

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Институт вычислительной математики и информационных технологий



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор  
по образовательной деятельности КФУ  
Проф. Таюрский Д.А.

" " 20\_\_ г.

**Программа дисциплины**  
Кратные интегралы и ряды Б1.Б.7

Направление подготовки: 02.03.02 - Фундаментальная информатика и информационные технологии

Профиль подготовки: Системный анализ и информационные технологии

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очное

Язык обучения: русский

**Автор(ы):**

Турилова Е.А.

**Рецензент(ы):**

Андранинова А.А.

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий(ая) кафедрой: Турилова Е. А.

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " 201 \_\_\_\_ г

Учебно-методическая комиссия Института вычислительной математики и информационных технологий:

Протокол заседания УМК № \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " 201 \_\_\_\_ г

Регистрационный №

Казань  
2016

## **Содержание**

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля
4. Структура и содержание дисциплины/ модуля
5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов
7. Литература
8. Интернет-ресурсы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля согласно утвержденному учебному плану

Программу дисциплины разработал(а)(и) заведующий кафедрой, к.н. (доцент) Турилова Е.А. кафедра математической статистики отделение прикладной математики и информатики , Ekaterina.Turilova@kpfu.ru

## 1. Цели освоения дисциплины

"Кратные интегралы и ряды" является продолжением курсов "Математический анализ I" и "Математический анализ II". В рамках этого курса предполагается рассмотреть такие его разделы, как теория функциональных последовательностей и функциональных рядов, кратные и криволинейные интегралы, теория векторного поля, ряды Фурье.

## 2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы высшего профессионального образования

Данная учебная дисциплина включена в раздел " Б1.Б.7 Дисциплины (модули)" основной образовательной программы 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии и относится к базовой (общепрофессиональной) части. Осваивается на 2 курсе, 3 семестр.

Данная дисциплина относится к общепрофессиональным дисциплинам.

Читается на 2 курсе в 3 семестре для студентов обучающихся по направлению "Фундаментальная информатика и информационные технологии".

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины /модуля

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ОПК-1 (профессиональные компетенции)	способностью использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с фундаментальной информатикой и информационными технологиями
ПК-1 (профессиональные компетенции)	способностью собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям
ПК-11 (профессиональные компетенции)	способностью составлять и контролировать план выполняемой работы, планировать необходимые для выполнения работы ресурсы, оценивать результаты собственной работы
ПК-2 (профессиональные компетенции)	способностью понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат, фундаментальные концепции и системные методологии, международные и профессиональные стандарты в области информационных технологий
ПК-4 (профессиональные компетенции)	способностью решать задачи профессиональной деятельности в составе научно-исследовательского и производственного коллектива

В результате освоения дисциплины студент:

1. должен знать:

- понятия функциональных рядов, понятия теории кратных интегралов, а также понятия Рядов Фурье

2. должен уметь:

- применять изучаемые понятия и теории при решении практических задач

3. должен владеть:

- теоретическими знаниями по теории функциональных последовательностей и функциональных рядов и практическими навыками по определению их сходимости

- теоретическими знаниями по теории кратных,

криволинейных и поверхностных интегралов, теории собственных интегралов, зависящие от параметра, и практическими навыками их вычисления

- теорией рядов Фурье и методами исследования их сходимости.

- применять полученные знания в своей профессиональной деятельности

**4. Структура и содержание дисциплины/ модуля**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных(ые) единиц(ы) 216 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины зачет и экзамен в 3 семестре.

Суммарно по дисциплине можно получить 100 баллов, из них текущая работа оценивается в 50 баллов, итоговая форма контроля - в 50 баллов. Минимальное количество для допуска к зачету 28 баллов.

86 баллов и более - "отлично" (отл.);

71-85 баллов - "хорошо" (хор.);

55-70 баллов - "удовлетворительно" (удов.);

54 балла и менее - "неудовлетворительно" (неуд.).

**4.1 Структура и содержание аудиторной работы по дисциплине/ модулю**  
**Тематический план дисциплины/модуля**

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Числовые ряды	3		5	0	9	письменное домашнее задание
2.	Тема 2. Функциональные последовательности	3		3	0	3	письменное домашнее задание
3.	Тема 3. Функциональные ряды	3		3	0	5	письменное домашнее задание
4.	Тема 4. Степенные ряды	3		4	0	7	контрольная работа письменное домашнее задание

