МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОУ ВПО «ТАТАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

Часть I

Методическое пособие

КАЗАНЬ - 2010

Печатается по решению учебно-методической комиссии математического факультета Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета.

УДК 510.023 (075.8)
ББК 22.1я73
У91

Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа. Часть I. Методическое пособие. – Казань: ТГГПУ, 2009. – 115 с.

Данное методическое пособие предназначено для студентов бакалавров физико-математического образования, изучающих курс «Технология и методика решения задач повышенной трудности». Оно содержит справочный материал, содержащий необходимые формулы и теоретические сведения, рекомендации по решению ряда математических задач повышенной трудности, а также задачи для самостоятельной работы студентов.

Составитель – **Разумова О.В.**, кандидат педагогических наук,
доцент кафедры ТиМОМ

Научный редактор – **Садыкова Е.Р.**, кандидат педагогических наук,
доцент кафедры ТиМОМ

***Рецензенты*:** **Хабибуллина А.Я.**, кандидат педагогических наук,
учитель математики СОШ №75 г. Казани,
Ульяницкая Т.В., кандидат педагогических наук,
ст. преп. кафедры математики и методики ее преподавания
Института педагогики и психологии ТГГПУ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное методическое пособие входит в учебно-методический комплекс по курсу «Технология и методика решения задач повышенной трудности» (050200.62 «Бакалавр физико-математического образования» – профессиональный образовательный профиль подготовки математике). В пособии преследуются следующие цели: систематизировать школьный материал по математике (глава «Справочник»); рассмотреть рекомендации и ряд методов, используемых при решении задач повышенной трудности по основным разделам алгебры (глава «Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа»); предложить задачи для самостоятельной работы студентов (глава «Задания для самостоятельной работы»).

Наибольшее внимание автор старался уделить тому материалу, который имеет непосредственное отношение к практической части учебного курса.

Автор

I. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

Для решения задач повышенной трудности по алгебре и началам анализа необходимо уверенное владение следующими математическими понятиями и их свойствами:

1. Натуральные числа. Делимость. Простые и составные числа. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.

2. Целые, рациональные и действительные числа. Проценты. Модуль действительного числа, степень, корень, арифметический корень, логарифм. Синус, косинус, тангенс, котангенс числа (угла). Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс числа.

3. Числовые и буквенные выражения. Равенства и тождества.

4. Арифметическая и геометрическая прогрессии.

5. Функция. Способы задания функции. Свойства функции. Исследование функции. Линейная функция. Квадратичная функция. Обратная функция. Показательная функция. Логарифмическая функция. Тригонометрические функции. Построение графиков функций.

6. Уравнения и системы уравнений. Решения (корни) уравнения. Равносильность.

7. Неравенства. Системы и совокупности неравенств с одной переменной. Доказательства неравенств.

8. Тригонометрия. Тригонометрические уравнения и их системы. Нестандартные тригонометрические уравнения.

9. Начала анализа. Производная. Применение производной к исследованию функций. Применение производной в физике и геометрии. Первообразная. Интеграл.

II. СПРАВОЧНИК

В справочнике приводятся определения, теоремы, свойства и формулы, наиболее важные при решении задач повышенной трудности по математике.

Натуральные числа

Признак делимости на 2. Число делится на 2, если его последняя цифра чётная или нуль. В остальных случаях – не делится.

Признак делимости на 3. Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3. В остальных случаях – не делится.

Признак делимости на 4. Число делится на 4, если две его последние цифры нули или образуют число, делящееся на 4. В остальных случаях – не делится.

Признак делимости на 5. Число делится на 5, если его последняя цифра 0 или 5. В остальных случаях – не делится.

Признак делимости на 9. Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9. В остальных случаях – не делится.

Признак делимости на 10. Число делится на 10, если его последняя цифра нуль. В остальных случаях – не делится.

Примечание. Сформулированные признаки делимости являются необходимыми и достаточными.

Определение. Если натуральные числа n_1 и n_2 делятся на одно и то же натуральное число n, то число n называется *общим делителем* этих чисел. Наибольшее натуральное число, на которое делятся n_1 и n_2, называется *наибольшим общим делителем* этих чисел.

Определение. *Наименьшим общим кратным* двух натуральных чисел n_1 и n_2 называется наименьшее натуральное число, которое делится и на n_1 и n_2.

Для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел можно разложить каждое из них на простые множители и выписать те из них, которые входят в оба разложения, каждый из таких множителей взять с наименьшим показателем степени, с которым он входит в разложения данных чисел. Произведя умножение, получим наибольший общий делитель двух чисел.

Для нахождения наименьшего общего кратного двух чисел следует выписать все простые множители, входящие в состав хотя бы одного из разложений, каждый из множителей возвести в наибольшую из степеней, с которыми он входит в разложения данных чисел. Произведя умножение, получим наименьшее общее кратное двух чисел.

Целые, рациональные и действительные числа

Определение. *Разделить некоторое целое число a на натуральное число m с остатком* — значит найти два целых числа q и r таких, что справедливо равенство $a = mq + r$, причём число r удовлетворяет условию $0 \le r < m$. Если $r = 0$, то говорят, что целое число a делится нацело на натуральное число m.

Теорема. *Пусть a — любое целое число и m — любое натуральное число. Тогда существует единственная пара целых чисел q и r, удовлетворяющая условиям $a = mq + r$ и $0 \le r < m$.*

Следствия теоремы:

1. Любое чётное число a может быть записано в виде $a = 2q$, где q — некоторое целое число.

2. Любое нечётное число a может быть записано в виде $a = 2q + 1$, где q — некоторое целое число.

3. Любое целое число a, делящееся нацело на некоторое натуральное число k, может быть записано в виде $a = kq$, где q — некоторое целое число.

4. Любое целое число a, не делящееся нацело на некоторое натуральное число k, может быть записано в виде $a = kq + r$, где r — одно из чисел 1, 2, ..., $(k-1)$, а q — некоторое целое число.

Определение. Множество всех бесконечных десятичных дробей (с определёнными понятиями равенства, суммы и произведения этих чисел) называется *множеством действительных чисел*, а каждая бесконечная десятичная дробь, не оканчивающаяся бесконечной последовательностью девяток, называется *действительным числом*.

Определение. Для положительного действительного числа $a_0, a_1a_2...a_k...$ можно определить его *приближённое значение с недостатком* $a_k^- = a_0, a_1a_2...a_k$ и *приближённое значение с избытком* $a_k^+ = a_0, a_1a_2...a_k + 10^{-k}$, где k – натуральное число.

Определение. *Суммой* двух действительных чисел называется число, которое больше (или равно) суммы двух любых приближённых их значений с недостатком, но меньше (или равно) суммы двух любых приближённых их значений с избытком.

Определение. *Произведением* двух действительных положительных чисел называется число, которое больше или равно произведения двух любых приближённых значений с недостатком, но меньше или равно произведения двух любых приближённых их значений с избытком.

Формулы. Основные законы сложения и умножения действительных чисел:

1. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения);
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения);
3. $a\ b = b\ a$ (коммутативность умножения);
4. $(a\ b)c = a(b\ c)$ (ассоциативность умножения);
5. $(a + b)c = ac + bc$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

Определение. *Вычесть* из действительного числа a действительное число b — значит найти действительное число c такое, что $b + c = a$.

Определение. Разделить действительное число a на отличное от нуля действительное число b — значит найти действительное число d такое, что $bd = a$.

Формулы. Формулы сокращённого умножения:

$$1.\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$2.\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$3.\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$$
$$4.\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$5.\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$
$$6.\ (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3;$$
$$7.\ (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Определение. Два положительных действительных числа $a_0, a_1a_2...a_k...$ и $b_0, b_1b_2...b_k...$ *равны*, если $b_k = a_k$ для всех $k, \quad k = 0, 1, 2...$

Определение. Из двух положительных действительных чисел $a_0, a_1a_2...a_k...$ и $b_0, b_1b_2...b_k...$ первое *больше* второго, если либо $a_0 > b_0$, либо если $a_0 = b_0$, но $a_1 > b_1$, либо если найдется некоторое натуральное *n*, что $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, …, $a_n = b_n$, но $a_{n+1} > b_{n+1}$.

Определение. Два действительных числа $a_0, a_1a_2...a_k...$ и $b_0, b_1b_2...b_k...$ называются *противоположными*, если $b_k = a_k$ для всех $k, \quad k = 0, 1, 2...$

Формулы. Основные свойства числовых равенств и неравенств:

$$1.\ a = b, b = c \Rightarrow a = c;$$
$$2.\ a = b, c = d \Rightarrow a + c = b + d;$$
$$3.\ a = b, c = d \Rightarrow ac = bd;$$
$$4.\ a = b \Rightarrow a + c = b + c;$$
$$5.\ a = b \Rightarrow ac = bc \text{ } при \text{ } c \neq 0;$$
$$6.\ a > b, b > c \Rightarrow a > c;$$
$$7.\ a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d;$$
$$8.\ a > b > 0, c > d \Rightarrow ac > bd;$$
$$9.\ a > b \Rightarrow a + c > b + c;$$
$$10.\ a > b \Rightarrow \begin{cases} ac > bc, \text{ при } c > 0, \\ ac < bc, \text{ при } c < 0. \end{cases}$$

Характеристики функций действительного аргумента

Определение. *Функцией* (или *функциональной зависимостью*) называется закон, по которому каждому значению независимой переменной x из некоторого множества чисел, называемого *областью определения функции*, ставится в соответствие одно вполне определённое значение величины y. Совокупность значений, которые принимает зависимая переменная y, называется *областью значений функции*.

Определение. *Графиком функции* называется множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x; y)$, такими, что абсцисса x принимает все значения из области определения, а ордината y равна значению функции в точке x.

Определение. Функция $f(x)$ называется *чётной*, если для любого x из её области определения выполнено $f(-x) = f(x)$. Функция $f(x)$ называется нечётной, если для любого x из её области определения выполнено $f(-x) = -f(x)$.

Определение. Функцию $f(x)$ называют *периодической* с периодом $T > 0$, если для любого x, принадлежащего области определения функции, её значения в точках x, $x - T, x + T$ равны.

Определение. Функция $f(x)$ *возрастает* на некотором интервале I, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих интервалу I, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Определение. Функция $f(x)$ *убывает* на некотором интервале I, если для любых значений x_1 и x_2, принадлежащих интервалу I, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено $f(x_2) < f(x_1)$.

Определение. Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$, если для всех значений x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$. Точка x_0 называется *точкой максимума* функции

$f(x)$, если для всех значений x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

При описании функций принято указывать: 1) область определения (ООФ) функции; 2) область значений (ОЗФ) функции; 3) является ли функция периодической; 4) является ли функция чётной или нечётной; 5) точки пересечения графика с осями координат; 6) промежутки знакопостоянства; 7) интервалы возрастания и убывания; 8) абсциссы и ординаты точек экстремума; 9) наличие асимптот.

Функция $y=[x]$. Если $0 \le x < 1$, то $y=[x]=0$; если $1 \le x < 2$, то $y=[x]=1$; если $-1 \le x < 0$, то $y=[x]=-1$ и т.д. График функции $y=[x]$ изображен на рисунке 1.

