализ.* – М.: Вузовская книга, 2000. – 320 с.

Ростовский государственный университет

Поступила 19.07.2002