N	Раздел Дисциплины/ Модуля	Семестр	Неделя семестра	Виды и часы аудиторной работы, их трудоемкость (в часах)			Текущие формы контроля
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
5.	Тема 5. Мера Жордана	3		6	0	0	письменное домашнее задание
6.	Тема 6. Кратные интегралы	3		6	0	12	письменное домашнее задание
7.	Тема 7. Криволинейные и поверхностные интегралы	3		7	0	12	письменное домашнее задание
8.	Тема 8. Ряды Фурье: основные понятия	3		2	0	6	контрольная работа письменное домашнее задание
	Тема . Итоговая форма контроля	3		0	0	0	экзамен зачет
	Итого			36	0	54	

## 4.2 Содержание дисциплины

### Тема 1. Числовые ряды

#### лекционное занятие (5 часа(ов)):

Числовые ряды: определение, арифметические свойства, критерий Коши, необходимое условие сходимости. Ряд Лейбница. Признаки сходимости знакопостоянных рядов. Абсолютно сходящиеся ряды. Признаки Абеля и Дирихле. Связь несобственных интегралов с рядами. Интегральный признак сходимости ряда.

#### лабораторная работа (9 часа(ов)):

Исследование числовых рядов от знакопостоянных функций на сходимость, исследование на абсолютную сходимость, исследование на условную сходимость

### Тема 2. Функциональные последовательности

#### лекционное занятие (3 часа(ов)):

Понятие функциональной последовательности, равномерная и по-точечная сходимость, критерий равномерной сходимости, свойства равномерно сходящихся последовательностей

#### лабораторная работа (3 часа(ов)):

Исследование функциональных последовательностей на равномерную сходимость

### Тема 3. Функциональные ряды

#### лекционное занятие (3 часа(ов)):

Равномерная сходимость функциональных рядов: критерий Коши, признак Вейерштрасса, признаки Дирихле и Абеля. Операции над функциональными рядами.

#### лабораторная работа (5 часа(ов)):

Исследование функциональных рядов на равномерную сходимость, действия с функциональными рядами

### Тема 4. Степенные ряды

### **лекционное занятие (4 часа(ов)):**

Степенные ряды: первая теорема Абеля, следствие; теорема о существовании радиуса сходимости степенного ряда; теорема Коши-Адамара; свойства степенных рядов; вторая теорема Абеля; интегрирование и дифференцирование степенного ряда.

### **лабораторная работа (7 часа(ов)):**

Нахождение радиуса сходимости степенного ряда, нахождение области сходимости, действия со степенными рядами, разложение функций в степенной ряд.

## **Тема 5. Мера Жордана**

### **лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Элементарные множества и их свойства. Мера на классе элементарных множеств: корректность, свойства. Измеримые по Жордану множества. Множества жордановой меры нуль, их свойства. Критерий измеримости по Жордану. Свойства измеримых по Жордану множеств, измеримость криволинейной трапеции.

## **Тема 6. Кратные интегралы**

### **лекционное занятие (6 часа(ов)):**

Определение кратного интеграла. . Связь между интегрируемостью и ограниченностью. Критерии интегрируемости. Свойства кратного интеграла (арифметические, связанные с неравенствами, аддитивность). Теорема о среднем. Связь кратного интеграла с повторным. Теорема о замене переменных в кратном интеграле. Геометрические приложения .

### **лабораторная работа (12 часа(ов)):**

Расстановка пределов и смена порядка интегрирования, замена переменных, переход к полярным и сферическим координатам. Вычисление кратных интегралов, Вычисление объемов и площадей с помощью кратных интегралов.

## **Тема 7. Криволинейные и поверхностные интегралы**

### **лекционное занятие (7 часа(ов)):**

Гладкие кривые. Криволинейный интеграл первого и второго рода:определение, свойства. Потенциальные поля. Формула Грина. Понятие поверхностного интеграла первого и второго рода

### **лабораторная работа (12 часа(ов)):**

Вычисление криволинейных интегралов первого и второго рода, вычисление поверхностных интегралов первого и второго рода, их приложения

## **Тема 8. Ряды Фурье: основные понятия**

### **лекционное занятие (2 часа(ов)):**

Ряды Фурье в унитарных пространствах: основные понятия. Тригонометрический ряд Фурье

### **лабораторная работа (6 часа(ов)):**

Разложение функций в тригонометрический ряд Фурье.