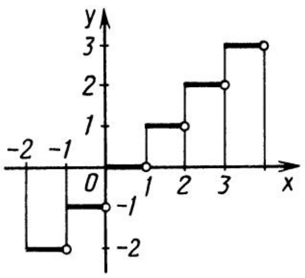


Рис. 1

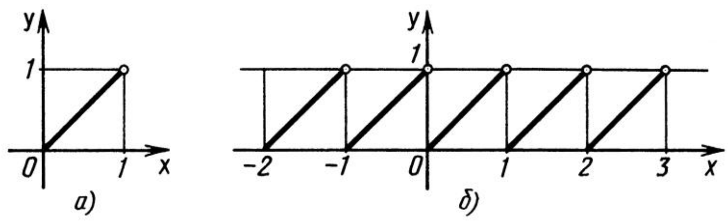


Рис. 2

Функция $y=\{x\}$. Для любого х выполняется двойное равенство $\{x-1\}=\{x\}=\{x+1\}$. Функция $y=\{x\}$ - периодическая с периодом T = 1. Если $0 \le x < 1$, то $[x]=0$, поэтому $\{x\}=x-[x]=x$. На рисунке 2, *а* изображен график функции $y=\{x\}$ на промежутке $[0;1)$, на рисунке 2, *б* – график функции $y=\{x\}$ на всей числовой прямой.

В таблице 1 приведены в кратком виде характеристики основных элементарных функций действительной переменной, в таблице 2 приведены графики этих функций.

Таблица 1.

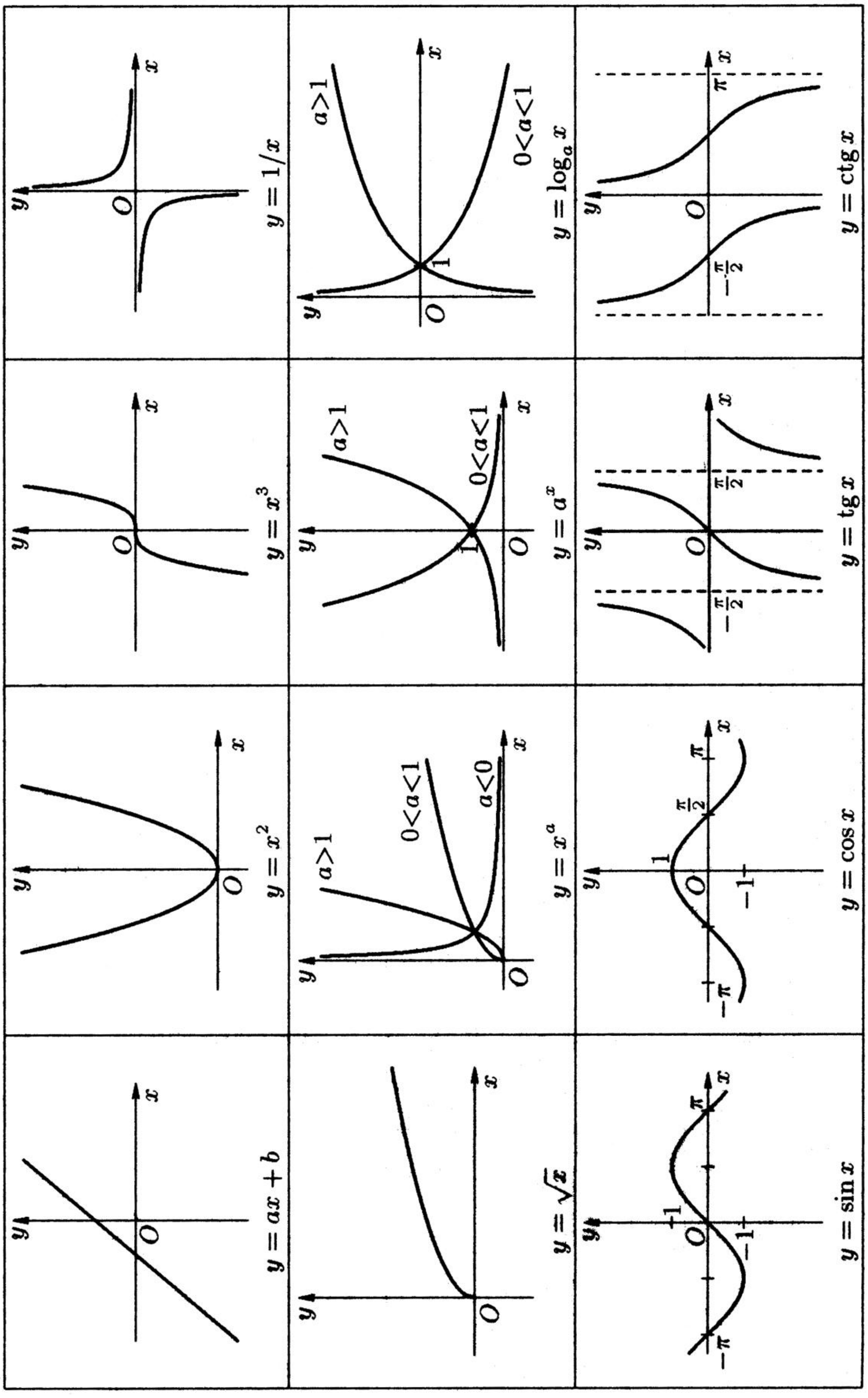
Характеристики элементарных функций

Функция	ООФ	ОЗФ	Период	Чётность	Корни	Монотонность*	Экстремумы*
$y=ax+b$	$(-\infty;\infty)$	$(-\infty;\infty)$	—	нечётная при $b=0$	$x=-\frac{a}{b}$	при $a<0$ убывает при $a>0$ возрастает	—
$y=x^2$	$(-\infty;\infty)$	$[0;\infty)$	—	чётная	$x=0$	убывает на $(-\infty;0]$ возрастает на $[0;\infty)$	min при $x=0$
$y=x^3$	$(-\infty;\infty)$	$(-\infty;\infty)$	—	нечётная	$x=0$	возрастает	—
$y=\frac{1}{x}$	$(-\infty;0)\cup(0;\infty)$	$(-\infty;0)\cup(0;\infty)$	—	нечётная	нет	убывает	—
$y=\sqrt{x}$	$[0;\infty)$	$[0;\infty)$	—	—	$x=0$	возрастает	min при $x=0$
$y=x^a$, $a>0$	$[0;\infty)$	$[0;\infty)$	—	—	$x=0$	возрастает	min при $x=0$
$y=x^a$, $a<0$	$(0;\infty)$	$(0;\infty)$	—	—	нет	убывает	—
$y=a^x$	$(-\infty;\infty)$	$(0;\infty)$	—	—	нет	при $0<a<1$ убывает при $a>1$ возрастает	—
$y=\log_a x$	$(0;\infty)$	$(-\infty;\infty)$	—	—	$x=1$	при $0<a<1$ убывает при $a>1$ возрастает	—
$y=\sin x$	$(-\infty;\infty)$	$[-1;1]$	2π	нечётная	$x=\pi k$	возрастает на $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ убывает на $[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$	max при $x=\frac{\pi}{2}$ min при $x=-\frac{\pi}{2}$
$y=\cos x$	$(-\infty;\infty)$	$[-1;1]$	2π	чётная	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$	убывает на $[0;\pi]$ возрастает на $[\pi;2\pi]$	max при $x=0$ min при $x=\pi$
$y=\operatorname{tg} x$	$x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$	$(-\infty;\infty)$	π	нечётная	$x=\pi k$	возрастает на $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$	—
$y=\operatorname{ctg} x$	$x\neq\pi k$	$(-\infty;\infty)$	π	нечётная	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$	убывает на $(0;\pi)$	—

*Интервалы монотонности и экстремумы периодических функций указаны на одном периоде.

Таблица 2.

Графики элементарных функций



В таблице 3 приведены в кратком виде характеристики обратных тригонометрических функций, в таблице 4 приведены графики этих функций.

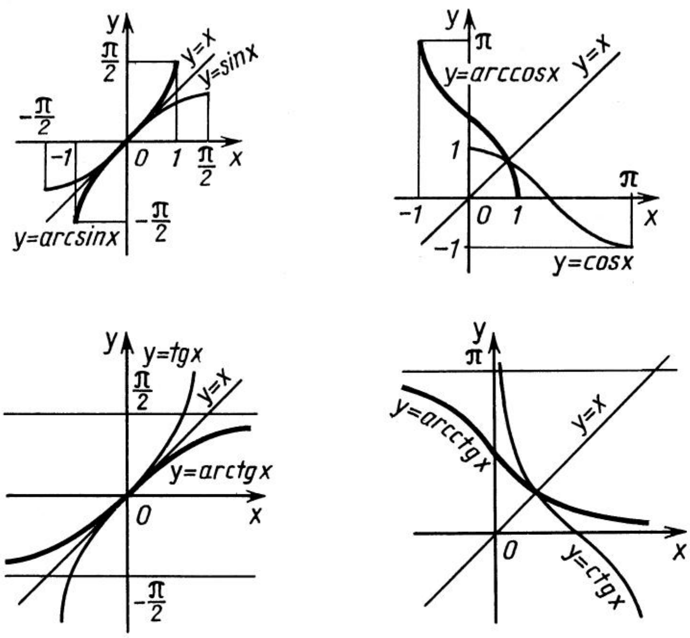
Таблица 3.

Характеристики обратных тригонометрических функций

Функция	**ООФ**	**ОЗФ**	**Чётность**	**Корни**	**Монотонность**
$y=\arcsin x$	$[-1;1]$	$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	нечётная	$x=0$	возрастает
$y=\arccos x$	$[-1;1]$	$[0;\pi]$	ни чётная, ни нечётная	$x=1$	убывает
$y=\operatorname{arc}tgx$	$(-\infty;\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$	нечётная	$x=0$	возрастает
$y=\operatorname{arc}ctgx$	$(-\infty;\infty)$	$(0;\pi)$	ни чётная, ни нечётная		убывает

Таблица 4.

Графики обратных тригонометрических функций



Определения некоторых элементарных функций и их свойства

Модуль действительного числа

Определение. *Абсолютной величиной* (или *модулем*) $|a|$ действительного числа a называется: само это число, если a — положительное число; нуль, если число a — нуль; число, противоположное числу a, если a — отрицательное число. Определение можно переписать в виде: $|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0; \\ 0, \text{ если } a = 0; \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$

Формулы. Свойства модуля действительного числа:

$$1. |a+b| \le |a| + |b|;$$

$$2. |ab| = |a| \cdot |b|;$$

$$3. \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|};$$

$$4. |a-b| \ge \big||a| - |b|\big|.$$

Степени и логарифмы действительных чисел

Определение. Если действительное число a взято множителем n раз (n — натуральное число, $n > 1$), то произведение $\underbrace{aa...a}_{n \text{ раз}}$ называют *степенью числа a с натуральным показателем n* и обозначают a^n.

Формулы. Свойства натуральных степеней действительных чисел:

$$1. r^m r^k = r^{m+k};$$

$$2. r_1^m r_2^m = \left(r_1 r_2\right)^m;$$

$$3. \left(r^k\right)^m = r^{km};$$

$$4. \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^k = \frac{r_1^k}{r_2^k}, \text{ если } r_2 \ne 0;$$

$$5. \frac{r^k}{r^m} = r^{k-m}, \text{ если } k > m, r \ne 0.$$

Определение. Пусть a — действительное число, n — натуральное число, тогда *степенью числа a с целым отрицательным показателем* $(-n)$ называют число $\frac{1}{a^n}$ и обозначают $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$. Нулевая и целая отрицательная степени числа нуль не определены.

Определение. Неотрицательное число b — такое, что его n-я степень есть данное действительное число a, т.е. $b^n=a$, называется *арифметическим корнем степени n* из числа a и обозначается $b=\sqrt[n]{a}$. В силу определения для любого действительного числа a выполнено равенство $\sqrt{a^2}=|a|$.

Теорема. *Для любого натурального числа n и любого неотрицательного числа a существует единственный арифметический корень степени n из числа a.*

Формулы. Свойства арифметических корней $(a\geq 0, b\geq 0)$:

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b};$$
$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[k]{b}=\sqrt[nk]{a^{n+k}};$$
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k};$$
$$\sqrt[nk]{a^k}=\sqrt[n]{a};$$
$$\sqrt[n]{a:b}=\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b};$$
$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[k]{b}=\sqrt[nk]{a^{k-n}};$$
$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nk]{a}.$$

Определение. Пусть a — положительное действительное число и дано $r=\frac{p}{q}$ — рациональное число, причем p — целое число, а q — натуральное число, $q>0$. Положительное число b такое, что $b=\sqrt[q]{a^p}$, называется *рациональной степенью числа a* и обозначается $b=a^r$.

Определение. Пусть a — отрицательное действительное число, $\frac{p}{q}$ — рациональное число, причём q — нечётное натуральное число, $q>0$. Тогда *рациональной степенью отрицательного числа a* называют число b такое, что $b = (-1)^{|p|}\sqrt[q]{|a|^p}$.

Определение. Пусть дано действительное число a и действительное (т.е. рациональное или иррациональное) число x. *Действительной степенью числа a* называют число $b = a^x$, определяемое следующим образом.

Пусть $a > 1$ и $x \geq 0$. Приближённые значения числа x с избытком и с недостатком обозначим соответственно x_k^+ и x_k^-. В этом случае число b таково, что для всех приближённых значений x_k^+ и x_k^- выполнено неравенство $a^{x_k^-} \leq b \leq a^{x_k^+}$. Если $0 < a < 1$ и $x > 0$, то b — такое число, что $a^{x_k^-} \geq b \geq a^{x_k^+}$.

Если $x < 0$, то b определяют равенством $b = \dfrac{1}{a^{|x|}}$.

Если $a = 1$, то для любого x определяют $a^x = 1$.

Формулы. Свойства действительных степеней положительных чисел:

$$1. (ab)^x = a^x b^x;$$
$$2. a^x a^y = a^{x+y};$$
$$3. (a / b)^x = a^x / b^x;$$
$$4. a^x : a^y = a^{x-y};$$
$$5. (a^x)^y = a^{xy}.$$

Теорема. *Для любой пары действительных чисел a и b таких, что $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ существует единственное число x такое, что $a^x = b$.*

Определение. Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, то действительное число x такое, что $a^x = b$ называется *логарифмом числа b по основанию a* и обозначается $x = \log_a b$. По определению логарифма выполнено: $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$.

Формула. Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$.

Формулы. Пусть даны положительные числа x, y, a, b, причем $a \neq 1$, $b \neq 1$ и произвольные действительные числа n и m. Тогда имеют место следующие свойства логарифмов:

$$1.\ \log_a xy = \log_a x + \log_a y;$$
$$2.\ \log_a x/y = \log_a x - \log_a y;$$
$$3.\ \log_a x^n = n\log_a x;$$
$$4.\ \log_{a^m} x^n = \frac{n}{m}\log_a x;$$
$$5.\ \log_{a^m} x^m = \log_a x;$$
$$6.\ \log_a b = \frac{1}{\log_a b;}$$
$$7.\ \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b};$$
$$8.\ \log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y;$$
$$9.\ a > 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x < y;$$
$$10.\ 0 < a < 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x > y.$$

Тригонометрические функции

Для того чтобы определить понятия тригонометрических функций, рассматривают единичный круг с центром в начале координат. Для любого действительного числа α можно провести радиус этого круга, образующий с осью Ox заданный угол α (положительным считается направление против хода часовой стрелки). Пусть конец единичного радиуса ON, задающего угол α, совпадает с точкой $Q(a;b)$ окружности; тогда координаты точки Q называют координатами конца радиуса, задающего угол α, и пишут $N(a;b)$.

Определение. Число, равное ординате конца единичного радиуса, задающего угол α, называется *синусом угла* α и обозначается $\sin\alpha$.

Определение. Число, равное абсциссе конца единичного радиуса, задающего угол α, называется *косинусом угла* α и обозначается $\cos\alpha$.

Определение. Число, равное отношению синуса угла α такого, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, к косинусу этого угла называется *тангенсом угла* α и обозначается $tg\alpha$.

Определение. Число, равное отношению косинуса угла α такого, что $\alpha \neq \pi k, k \in Z$, к синусу этого угла называется *котангенсом угла* α и обозначается $ctg\alpha$.

Формула. Основное тригонометрическое тождество. Для любого угла α справедливо равенство: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Формулы. Соотношения между функциями одного угла:

1. $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;
2. $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;
3. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$;
4. $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{1+ctg^2\alpha} = \dfrac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$;
5. $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+tg^2\alpha} = \dfrac{ctg^2\alpha}{1+ctg^2\alpha}$.

Формулы. Формулы сложения и вычитания:

1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;
2. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$;
3. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;
4. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$;
5. $tg(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$;
6. $tg(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}$.

Формулы. Формулы двойных, тройных и половинных углов:

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;

3. $tg 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$;

4. $ctg 2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$;

5. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

6. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

7. $tg 3\alpha = \dfrac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$;

8. $ctg 3\alpha = \dfrac{ctg^3\alpha - 3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha - 1}$;

9. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$;

10. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$;

11. $tg\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$;

12. $ctg\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Следствием формул 9 – 12 являются формулы понижения степени:

$9'.\ \sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{2}$;

$10'.\ \cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos\alpha}{2}$;

$11'.\ tg^2\alpha = \dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$;

$12'.\ ctg^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}$.

Формулы. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение:

1. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{a-\beta}{2};$

2. $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{a-\beta}{2};$

3. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{a-\beta}{2};$

4. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{a-\beta}{2};$

5. $\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(45^\circ-\alpha\right)=\sqrt{2}\sin\left(45^\circ+\alpha\right);$

6. $\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(45^\circ-\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(45^\circ+\alpha\right);$

7. $tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin\left(\alpha\pm\beta\right)}{\cos\alpha\cos\beta};$

8. $ctg\alpha\pm ctg\beta=\frac{\sin\left(\beta\pm\alpha\right)}{\sin\alpha\sin\beta};$

9. $tg\alpha+ctg\beta=\frac{\cos\left(\alpha-\beta\right)}{\cos\alpha\sin\beta};$

10. $tg\alpha-ctg\beta=\frac{\cos\left(\alpha+\beta\right)}{\cos\alpha\sin\beta};$

11. $tg\alpha+ctg\alpha=2\csc 2\alpha;$

12. $tg\alpha-ctg\alpha=-2ctg2\alpha;$

13. $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2};$

14. $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2};$

15. $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right);$

16. $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right);$

17. $1\pm tg\alpha=\frac{\sqrt{2}\sin\left(45^\circ\pm\alpha\right)}{\cos\alpha};$

18. $1\pm tg\alpha tg\beta=\frac{\cos\left(\alpha\mp\beta\right)}{\cos\alpha\cos\beta};$

19. $ctg\alpha ctg\beta\pm1=\frac{\cos\left(\alpha\mp\beta\right)}{\sin\alpha\sin\beta};$

$$20.\ 1-tg^2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha};$$

$$21.\ 1-ctg^2\alpha=-\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha};$$

$$22.\ tg^2\alpha-tg^2\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta};$$

$$23.\ ctg^2\alpha-ctg^2\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta};$$

$$24.\ tg^2\alpha-\sin^2\alpha=tg^2\alpha\sin^2\alpha;$$

$$25.\ ctg^2\alpha-\cos^2\alpha=ctg^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Формулы. Преобразование произведения в сумму:

1. $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];$
2. $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right];$
3. $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right].$

Формулы. Универсальная тригонометрическая подстановка:

1. $\sin\alpha=\dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}};$
2. $\cos\alpha=\dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}};$
3. $tg\alpha=\dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}.$

Формулы. Некоторые важные соотношения:

1. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+...+\sin n\alpha=\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}-\cos(2n+1)\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}};$

2. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+...+\cos n\alpha=\dfrac{\sin(2n+1)\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}};$

3. $\cos n\alpha=\cos^n\alpha-C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha+C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha-...;$

4. $\sin n\alpha=n\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha-...$

Формулы. Следствия из вышеперечисленных формул:

5. $\cos 3\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha;$
6. $\sin 3\alpha=3\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha;$
7. $\cos 4\alpha=\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha;$
8. $\sin 4\alpha=4\cos^3\alpha\sin\alpha-4\cos\alpha\sin^3\alpha.$

Формулы. Формулы приведения:

Любая тригонометрическая функция угла $90^\circ n+\alpha$ по абсолютной величине равна той же функции угла α, если число n – четное, и кофункции этого же угла, если число n – нечетное. При этом если функция угла $90^\circ n+\alpha$ положительна, когда α – острый положительный угол, то знаки обеих функций одинаковы; если отрицательна, то различны.

1. $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha;$
2. $\cos(-\alpha)=\cos\alpha;$
3. $tg(-\alpha)=-tg\alpha;$
4. $ctg(-\alpha)=-ctg\alpha;$
5. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha;$
6. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin\alpha;$
7. $tg\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp ctg\alpha;$
8. $ctg\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp tg\alpha;$
9. $\sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha;$
10. $\cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha;$
11. $tg(\pi\pm\alpha)=\pm tg\alpha;$
12. $ctg(\pi\pm\alpha)=\pm ctg\alpha;$
13. $\sin(2\pi k+\alpha)=\sin\alpha;$
14. $\cos(2\pi k+\alpha)=\cos\alpha;$
15. $tg(2\pi k+\alpha)=tg\alpha;$
16. $ctg(2\pi k+\alpha)=ctg\alpha.$

Обратные тригонометрические функции

Определение. *Арксинусом* числа a называется такое число α, принадлежащее отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a. Это число обозначают $\arcsin a$.

Определение. *Арккосинусом* числа a называется такое число α, принадлежащее отрезку $[0;\pi]$, косинус которого равен a. Это число обозначают $\arccos a$.

Определение. *Арктангенсом* числа a называется такое число α, принадлежащее интервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a. Это число обозначают $arctga$.

Определение. *Арккотангенсом* числа a называется такое число α, принадлежащее интервалу $(0;\pi)$, котангенс которого равен a. Это число обозначают $arcctga$.