## **4.3 Структура и содержание самостоятельной работы дисциплины (модуля)**

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
1.	Тема 1. Числовые ряды	3		подготовка домашнего задания	11	домашнее задание
2.	Тема 2. Функциональные последовательности	3		подготовка домашнего задания	11	домашнее задание
3.	Тема 3. Функциональные ряды	3		подготовка домашнего задания	11	домашнее задание

N	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды самостоятельной работы студентов	Трудоемкость (в часах)	Формы контроля самостоятельной работы
4.	Тема 4. Степенные ряды	3		подготовка домашнего задания	8	домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	4	контрольная работа
5.	Тема 5. Мера Жордана	3		подготовка домашнего задания	12	домашнее задание
6.	Тема 6. Кратные интегралы	3		подготовка домашнего задания	12	домашнее задание
7.	Тема 7. Криволинейные и поверхностные интегралы	3		подготовка домашнего задания	11	домашнее задание
8.	Тема 8. Ряды Фурье: основные понятия	3		подготовка домашнего задания	6	домашнее задание
				подготовка к контрольной работе	4	контрольная работа
	Итого				90	

## 5. Образовательные технологии, включая интерактивные формы обучения

Обучение происходит в форме лекционных и практических занятий, а также самостоятельной работы студентов.

Теоретический материал излагается на лекциях. Причем конспект лекций, который остается у студента в результате прослушивания лекции не может заменить учебник. Его цель - формулировка основных утверждений и определений. Прослушав лекцию, полезно ознакомиться с более подробным изложением материала в учебнике. Список литературы разделен на две категории: необходимый для сдачи экзамена и зачета минимум и дополнительная литература.

Изучение курса подразумевает не только овладение теоретическим материалом, но и получение практических навыков для более глубокого понимания разделов дисциплины "Кратные интегралы и ряды" на основе решения задач и упражнений, иллюстрирующих доказываемые теоретические положения, а также развитие абстрактного мышления и способности самостоятельно доказывать частные утверждения.

Самостоятельная работа предполагает выполнение домашних работ. Практические задания, выполненные в аудитории, предназначены для указания общих методов решения задач определенного типа. Закрепить навыки можно лишь в результате самостоятельной работы.

Кроме того, самостоятельная работа включает подготовку к экзамену и зачету. При подготовке к сдаче экзамена и зачета весь объем работы рекомендуется распределять равномерно по дням, отведенным для подготовки к экзамену и зачету, контролировать каждый день выполнения работы. Лучше, если можно перевыполнить план. Тогда всегда будет резерв времени.

## **6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов**

### **Тема 1. Числовые ряды**

домашнее задание , примерные вопросы:

Вычисление суммы числового ряда по определению. Исследование знакопостоянных и знакопеременных числовых рядов на сходимость.

### **Тема 2. Функциональные последовательности**

домашнее задание , примерные вопросы:

Исследование на равномерную сходимость функциональных последовательностей.

### **Тема 3. Функциональные ряды**

домашнее задание , примерные вопросы:

Исследование на равномерную сходимость функциональных рядов

### **Тема 4. Степенные ряды**

домашнее задание , примерные вопросы:

Нахождение области сходимости степенного ряда, разложение функций в степенной ряд  
контрольная работа , примерные вопросы:

1. Исследовать числовой знакопостоянный ряд на сходимость. 2. Исследование числового ряда на абсолютную и условную сходимость. 3. Исследование на равномерную сходимость функциональной последовательности. 4. Исследование на равномерную сходимость функционального ряда. 5. Нахождение области сходимости степенного ряда. 6. Разложение функции в степенной ряд

### **Тема 5. Мера Жордана**

домашнее задание , примерные вопросы:

Решение теоретических задач на измеримость множеств по Жордану

### **Тема 6. Кратные интегралы**

домашнее задание , примерные вопросы:

Расстановка пределов и смена порядка интегрирования в двойных и тройных интегралах, замена переменных, переход к полярным и сферическим координатам. Вычисление кратных интегралов, Вычисление объемов и площадей с помощью двойных и тройных интегралов.

### **Тема 7. Криволинейные и поверхностные интегралы**

домашнее задание , примерные вопросы:

Вычисление криволинейных интегралов первого и второго рода, вычисление поверхностных интегралов первого и второго рода.

### **Тема 8. Ряды Фурье: основные понятия**

домашнее задание , примерные вопросы:

Разложение функций в тригонометрический ряд Фурье

контрольная работа , примерные вопросы:

1. Смена порядка интегрирования в двойном интеграле 2. Вычисление объема с помощью двойного интеграла 3. Вычисление объема с помощью тройного интеграла 4. Вычисление криволинейного интеграла 5. Вычисление поверхностного интеграла

### **Тема . Итоговая форма контроля**

Примерные вопросы к зачету и экзамену:

Числовые ряды: определение, арифметические свойства, критерий Коши, необходимое условие сходимости. Ряд Лейбница. Признаки сходимости знакопостоянных рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши, признак Раабе. Абсолютно сходящиеся ряды. Признаки Абеля и Дирихле. Связь несобственных интегралов с рядами. Интегральный признак сходимости ряда.