Формулы. Соотношения прямых и обратных функций:

$$1.\ \sin(\arcsin a)=a;$$

$$2.\ \cos(\arccos a)=a;$$

$$3.\ tg(arctga)=a;$$

$$4.\ ctg(arcctga)=a;$$

$$5.\ \arcsin(\sin\alpha)=\alpha\ \text{ï ðè}\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];$$

$$6.\ \arccos(\cos\alpha)=\alpha\ \text{ï ðè}\ \alpha\in[0;\pi];$$

$$7.\ arctg(tg\alpha)=\alpha\ \text{ï ðè}\ \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right);$$

$$8.\ arcctg(ctg\alpha)=\alpha\ \text{ï ðè}\ \alpha\in(0;\pi).$$

Для произвольных значений угла α формулы 5-8 можно уточнить:

$$5'.\ \arcsin(\sin\alpha)=\begin{cases}\alpha-2\pi k,\ \alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right]\\(2k+1)\pi-\alpha,\ \alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right]\end{cases};$$

$$6'.\ \arccos(\cos\alpha)=\begin{cases}\alpha-2\pi k,\ \alpha\in\left[2\pi k;(2k+1)\pi\right]\\2\pi k-\alpha,\ \alpha\in\left[(2k-1)\pi;2\pi k\right]\end{cases};$$

$$7'.\ arctg(tg\alpha)=\alpha-\pi k,\ \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right);$$

$$8'.\ arcctg(ctg\alpha)=\alpha-\pi k,\ \alpha\in(\pi k;(k+1)\pi).$$

Формулы. Соотношения между функциями одного аргумента. В формулах 1, 2 самые правые равенства верны при $a\neq\pm1$.

$$1.\ \arcsin a=-\arcsin(-a)=\frac{\pi}{2}-\arccos a=arctg\frac{a}{\sqrt{1-a^2}};$$

$$2.\ \arccos a=\pi-\arccos(-a)=\frac{\pi}{2}-\arcsin a=arcctg\frac{a}{\sqrt{1-a^2}};$$

$$3.\ arctga=-arctg(-a)=\frac{\pi}{2}-arcctga=\arcsin\frac{a}{\sqrt{1+a^2}};$$

$$4.\ arcctga=\pi-arcctg(-a)=\frac{\pi}{2}-arctga=\arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Формулы 5 и 6 выполняются при $0\le a\le1$.

$$5.\ \arcsin a=\arccos\sqrt{1-a^2};$$

$$6.\ \arccos a=\arcsin\sqrt{1-a^2}.$$

Формула 7 выполняется при $a\in(0;+\infty)$.

$$7.\ arctga=arcctg\frac{1}{a}=\arcsin\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}};$$

$$8.\ \arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2};$$

$$9.\ arctga+arcctga=\frac{\pi}{2}.$$

Следующие формулы полезны для решения задач повышенной трудности:

$$\arcsin a+\arcsin b=\begin{cases}\arcsin\left(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}\right), a^2+b^2<1,\\ a^2+b^2\ge 1, ab<0;\\ \pm\left[-\pi-\arcsin\left(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}\right)\right], a^2+b^2>1, ab>0;\end{cases}$$

$$\arcsin a-\arcsin b=\begin{cases}\arcsin\left(a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}\right), a^2+b^2<1,\\ a^2+b^2\ge 1\, u\ ab>0;\\ \pm\left[-\pi-\arcsin\left(a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}\right)\right], a^2+b^2>1, ab<0;\end{cases}$$

В этих формулах нужно брать знак «+», если a положительно, и знак «–» – в противном случае.

Арифметическая и геометрическая прогрессии

Определение. *Арифметической прогрессией* называется такая числовая последовательность, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, постоянным для этой последовательности. Это число называется *разностью* прогрессии.

Формула. Общий член арифметической прогрессии равен

$$a_n=a_{n-1}+d=a_1+(n-1)d,\ n=2,3,\ldots$$

Формула. Сумма n первых членов арифметической прогрессии выражается формулой:

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n,\ n\in N.$$

Определение. *Геометрической прогрессией* называется такая числовая последовательность, в которой первый член отличен от нуля, а каждый из последующих равен предыдущему, умноженному на некоторое постоянное для данной последовательности число, отличное от нуля. Это число называется *знаменателем* прогрессии.

Формула. Общий член геометрической прогрессии равен

$$a_n=a_{n-1}q=a_1q^{n-1},\ n=2,3,\ldots$$

Формула. Сумма n первых членов геометрической прогрессии, знаменатель которой не равен 1, выражается формулой:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}, n \in N;$$

если знаменатель прогрессии равен единице, то

$$S_n = n \cdot a_1, n \in N.$$

Определение. Если каждый член (арифметической или геометрической) прогрессии больше предыдущего, то прогрессия называется возрастающей; если меньше предыдущего, то *убывающей*.

Определение. Геометрическая прогрессия называется *бесконечно убывающей*, если знаменатель прогрессии q по абсолютной величине меньше единицы. *Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии* называется число, к которому неограниченно приближается сумма n первых членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Формула. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $S = \frac{a_1}{1-q}$.

Уравнения

Определение. Пусть даны две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Если требуется найти все числа α из области, являющейся пересечением областей существования этих функций, для каждого из которых выполняется равенство $f(\alpha) = g(\alpha)$, то говорят, что требуется *решить уравнение* $f(x) = g(x)$.

Определение. *Областью допустимых значений* (ОДЗ) уравнения $f(x) = g(x)$ называется пересечение областей существования (областей определения) функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, т. е. множество всех числовых значений переменной x, при каждом из которых имеют смысл (определены) левая и правая части уравнения.

Определение. Любое число x, принадлежащее ОДЗ уравнения, называется *допустимым значением* для данного уравнения.

Определение. Число α, принадлежащее ОДЗ уравнения $f(x)=g(x)$ называется *решением (или корнем)* уравнения, если при подстановке этого числа вместо переменной x в уравнение получается верное числовое равенство $f(\alpha)=g(\alpha)$. Требование «решить уравнение $f(x)=g(x)$» означает «найти все его корни или доказать, что данное уравнение не имеет корней».

Определение. Пусть даны два уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ и $f_2(x)=g_2(x)$. Если каждый корень уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ является корнем уравнения $f_2(x)=g_2(x)$, то второе уравнение называется *следствием* первого уравнения. При переходе от уравнения к его следствию возможно приобретение корней, но не потеря корней.

Из определения следует, что если некоторое уравнение не имеет корней, то любое другое уравнение будет его следствием.

Примеры уравнений, являющихся следствием другого:

1. Пусть n — натуральное число, тогда уравнение $f^{2n}(x)=g^{2n}(x)$ является следствием уравнения $f(x)=g(x)$.

2. Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$, тогда уравнение $f(x)=g(x)$ является следствием уравнения $\log_a f(x)=\log_a g(x)$.

3. Уравнение $f(x)=g(x)\cdot\varphi(x)$ является следствием уравнения $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\varphi(x)$.

4. Уравнение $f(x)=g(x)$ является следствием уравнения $f(x)=g(x)+\varphi(x)+(-\varphi(x))$.

Таблица 5.

Решения простейших уравнений

Уравнение	Условие	Решение
1. $ax = b, \quad a \neq 0$	$b \in R$	$x = \frac{b}{a}$
2. $ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0$	$D > 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
	$D = 0$	$x = -\frac{b}{2a}$
	$D < 0$	корней нет
3. $\mid x \mid = b$	$b > 0$	$x_1 = b, \quad x_2 = -b$
	$b = 0$	$x = 0$
	$b < 0$	корней нет
4. $\sqrt{x} = b$	$b \geqslant 0$	$x = b^2$
	$b < 0$	корней нет
5. $x^{2m} = b, \quad m \in N$	$b > 0$	$x_1 = \sqrt[2m]{b}, \; x_2 = -\sqrt[2m]{b}$
	$b = 0$	$x = 0$
	$b < 0$	корней нет
6. $x^{2m+1} = b, \quad m \in N$	$b \in R$	$x = \sqrt[2m+1]{b}$
7. $a^x = b, \quad a > 0, \; a \neq 1$	$b > 0$	$x = \log_a b$
	$b \leqslant 0$	корней нет

Уравнение	Условие	Решение
8. $\log_a x = b,\ a>0,\ a\neq 1$	$b \in R$	$x = a^b$
9. $\sin x = b$	$b \in [-1;1]$ $b \notin [-1;1]$	$x=(-1)^n \arcsin b+\pi n,\ n\in Z$ корней нет
10. $\cos x = b$	$b \in [-1;1]$ $b \notin [-1;1]$	$x = \pm \arccos b + 2\pi n,\ n \in Z$ корней нет
11. $\operatorname{tg} x = b$	$b \in R$	$x = \operatorname{arctg} b + \pi n,\ n \in Z$
12. $\operatorname{ctg} x = b$	$b \in R$	$x = \operatorname{arcctg} b + \pi n,\ n \in Z$
13. $\arcsin x = b$	$\lvert b \rvert \leqslant \frac{\pi}{2}$ $\lvert b \rvert > \frac{\pi}{2}$	$x = \sin b$ корней нет
14. $\arccos x = b$	$b \in [0;\pi]$ $b \notin [0;\pi]$	$x = \cos b$ корней нет
15. $\operatorname{arctg} x = b$	$\lvert b \rvert < \frac{\pi}{2}$ $\lvert b \rvert \geqslant \frac{\pi}{2}$	$x = \operatorname{tg} b$ корней нет
16. $\operatorname{arcctg} x = b$	$b \in (0;\pi)$ $b \notin (0;\pi)$	$x = \operatorname{ctg} b$ корней нет

Определение. Пусть даны два уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ и $f_2(x)=g_2(x)$. Если каждый корень уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ является корнем уравнения $f_2(x)=g_2(x)$, и, наоборот, каждый корень второго уравнения является корнем первого, то эти уравнения называются *равносильными*. При переходе от одного уравнения к равносильному ему невозможны ни приобретение корней, ни потеря корней.

Из определения следует, что любые два уравнения, не имеющие корней, равносильны.

Определение. Пусть даны два уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ и $f_2(x)=g_2(x)$ и дано множество *M*, принадлежащее пересечению ОДЗ этих уравнений. Если каждый корень уравнения $f_1(x)=g_1(x)$, принадлежащий множеству *M*, является корнем уравнения $f_2(x)=g_2(x)$, и, наоборот, каждый корень второго уравнения, принадлежащий множеству *M*, является корнем первого, то эти уравнения называются *равносильными на множестве M*.

Определение. Пусть даны уравнения $f_1(x)=g_1(x)$, $f_2(x)=g_2(x)$, …, $f_n(x)=g_n(x)$. Через Q обозначим пересечение областей допустимых значений этих уравнений. Если требуется найти все числа α из области *Q*, каждое из которых является корнем хотя бы одного из этих уравнений или доказать, что таких чисел не существует, то говорят, что дана *совокупность уравнений*, и пишут $\left[\begin{array}{l} f_1(x)=g_1(x), \\ f_2(x)=g_2(x), \\ \quad\ldots \\ f_n(x)=g_n(x). \end{array}\right.$

Область Q называют *областью допустимых значений совокупности уравнений.* Число α называют *решением совокупности уравнений*, если оно является решением хотя бы одного уравнения совокупности и при этом все остальные уравнения имеют смысл (то есть α принадлежит ОДЗ совокупности).

Теорема. *Уравнение* $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)=0$ *равносильно совокупности уравнений* $f_1(x)=0,\ f_2(x)=0,\ldots,\ f_n(x)=0$.

Определение. Пусть даны уравнения $f_1(x)=g_1(x)$, $f_2(x)=g_2(x)$, …, $f_n(x)=g_n(x)$. Через Q обозначим пересечение областей допустимых значений этих уравнений. Если требуется найти все числа α из области *Q*, каждое из которых является корнем каждого из этих уравнений или доказать, что таких чисел не существует, то говорят, что дана *система уравнений*, и пишут $\begin{cases} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) = g_2(x), \\ \quad\quad \ldots \\ f_n(x) = g_n(x). \end{cases}$

Область Q называют *областью допустимых значений системы уравнений.* Число α, принадлежащее ОДЗ системы уравнений, называют *решением системы уравнений*, если оно является решением каждого из уравнений системы.

В таблице 6 приведены примеры равносильных переходов от уравнений к системам и совокупностям уравнений.

Таблица 6.

Примеры равносильных уравнений

Исходное уравнение	**Равносильное ему уравнение, либо совокупность уравнений, либо система уравнений**
$\lvert f(x)\rvert = g(x)$, где $f(x), g(x)$ - некоторые функции	1 вариант. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x); \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x); \\ f(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$ 2 вариант. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x); \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = -g(x); \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$ 3 вариант. $\begin{cases} g(x) \geq 0; \\ \left(f(x)\right)^2 = \left(g(x)\right)^2. \end{cases}$
$h\left(\lvert f(x)\rvert\right) = g(x)$, где $h(x), f(x), g(x)$ - некоторые функции	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h\left(f(x)\right) = g(x); \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} h\left(-f(x)\right) = g(x); \\ f(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$
$\lvert f(x)\rvert = \lvert g(x)\rvert$, где $f(x), g(x)$ - некоторые функции	$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x); \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$

$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$, где $f(x), g(x)$ - некоторые функции	1 вариант. $\begin{cases} f(x)=g(x); \\ f(x)\ge 0. \end{cases}$ 2 вариант. $\begin{cases} f(x)=g(x); \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)}=g(x)$, где $f(x), g(x)$ - некоторые функции	$\begin{cases} f(x)=g^2(x); \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$
$\log_{h(x)} f(x)=b$, где $f(x), h(x)$ - некоторые функции	$\begin{cases} f(x)=\left(h(x)\right)^b; \\ f(x)>0; \\ h(x)>0; \\ h(x)\ne 1. \end{cases}$
$\log_a f(x)=\log_a g(x), a>0, a\ne 1$, где $f(x), g(x)$ - некоторые функции	$\begin{cases} f(x)=g(x); \\ f(x)>0; \\ g(x)>0. \end{cases}$
$\log_{h(x)} f(x)=\log_{h(x)} g(x)$, где $f(x), g(x), h(x)$ - некоторые функции	$\begin{cases} f(x)=g(x); \\ f(x)>0; \\ g(x)>0; \\ h(x)>0; \\ h(x)\ne 1. \end{cases}$

Неравенства

Определение. Пусть даны функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Если требуется найти все числа α из области, являющейся пересечением областей существования этих функций, для каждого из которых выполняется неравенство $f(\alpha)>g(\alpha)$, то говорят, что требуется *решить неравенство* $f(x)>g(x)$.

Понятия области допустимых значений, допустимого значения решения, следствия, равносильности и равносильности на множестве *M*, а также совокупности и системы для неравенств вводятся аналогично определениям для уравнений.

В таблице 7 приведены решения простейших неравенств.

Таблица 7.

Решения простейших неравенств

Неравенство	Условие	Решение
1. $ax > b, \quad a > 0$	$b \in R$	$x \in \left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$
$a < 0$	$b \in R$	$x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$
2. $ax^2 + bx + c > 0, \ a > 0$	$D > 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)^{*)}$
	$D = 0$	$x \neq -\frac{b}{2a}$
	$D < 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$a < 0$	$D > 0$	$x \in (x_1; x_2)$
	$D \leqslant 0$	решений нет
3. $\lvert x \rvert > b$	$b \geqslant 0$	$x \in (-\infty; -b) \cup (b; +\infty)$
	$b < 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$
4. $\lvert x \rvert < b$	$b > 0$	$x \in (-b; b)$
	$b \leqslant 0$	решений нет
5. $\sqrt{x} > b$	$b \geqslant 0$	$x \in (b^2; +\infty)$
	$b < 0$	$x \in [0; +\infty)$
6. $\sqrt{x} < b$	$b > 0$	$x \in [0; b^2)$
	$b \leqslant 0$	решений нет

*) Здесь x_1 и x_2 — соответственно меньший и больший из корней квадратного трёхчлена, определяемых формулой

$$x_{1,\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac.$$

Неравенство	Условие	Решение
7. $x^{2m} > b, \quad m \in N$	$b \geqslant 0$	$x \in (-\infty; -\sqrt[2m]{b}) \cup (\sqrt[2m]{b}; +\infty)$
	$b < 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$
8. $x^{2m} < b, \quad m \in N$	$b > 0$	$x \in (-\sqrt[2m]{b}; \sqrt[2m]{b})$
	$b \leqslant 0$	решений нет
9. $x^{2m+1} > b, \ m \in N$	$b \in R$	$x \in (\sqrt[2m+1]{b}; +\infty)$
10. $x^{2m+1} < b, \ m \in N$	$b \in R$	$x \in (-\infty; \sqrt[2m+1]{b})$
11. $a^x > b, \quad a > 1$	$b > 0$	$x \in (\log_a b; +\infty)$
	$b \leqslant 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$0 < a < 1$	$b > 0$	$x \in (-\infty; \log_a b)$
	$b \leqslant 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$
12. $a^x < b, \quad a > 1$	$b > 0$	$x \in (-\infty; \log_a b)$
	$b \leqslant 0$	решений нет
$0 < a < 1$	$b > 0$	$x \in (\log_a b; +\infty)$
	$b \leqslant 0$	решений нет
13. $\log_a x > b, \ a > 1$	$b \in R$	$x \in (a^b; +\infty)$
$0 < a < 1$	$b \in R$	$x \in (0; a^b)$
14. $\log_a x < b, \ a > 1$	$b \in R$	$x \in (0; a^b)$
$0 < a < 1$	$b \in R$	$x \in (a^b; +\infty)$

В таблице 8 приведены решения простейших тригонометрических неравенств.

Таблица 8.

Решения простейших тригонометрических неравенств

Неравенство	Условие	Решение
1. $\sin x > b$	$b \geqslant 1$	корней нет
	$-1 \leqslant b < 1$	$x \in (\arcsin b + 2\pi n; -\arcsin b + \pi(2n+1))$
	$b < -1$	$x \in (-\infty; +\infty)$
2. $\sin x < b$	$b > 1$	$x \in (-\infty; +\infty)$
	$-1 < b \leqslant 1$	$x \in (-\arcsin b + \pi(2n-1); \arcsin b + 2\pi n)$
	$b \leqslant -1$	корней нет
3. $\cos x > b$	$b \geqslant 1$	корней нет
	$-1 \leqslant b < 1$	$x \in (-\arccos b + 2\pi n; \arccos b + 2\pi n))$
	$b < -1$	$x \in (-\infty; +\infty)$
4. $\cos x < b$	$b > 1$	$x \in (-\infty; +\infty)$
	$-1 < b \leqslant 1$	$x \in (\arccos b + 2\pi n; -\arccos b + 2\pi(n+1))$
	$b \leqslant -1$	корней нет
5. $\operatorname{tg} x > b$	$b \in R$	$x \in (\operatorname{arctg} b + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$
6. $\operatorname{tg} x < b$	$b \in R$	$x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} b + \pi n)$
7. $\operatorname{ctg} x > b$	$b \in R$	$x \in (\pi n; \operatorname{arcctg} b + \pi n)$
8. $\operatorname{ctg} x < b$	$b \in R$	$x \in (\operatorname{arcctg} b + \pi n; \pi(n+1))$

В таблице 9 приведены примеры равносильных переходов от неравенств к системам и совокупностям неравенств.

Таблица 9.

Примеры равносильных неравенств

Исходное неравенство	**Равносильное ему неравенство, либо совокупность неравенств, либо система неравенств**
$\lvert f(x)\rvert > g(x)$, где $f(x),\ g(x)$ - некоторые функции	$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x); \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$
$\lvert f(x)\rvert < g(x)$, где $f(x),\ g(x)$ - некоторые функции	$\begin{cases} f(x) < g(x); \\ -f(x) < g(x). \end{cases}$
$\lvert f(\lvert x\rvert)\rvert < g(x)$, где $f(x),\ g(x)$ - некоторые функции	1 вариант. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lvert f(x)\rvert < g(x); \\ x \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \lvert f(-x)\rvert < g(x); \\ x < 0. \end{cases} \end{array}\right.$ 2 вариант. $\begin{cases} f(\lvert x\rvert) < g(x); \\ f(\lvert x\rvert) > -g(x). \end{cases}$
$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)},\ n \in Z$, где $f(x),\ g(x)$ - некоторые функции	$\begin{cases} f(x) \ge 0; \\ f(x) < g(x). \end{cases}$
$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)},\ n \in Z$, где $f(x),\ g(x)$ - некоторые функции	$f(x) < g(x)$
$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x),\ n \in Z$, где $f(x),\ g(x)$ - некоторые функции	$\begin{cases} f(x) \ge 0; \\ g(x) > 0; \\ f(x) < g^{2n}(x). \end{cases}$
$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x),\ n \in Z$, где $f(x),\ g(x)$ - некоторые функции	$f(x) < g^{2n+1}(x)$
$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x),\ n \in Z$, где $f(x),\ g(x)$ - некоторые функции	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^{2n}(x); \\ g(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0; \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$

$\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x), n \in Z$, где $f(x), g(x)$ - некоторые функции	$f(x) > g^{2n+1}(x)$
$\log_a f(x) > \log_a g(x), a > 0, a \neq 1$, где $f(x), g(x)$ - некоторые функции	Если $a > 1$, то $\begin{cases} g(x) > 0; \\ f(x) > g(x). \end{cases}$ Если $0 < a < 1$, то $\begin{cases} f(x) > 0; \\ f(x) < g(x). \end{cases}$
$\log_{g(x)} f(x) > c$, где $f(x), g(x)$ - некоторые функции	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < g^c(x); \\ 0 < g(x) < 1, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > g^c(x); \\ g(x) > 1. \end{cases} \end{array} \right.$
$\log_{g(x)} f(x) < c$, где $f(x), g(x)$ - некоторые функции	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^c(x); \\ 0 < g(x) < 1, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < g^c(x); \\ g(x) > 1. \end{cases} \end{array} \right.$

Формулы. Некоторые важные неравенства:

1. Неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел $a + \frac{1}{a} \geq 2, a > 0$.

2. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, a \geq 0, b \geq 0$.

3. Неравенство треугольника $|a+b| \leq |a| + |b|$.

4. $|a-b| \geq ||a| - |b||$.

5. $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$.

Производная функции

Определение. Рассмотрим произвольную внутреннюю точку x_0 области определения функции $y = f(x)$. Разность $\Delta x = x - x_0$, где x_0 – также внутренняя точка области определения, называется *приращением аргумента в точке* x_0. Разность $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ называется *приращением функции f в точке* x_0, соответствующим приращению Δx, и обозначается $\Delta y=\Delta f(x_0)$.

Определение. *Производной* функции $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента в этой точке при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует и конечен, то есть $y'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

В таблице 10 приведены производные элементарных функций.