Равномерная сходимость функциональных последовательностей, критерий равномерной сходимости, непрерывность предельной функции. Равномерная сходимость функциональных рядов: критерий Коши, признак Вейерштрасса, признаки Дирихле и Абеля. Операции над функциональными рядами. Степенные ряды: первая теорема Абеля, формулы для нахождения радиуса сходимости. Вторая теорема Абеля. Дифференцирование степенного ряда. Ряд Тейлора.

Элементарные множества и их свойства. Мера на классе элементарных множеств: корректность, свойства. Измеримые по Жордану множества. Множества жордановой меры нуль, их свойства. Критерий измеримости по Жордану. Свойства измеримых по Жордану множеств, измеримость криволинейной трапеции.

Определение кратного интеграла. Невырожденные множества. Невырожденность открытого измеримого множества. Связь между интегрируемостью и ограниченностью. Критерии интегрируемости. Эквивалентность интегрируемости функции и интегрируемости ее продолжения на замыкание. Свойства кратного интеграла (арифметические, связанные с неравенствами, аддитивность). Теорема о среднем. Связь кратного интеграла с повторным (2 случая). Изменение площади. Теорема о замене переменных в кратном интеграле.

Геометрические приложения (площадь плоского множества, объем, площадь поверхности).

Гладкие кривые. Криволинейный интеграл первого рода. Криволинейный интеграл второго рода: задача, приводящая к понятию интеграла, определение, свойства. Потенциальные поля. Ориентация плоской области. Формула Грина.

## 7.1. Основная литература:

1. Анчиков, Анатолий Михайлович. Введение в математический анализ в вопросах и задачах [Текст : электронный ресурс] / А.М. Анчиков, Р.Л. Валиуллин, Р.А. Даишев ; Казан. гос. ун-т, Физ. фак. ? Электронные данные (1 файл: 0,35 Мб) .? (Казань : Научная библиотека Казанского федерального университета, 2014) .? Загл. с экрана .? Режим доступа: открытый. <URL:<http://libweb.ksu.ru/ebooks/publicat/0-759223.pdf>>.

2. Шерстнев, Анатолий Николаевич (д-р физ.-мат. наук ; 1938 -) .

Конспект лекций по математическому анализу [Текст: электронный ресурс] / А. Н. Шерстнев .? Изд. 5-е .? Электронные данные (1 файл: 2,66 Мб) .? (Казань : Казанский государственный университет, 2009) .? Загл. с экрана .? Режим доступа: открытый .?

[http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05\\_33\\_2009\\_000165.pdf](http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_33_2009_000165.pdf)

3. Дубровин В.Т. Лекции по математическому анализу. Часть 3. - Казань: Казан. ун-т, 2014. - 166 с.

<http://libweb.kpfu.ru/ebooks/publicat/0-805700.pdf>

4. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. - М.: Физматлит, 2010. - 496 с.

ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/2226/>

5. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды. - М.: Физматлит, 2009. - 504 с. ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/2227/>

## 7.2. Дополнительная литература:

1. Фигтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Часть 1. - СПб.: Лань, 2008. - 448 с. ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/410/>

2. Фигтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Часть 2. - СПб.: Лань, 2008. - 464 с. ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/411/>

3. Злобина С.В., Посицельская Л.Н. Математический анализ в задачах и упражнениях. - М.: Физматлит, 2009. - 360 с.

ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/2377/>

4. Зорич В.А. Математический анализ задач естествознания. - М.: МЦНМО, 2008. - 136 с.

ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/9343/>

5. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. - Сб.: Лань, 2005. - 160с

ЭБС "Лань": [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=377](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=377)

### **7.3. Интернет-ресурсы:**

Краткий справочник формул по математике - <http://matembook.chat.ru/>

математический портал - <http://www.allmath.com/>

Математический портал образовательных ресурсов - <http://www.math.ru/>

образовательный математический сайт. - <http://www.exponenta.ru/>

Образовательный портал по естественно-научным дисциплинам - <http://en.edu.ru/>

### **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины(модуля)**

Освоение дисциплины "Кратные интегралы и ряды" предполагает использование следующего материально-технического обеспечения:

Лекции и практические занятия по дисциплине проводятся в аудитории, оснащенной доской и мелом(маркером).

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебным планом по направлению 02.03.02 "Фундаментальная информатика и информационные технологии" и профилю подготовки Системный анализ и информационные технологии .

Автор(ы):

Турилова Е.А. \_\_\_\_\_  
"\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201 \_\_\_ г.

Рецензент(ы):

Андреанова А.А. \_\_\_\_\_  
"\_\_\_" \_\_\_\_\_ 201 \_\_\_ г.