Формулы. Основные свойства производных. Если в точке x существуют конечные производные функций $y=v(x)$ и $y=u(x)$, то в этой точке существуют также следующие производные.

1. $\left(u(x)+v(x)\right)'=u'(x)+v'(x)$
2. $\left(u(x)-v(x)\right)'=u'(x)-v'(x)$
3. $\left(u(x)v(x)\right)'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
4. $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)},\ v(x)\neq 0$
5. $\left(Cu(x)\right)'=Cu'(x), C-const.$

Теорема. Производная сложной функции. *Если функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y=g(x)$ имеет производную в точке $y_0=f(x_0)$, то сложная функция $h(x)=g\left(f(x)\right)$ также имеет производную в точке x_0, причём $h'(x_0)=g'\left(f(x_0)\right)\cdot f'(x_0)$.*

Теорема. Достаточное условие монотонности функции. *Если в каждой точке интервала I выполнено неравенство $f'(x)>0$, то функция $y=f(x)$ возрастает на I. Аналогично, если $f'(x)<0$, то $y=f(x)$ убывает на I.*

Таблица 10.

Производные элементарных функций

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$y = c$, c=const	$y' = 0$	$y = ax + b$	$y' = a$
$y = x^2$	$y' = 2x$	$y = x^3$	$y' = 3x^2$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = x^a$	$y' = ax^{a-1}$	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$	$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{1}{1 + x^2}$

Теорема. Необходимое условие экстремума функции. *Если точка* x_0 *является точкой экстремума функции y = f(x) и в этой точке существует производная* $f'(x_0)$, *то* $f'(x_0) = 0$.

Признак максимума функции. *Если функция y = f(x) непрерывна в точке* x_0 *и имеет производную* $f'(x)$ *на интервале* $(a; b)$, *содержащем точку* x_0, *и* $f'(x) > 0$ *на интервале* $(a; x_0)$ *и* $f'(x) < 0$ *на интервале* $(x_0; b)$, *то точка* x_0 *является точкой максимума функции y = f(x).*

Признак минимума функции. *Если функция y = f(x) непрерывна в точке* x_0 *и имеет производную* $f'(x)$ *на интервале* $(a; b)$, *содержащем точку* x_0, *и* $f'(x) < 0$ *на интервале* $(a; x_0)$ *и* $f'(x) > 0$ *на интервале* $(x_0; b)$, *то точка* x_0 *является точкой минимума функции y = f(x).*

Правило отыскания наибольшего и наименьшего значений функции. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек (точек, в которых производная функции обращается в нуль или не существует), нужно вычислить значения функции во всех критических точках и концах отрезка и выбрать наибольшее и наименьшее из полученных чисел.

Первообразная и интеграл

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке *X*, если для любого *x* из *X* выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Теорема. Основное свойство первообразной. *Если* $F(x)$ – *первообразная для функции* $f(x)$ *на промежутке X, то у функции* $f(x)$

бесконечно много первообразных, и все эти первообразные имеют вид $F(x)+C$*, где* C *– произвольная постоянная.*

Учитывая, что отыскание первообразной есть операция, обратная дифференцированию, и отталкиваясь от таблицы производных (таблица 10), получаем следующую таблицу первообразных (в таблице 11 приведена одна первообразная $F(x)$, а не общий вид первообразных $F(x)+C$).

Таблица 11.

Таблица первообразных

Функция	Первообразная	Функция	Первообразная
$f(x)=k$	$F(x)=kx$	$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$
$f(x)=x^r$ $(r\neq -1)$	$F(x)=\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$	$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert$	$f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$F(x)=-\operatorname{ctg} x$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	$f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x)=\operatorname{tg} x$
$f(x)=a^x$	$F(x)=\dfrac{a^x}{\ln a}$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x)=\arcsin x$
		$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$	$F(x)=\operatorname{arctg} x$

При решении задач применяются следующие ***правила вычисления первообразных:***

1. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, а $H(x)$ – первообразная для $h(x)$, то $F(x)+H(x)$ – первообразная для $f(x)+h(x)$.

2. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ и k – постоянная, то $kF(x)$ – первообразная для $kf(x)$.

3. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ и k, b – постоянные, причем $k\neq 0$, то $\dfrac{1}{k}F\left(kx+b\right)$ – первообразная для $f(kx+b)$.

Определение. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $\left[a;b\right]$. Разобьем отрезок $\left[a;b\right]$ на n частей точками $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$; для однородности обозначений положим $a = x_0, b = x_n$. Введем обозначения: $x_1 - x_0 = \Delta x_0, x_2 - x_1 = \Delta x_1, ..., x_n - x_{n-1} = \Delta x_{n-1}$ и рассмотрим сумму $f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + ... + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$. Она называется *интегральной суммой* для функции $y = f(x)$ по отрезку $[a; b]$.

На практике удобнее делить отрезок $[a; b]$ на n равных частей. Тогда $\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_{n-1} = \dfrac{b-a}{n}$ и интегральная сумма принимает вид $\dfrac{b-a}{n}\left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1})\right)$. Значение суммы зависит только от числа n, обозначим ее S_n.

Определение. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то последовательность $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ имеет предел, его называют *интегралом функции $y = f(x)$ от a до b* и обозначают $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Связь между интегралом и первообразной (***формула Ньютона–Лейбница***). Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Правила вычисления интегралов:

1. Интеграл суммы равен сумме интегралов:

$$\int\limits_a^b \left(f_1(x) + f_2(x)\right)dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + f_2(x)dx.$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Определение. Рассмотрим плоскую фигуру *Ф*, представляющую собой множество точек координатной плоскости *xy*, лежащее в полосе между прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$), имеющее в своем составе точки с абсциссами x

$= a$, $x = b$ и ограниченное сверху и снизу графиками непрерывных на $[a;b]$ функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, таких, что для всех x из $[a;b]$ справедливо неравенство $f_1(x) \geq f_2(x)$ (рис. 3). Такая фигура называется криволинейной трапецией.

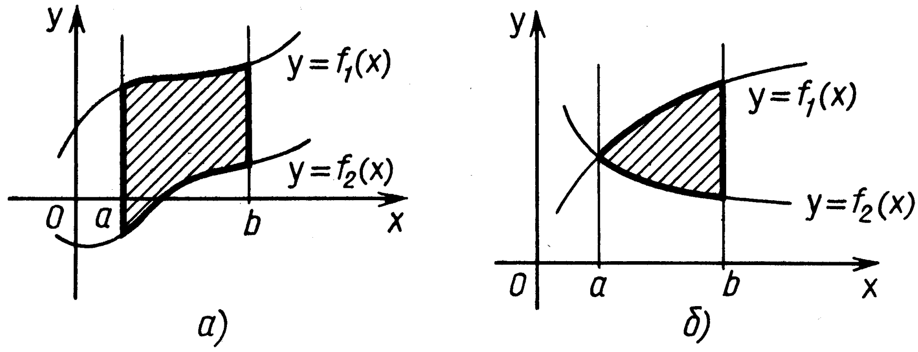


Рис. 3

Формула. Площадь S фигуры Φ вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x) \right) dx.$$

Формула. Пусть задано тело T, обладающее следующими свойствами:

1) тело расположено между двумя плоскостями α и β, параллельными заданной плоскости π и удаленными от нее на расстояния соответственно a и b ($a < b$), причем и в плоскости α, и в плоскости β есть точки тела T;

2) если $a < x < b$ и плоскость γ параллельна плоскости π и удалена от нее на расстояние x, то в пересечении плоскости γ и тела T образуется сечение, площадь которого выражается функцией $S(x)$, непрерывной на отрезке $[a;b]$.

Тогда объем V такого тела T (рис. 4) вычисляется по формуле:

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

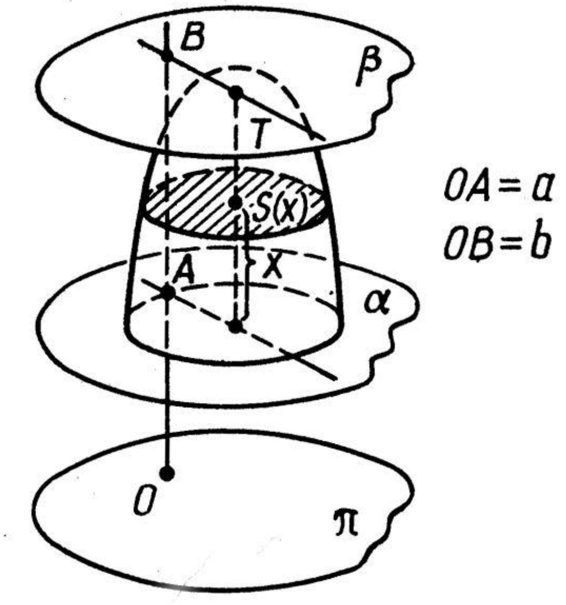


Рис. 4

Формулы. Физические приложения интеграла.

1) *Работа.* Пусть тело движется по оси x, в каждой точке которой приложена некоторая сила $F = F(x)$ (считаем, что вектор силы направлен по оси или в противоположную сторону, т. е. фактически, что сила здесь не векторная, а скалярная величина). Тогда работа A, которая выполняется при перемещении тела из точки a в точку b, вычисляется по формуле:

$$A = \int_a^b F(x)dx .$$

2) *Перемещение.* Пусть тело движется по оси x со скоростью $v(t)$. Тогда перемещение s тела за промежуток времени $[a; b]$ вычисляется по формуле:

$$s = \int_a^b v(t)dt .$$

3) *Масса.* Пусть дан тонкий неоднородный прямолинейный стержень (например, отрезок тонкой проволоки с изменяющейся от точки к точке плотностью). Расположим стержень вдоль оси x так, чтобы он занял положение отрезка $[0; l]$, тогда линейную плотность можно задать функцией от x: $\rho = \rho(x)$. Масса стержня вычисляется по формуле:

$$m = \int_0^l \rho(x)dx .$$

4) *Электрический заряд.* Пусть по проводнику течет переменный ток и нужно вычислить заряд q, переносимый через поперечное сечение проводника за промежуток времени $[a; b]$. Пусть $I = I(t)$ — закон изменения силы тока. Тогда заряд q вычисляется по формуле:

$$q = \int_a^b I(t)dt.$$

III. ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

Целые числа

Рассмотрим применение теории целых чисел при решении задач повышенной трудности.

Задача 1. Найти все тройки целых чисел (u, v, w), для каждой из которых выполняется условие $3(u-3)^2 + 6v^2 + 2w^2 + 3v^2w^2 = 33$.

Решение. Пусть (u_0, v_0, w_0) - тройка чисел, удовлетворяющая условию задачи; тогда $3(u_0-3)^2 + 6v_0^2 + 2w_0^2 + 3v_0^2w_0^2 = 33$, откуда следует, в частности, что $3(u_0-3)^2 \le 33$, т.е. $(u_0-3)^2 \le 11$. Поскольку $(u_0-3)^2$ является квадратом целого числа $u_0 - 3$, то $(u_0-3)^2$ равно либо 0, либо 1, либо 4, либо 9.

Перепишем равенство $3(u-3)^2 + 6v^2 + 2w^2 + 3v^2w^2 = 33$ в виде $3(u-3)^2 + (w_0^2+2)(3v_0^2+2) = 37$.

Если $(u_0-3)^2 = 0$, то $(w_0^2+2)(3v_0^2+2) = 37$. Так как w_0^2+2 и $3v_0^2+2$ целые числа, большие 1, а 37 – простое число, то последнее равенство выполняться не может. Значит, $(u_0-3)^2 \ne 0$.

Если $(u_0-3)^2=1$, то $(w_0^2+2)(3v_0^2+2)=34$. Поскольку $w_0^2+2\geq 2$, $3v_0^2+2\geq 2$ и w_0^2+2, $3v_0^2+2$ – целые числа, то либо $\begin{cases} w_0^2+2=2, \\ 3v_0^2+2=17, \end{cases}$ либо $\begin{cases} w_0^2+2=17, \\ 3v_0^2+2=2. \end{cases}$ Из второго равенства системы $\begin{cases} w_0^2+2=2, \\ 3v_0^2+2=17 \end{cases}$ находим, что $v_0^2=5$, что невозможно, поскольку v_0 - целое число. Из первого равенства системы $\begin{cases} w_0^2+2=17, \\ 3v_0^2+2=2 \end{cases}$ находим, что $w_0^2=15$, что также невозможно, поскольку w_0 - целое число. Значит, $(u_0-3)^2\neq 1$.

Если $(u_0-3)^2=4$, то $(w_0^2+2)(3v_0^2+2)=25$, откуда следует, что $\begin{cases} w_0^2+2=5, \\ 3v_0^2+2=5. \end{cases}$ Из первого равенства системы находим, что $w_0^2=3$, что невозможно. Значит, $(u_0-3)^2\neq 4$.

Если $(u_0-3)^2=9$, т.е. если $u_0=6$ или $u_0=0$, то $(w_0^2+2)(3v_0^2+2)=10$. Так как $w_0^2+2\geq 2$, $3v_0^2+2\geq 2$, то отсюда следует, что либо $\begin{cases} w_0^2+2=5, \\ 3v_0^2+2=2, \end{cases}$ либо $\begin{cases} w_0^2+2=2, \\ 3v_0^2+2=5. \end{cases}$ Из первого равенства системы $\begin{cases} w_0^2+2=5, \\ 3v_0^2+2=2 \end{cases}$ следует, что $w_0^2=3$, что невозможно. Из равенств системы $\begin{cases} w_0^2+2=2, \\ 3v_0^2+2=5 \end{cases}$ получаем, что либо $w_0=0, v_0=1$, либо $w_0=0, v_0=-1$. Итак, тройка чисел (u_0, v_0, w_0), удовлетворяющая условию задачи, может быть лишь среди четырех троек: $(6,1,0), (6,-1,0), (0,1,0), (0,-1,0)$. Легко видеть, что все эти тройки чисел удовлетворяют условию задачи.

Следовательно, исходному соотношению удовлетворяют четыре тройки чисел: $(6,1,0), (6,-1,0), (0,1,0), (0,-1,0)$.

Ответ: $(6,1,0), (6,-1,0), (0,1,0), (0,-1,0)$.

Задача 2. Из трех различных цифр составили три различных трехзначных числа, образующих арифметическую прогрессию. В каждом числе все цифры различные. Каково наибольшее значение разности такой прогрессии?

Решение. Предположим, что разность прогрессии больше 400. Тогда наименьшей цифрой в рассматриваемых числах может быть только цифра 1, наибольшей – цифра 9, а третьей – цифра 5. Но из соответствующих трехзначных чисел (159 или 195, 519 или 591, 915 или 951) нельзя образовать прогрессию.

Пусть теперь разность больше 300. Тогда для наименьшей и наибольшей цифр возможны такие варианты: 1 и 9, 1 и 8, 1 и 7, 1 и 6, 2 и 9, 2 и 8, 3 и 9. Перебирая эти варианты, нетрудно убедиться, что лишь в двух случаях (1 и 8; 2 и 9), можно подобрать подходящую третью цифру. Получим две прогрессии: 148, 481, 814 и 259, 592, 925 с одинаковой разностью 333.

Ответ: наибольшая разность равна 333.

Задача 3. Решите в целых числах уравнение $xy = 1997(x+y)$.

Решение. Переписав уравнение в виде $(x-1997)(y-1997) = 1997^2$ и воспользовавшись тем, что 1997 – простое число, получаем 6 возможных вариантов для сомножителей:

$$(1;1997^2), (-1;-1997^2), (-1997;1997), (1997^2;1), (-1997^2;-1), (1997;1997)$$

Ответ:
$$\begin{gathered}(x;\,y) = (1998;\,3\,990\,006), (1996;\,-3\,986\,012), (0;\,0),\\ (3\,990\,006;1998), (-3\,986\,012;1996), (3994;\,3994).\end{gathered}$$

Метод математической индукции

Решение задач основано на ***принципе полной математической индукции,*** который часто принимают за одну из аксиом арифметики. Этот принцип формулируется так:

Если предложение, зависящее от натурального числа n:

а) верно для некоторого начального значения $n = n_0$ и

б) из допущения, что оно верно для $n = k$, где $k \geq n_0$ — произвольное натуральное число, вытекает, что предложение верно и для $n = k + 1$,

то предложение верно для любого натурального $n \geq n_0$.

Задача 1. Доказать, что

$$1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{(n+1)(n+2)n}{6}.$$

Доказательство. Очевидно, формула верна при $n = 1$. Пусть формула верна для некоторого n; докажем, что тогда она будет верна и для $n + 1$. Обозначив через S_n сумму, стоящую в левой части доказываемой формулы, будем иметь:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} = \frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]\left[(n+1)+2\right]}{6}.$$

Отсюда, согласно методу и следует справедливость формулы при любом натуральном n.

Задача 2. Доказать формулу Муавра $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

Доказательство. Очевидно, формула верна при $n = 1$. Пусть формула верна при некотором $n \geq 1$, т.е. $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

Чтобы убедиться в справедливости формулы при $n + 1$, умножим обе части выше приведенной формулы на $\cos\varphi + i\sin\varphi$. Получим согласно правилу умножения комплексных чисел:

$$\begin{aligned}
&(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n+1} = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \\
&= (\cos n\varphi\cos\varphi - \sin n\varphi\sin\varphi) + i(\cos n\varphi\sin\varphi + \sin n\varphi\cos\varphi) = \\
&= \cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi.
\end{aligned}$$

Следовательно, формула справедлива при любом натуральном n.

Прогрессии

Рассмотрим на примерах использование арифметической и геометрической прогрессий.

Задача. Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. В арифметической прогрессии первый член равен 3, разность равна 6. В геометрической прогрессии первый член равен 3, знаменатель равен $\sqrt{2}$. Выяснить, что больше: сумма первых шести членов арифметической прогрессии или сумма первых восьми членов геометрической прогрессии.

Решение. Общий член a_n данной арифметической прогрессии по известной формуле может быть записан так: $a_n = 3 + 6(n-1)$. Поэтому $a_6 = 3 + 6 \cdot 5 = 33$. Сумма первых шести членов арифметической прогрессии равна $\frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = \frac{3+33}{2} \cdot 6 = 108$. По известной формуле сумма первых восьми членов геометрической прогрессии равна $\frac{(3-3\sqrt{2})^8}{1-\sqrt{2}} = 45(\sqrt{2}+1)$. Сравним числа 108 и $45(\sqrt{2}+1)$. Так как $\sqrt{2} > \frac{7}{5}$, то $45(\sqrt{2}+1) > 45\left(\frac{7}{5}+1\right) = 108$.

Ответ: сумма первых восьми членов геометрической прогрессии больше первых шести членов арифметической прогрессии.

Исследование функций. Графики функций

Задача 1. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = arctg(\sqrt{3}\cos 8x) + arcctg(\sin 3x)$ и все x, при которых оно достигается.

Решение. Известно, что $y = arctgx$ монотонно возрастает, поэтому при изменении $\cos 8x$ от -1 до 1 верно неравенство

$$-\frac{\pi}{3} = -arctg\sqrt{3} \le arctg(\sqrt{3}\cos 8x) \le arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Функция $y = arcctgx$ монотонно убывает, и поэтому при изменении $\sin 3x$ от -1 до 1 верно неравенство

$$\frac{\pi}{4} = arcctg1 \le arcctg(\sin 3x) \le arcctg(-1) = \frac{3\pi}{4}.$$

Отсюда следует, что $-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12} \le f(x) \le \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}$.

Проверим, достигается ли значение $\frac{13\pi}{12}$:

$$f(x) = \frac{13\pi}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} arctg(\sqrt{3}\cos 8x) = \frac{\pi}{3}, \\ arcctg\sin 3x = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 8x = 1, \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi k}{8}, k \in Z, \\ \sin\frac{6\pi k}{8} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi k}{8}, k \in Z, \\ \frac{6\pi k}{8} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi k}{8}, k \in Z, \\ 3k = 2(3 + 4m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi k}{8}, k \in Z, \\ m = 3n, n \in Z, \\ k = 2(1 + 4n) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2(1 + 4n), n \in Z, \\ x = \frac{2\pi \cdot 2(1 + 4n)}{8} \equiv \frac{\pi(1 + 4n)}{2}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $f_{наиб.} = f\left(\frac{\pi(1 + 4n)}{2}\right) = \frac{13\pi}{12}, n \in Z$.

***Ответ*:** $\frac{13\pi}{12}; \frac{\pi(1 + 4n)}{2}$.

Алгебраические уравнения

В теории элементарной математики выделяют общие и частные ***методы решения уравнений*.** Среди общих методов решения уравнений выделяются: 1) использование преобразований (раскрытие скобок, освобождение от знаменателя, приведение подобных членов, взятие функций от обеих частей и т.д.); разложение на множители, т.е. преобразование уравнения в произведение двух или нескольких многочленов; 3) замена переменной.

Частные методы решения уравнений имеют место для решения отдельных задач. Выделяются метод разности, метод перехода к системе уравнений, метод введения параметра.

Рассмотрим примеры задач повышенной трудности, решаемые некоторыми методами из выше перечисленных.

Задача 1. Решите уравнение:

$$\frac{10}{x+10}+\frac{10\cdot 9}{(x+10)(x+9)}+\frac{10\cdot 9\cdot 8}{(x+10)(x+9)(x+8)}+\ldots+\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(x+10)(x+9)(x+8)\ldots(x+1)}=$$
$$=11.$$

Решение. Перепишем уравнение в следующем виде:

$$\frac{10}{x+10}\left(1+\frac{9}{x+9}\left(1+\frac{8}{x+8}\left(\ldots\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\ldots\right)\right)\right)=11.$$

Каждый раз преобразовывая выражение во внутренних скобках, получим последовательно:

$$\frac{10}{x+10}\left(1+\frac{9}{x+9}\left(1+\frac{8}{x+8}\left(\ldots\left(1+\frac{2}{x+2}\cdot\frac{x+2}{x+1}\right)\ldots\right)\right)\right)=11;$$

$$\frac{10}{x+10}\left(1+\frac{9}{x+9}\left(1+\frac{8}{x+8}\left(\ldots\left(1+\frac{3}{x+3}\cdot\frac{x+3}{x+1}\right)\ldots\right)\right)\right)=11;$$

...

$$\frac{10}{x+10}\cdot\frac{x+10}{x+1}=11;$$

$$x=-\frac{1}{11}.$$

***Ответ*:** $x=-\dfrac{1}{11}.$

Задача 2. Решите уравнение:

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0.$$

Решение. Заметим, что одним из корней уравнения является $x_1=a$. Тогда $((x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc)):(x-a)=x^2-(b+c)x+bc$. Из уравнения $x^2-(b+c)x+bc=0$ находим, что $x_2=b, x_3=c$.

Ответ: $x_1=a, x_2=b, x_3=c$.

Замечание. На основе данной задачи можно сформулировать и доказать обобщенную теорему Виета. Если x_1, x_2, x_3 – корни уравнения $x^3+px^2+qx+s=0$, то $x_1+x_2+x_3=-p, x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q, x_1x_2x_3=-s$.

Алгебраические неравенства

В курсе элементарной математики выделяются следующие ***способы доказательства*** алгебраических неравенств: 1) использование определения неравенства, т.е. составление разности правой и левой частей неравенства; 2) использование транзитивности; 3) использование замечательных неравенств (неравенство Коши, обобщение неравенства Коши); 4) использование метода полной математической индукции.

Задача 1. Докажите неравенство $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}<15$, если $a+b+c=1$.

Доказательство. В силу неотрицательности подкоренных выражений, получаем, что $a\geq -0{,}5, b\geq -0{,}5, c\geq -0{,}5$. Тогда $a=1-b-c\leq 1+0{,}5+0{,}5=2$. Аналогично, $b\leq 2$ и $c\leq 2$.

Следовательно, $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}<\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}<15$.

Задача 2. Доказать, что для любых действительных чисел p и t справедливо неравенство $2(2p-1)^4+1+(1-2(2p-1)^4)\sin 2t\geq 0$, и найти все пары чисел (p, t), для которых это неравенство превращается в равенство.

Решение. Рассмотрим выражение $2(2p-1)^4+1+(1-2(2p-1)^4)\sin 2t$. Перепишем его в следующем виде: $2(2p-1)^4(1-\sin 2t)+(1+\sin 2t)$.

Так как $|\sin 2t|\le 1$ для любого числа *t*, то

$$(1-\sin 2t)\ge 0 \text{ и } 1+\sin 2t\ge 0$$

для любого числа *t*. Поскольку $(2p-1)^4\ge 0$ для любого числа *p*, то выражение $2(2p-1)^4(1-\sin 2t)+(1+\sin 2t)$, а значит, и выражение $2(2p-1)^4+1+(1-2(2p-1)^4)\sin 2t$ неотрицательны для любых чисел *p* и *t*. Очевидно, что выражение $2(2p-1)^4(1-\sin 2t)+(1+\sin 2t)$ обращается в нуль, если числа *p* и *t* таковы, что одновременно выполняются равенства

$$1+\sin 2t=0 \text{ и } (2p-1)^4(1-\sin 2t)=0.$$

Следовательно, задача свелась к нахождению всех пар чисел (p,t), являющихся решением системы уравнений $\begin{cases} 1+\sin 2t=0, \\ (2p-1)^4(1-\sin 2t)=0. \end{cases}$ Из первого уравнения системы находим, что $\sin 2t=-1$, т.е. $t=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$. Подставляя эти значения во второе уравнение системы, находим, что $(2p-1)^4=0$, т.е. $p=\frac{1}{2}$. Итак, система уравнений имеет решения

$$\begin{cases} t=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z, \\ p=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{4}+\pi k\right), k\in Z$.

Задача 3. Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство $a^2+2a-\sin^2 x-2a\cos x>2$ выполняется для любого числа *x*.

Решение. Ввиду того, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ и множество значений функции $t = \cos x$ есть промежуток $[-1, 1]$, задачу можно переформулировать следующим образом: найти все действительные значения параметра *a*, при каждом из которых наименьшее значение квадратного трехчлена $t^2 - 2at + a^2 + 2a - 3$ на отрезке $-1 \le t \le 1$ положительно.

Абсцисса вершины параболы $y = t^2 - 2at + a^2 + 2a - 3 = (t-a)^2 + 2a - 3$ равна *a*. Поэтому m – наименьшее значение функции y – на отрезке $-1 \le t \le 1$ равно $m = \begin{cases} y(-1) = a^2 + 4a - 2, \textit{если } a \le -1, \\ y(a) = 2a - 3, \textit{если } -1 < a < 1, \\ y(1) = a^2 - 2, \textit{если } a \ge 1. \end{cases}$

Так как наименьшее значение функции *y* на отрезке $[-1, 1]$ должно быть положительно, то искомые значения параметра *a* из области $a \le -1$ удовлетворяют неравенству $a^2 + 4a - 2 > 0$. Искомые значения параметра *a* из области $-1 < a < 1$ удовлетворяют неравенству $2a - 3 > 0$. Искомые значения параметра *a* из области $a \ge 1$ удовлетворяют неравенству $a^2 - 2 > 0$.

Таким образом, множество искомых значений *a* есть объединение решений трех систем неравенств:

$$\begin{cases} a \le -1, \\ a^2 + 4a - 2 > 0, \end{cases} \begin{cases} -1 < a < 1, \\ 2a - 3 > 0, \end{cases} \begin{cases} a \ge 1, \\ a^2 - 2 > 0. \end{cases}$$

Множество решений первой системы есть промежуток $-\infty < a < -2 - \sqrt{6}$, а вторая система не имеет решений, множество решений третьей системы – промежуток $\sqrt{2} < a < +\infty$. Значит, искомое множество значений *a* состоит из двух промежутков: $-\infty < a < -2 - \sqrt{6}$ и $\sqrt{2} < a < +\infty$.

***Ответ*:** $a < -2 - \sqrt{6}, a > \sqrt{2}$.

Системы алгебраических уравнений

Основными методами решения систем алгебраических уравнений являются: 1) метод подстановки; 2) метод алгебраического сложения или метод линейного преобразования системы; 3) метод замены переменных; 4) метод разложения на множители.

Рассмотрим применение метода замены переменных на примере решения задачи повышенной трудности.

Задача. Решить систему уравнений $\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases}$

Решение. Введем обозначение $f(t) = t^2 - 3t + 3$, тогда система запишется в виде $\begin{cases} y^3 = 9f(x), \\ z^3 = 9f(y), \\ x^3 = 9f(z). \end{cases}$ Из равенства $t^2 - 3t + 3 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ следует, что функция $y = f(t)$ принимает наименьшее значение, равное $\frac{3}{4}$, в точке $t = \frac{3}{2}$. Поэтому если $(x_0; y_0; z_0)$ - решение данной системы, то $y_0^3 \geq \frac{27}{4}, z_0^3 \geq \frac{27}{4}, x_0^3 \geq \frac{27}{4}$. Поскольку $\frac{27}{4} > \left(\frac{3}{2}\right)^3$, то $x_0 > \frac{3}{2}, y_0 > \frac{3}{2}, z_0 > \frac{3}{2}$. В области $t > \frac{3}{2}$ функция $f(t)$ монотонно возрастает. Таким образом, если $(x_0; y_0; z_0)$ - решение данной системы, то все три числа x_0, y_0, z_0 лежат в области монотонного возрастания функции $f(t)$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x_0 \geq y_0$. Так как $x_0 > \frac{3}{2}$ и $y_0 > \frac{3}{2}$, то $f(x_0) \geq f(y_0)$. Из первых двух уравнений системы получаем, что $y_0^3 \geq z_0^3$, т.е. $y_0 \geq z_0$. Так как $y_0 > \frac{3}{2}$ и $z_0 > \frac{3}{2}$, то отсюда следует, что $f(y_0) \geq f(z_0)$ или $z_0^3 \geq x_0^3$, т.е. $z_0 \geq x_0$. Итак,

получили цепочку неравенств $x_0 \ge y_0 \ge z_0 \ge x_0$, которая означает, что $x_0 = y_0 = z_0$.

2) Пусть $x_0 \le y_0$. Так как $x_0 > \frac{3}{2}$ и $y_0 > \frac{3}{2}$, то $f(x_0) \le f(y_0)$. Подобно первому случаю, находим, что $y_0^3 \le x_0^3$ или $y_0 \le z_0$. Отсюда следует, что $f(y_0) \le f(z_0)$ или $z_0^3 \le x_0^3, z_0 \le x_0$. Опять получаем, что $x_0 = y_0 = z_0$.

Итак, показано, что любое решение системы $(x_0; y_0; z_0)$ таково, что $x_0 = y_0 = z_0$. Поскольку любое решение системы $(x_0; y_0; z_0)$ должно превращать все уравнения системы в верные числовые равенства, то, полагая $x_0 = y_0 = z_0 = t_0$, получаем, что все уравнения системы превратились в одно и то же равенство $(t_0 - 3)^3 = 0$, которое справедливо только при одном значении t_0, а именно, при $t_0 = 3$.

Значит, система имеет единственное решение (3; 3; 3).

Ответ: (3; 3; 3).

Задачи на составление уравнений и их систем

Основными текстовыми задачами на составление уравнений и их систем являются задачи на движение, задачи, связанные с выполнением (индивидуально или совместно) определенного объема работы, задачи на дроби и проценты, задачи на смеси и сплавы.

Рассмотрим на примерах решение текстовых задач повышенной трудности.

Задача 1. Две бригады рабочих начали работу в 8 часов. Сделав вместе 72 детали, они стали работать раздельно. В 15 часов выяснилось, что за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая. На другой день первая бригада делала в 1 час на одну деталь больше, а вторая бригада в 1 час на одну деталь меньше. Работу бригады начали вместе в 8 часов и, сделав 72 детали, снова стали работать раздельно. Теперь за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая, уже к 13 часам. Сколько деталей в 1 час делала каждая бригада?

Решение. Пусть первая бригада делала в час x деталей, а вторая бригада – y деталей, тогда за один час они вместе делали $x + y$ деталей, и 72 детали сделали за $\frac{72}{x+y}$ часов. Следовательно, раздельно в первый день они работали $7-\frac{72}{x+y}$ часов. За это время первая бригада сделала $\left(7-\frac{72}{x+y}\right)x$ деталей, а вторая бригада сделала $\left(7-\frac{72}{x+y}\right)y$ деталей, и из условия задачи вытекает, что $\left(7-\frac{72}{x+y}\right)x-\left(7-\frac{72}{x+y}\right)y=8$.

Во второй день первая бригада делала в час $x + 1$ деталь, а вторая бригада делала в час $y – 1$ деталь. Так как обе бригады в час делали опять $x + y$ деталей, то 72 детали они сделали за $\frac{72}{x+y}$ часов и раздельно работали $5-\frac{72}{x+y}$ часов. За это время первая бригада сделала $\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(x+1)$ деталей, а вторая бригада сделала $\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(y-1)$ деталей, и из условия задачи вытекает, что $\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(x+1)-\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(y-1)=8$.

Итак, для нахождения x и y получили систему уравнений

$$\begin{cases} \left(7-\frac{72}{x+y}\right)(x-y)=8, \\ \left(5-\frac{72}{x+y}\right)(x-y+2)=8. \end{cases}$$

Обозначим $\frac{72}{x+y}=z,\ x-y=u$; тогда система запишется в виде

$$\begin{cases} (7-z)u = 8, \\ (5-z)(u+2) = 8. \end{cases}$$

Перепишем эту систему так: $\begin{cases} 7u = 8 + uz, \\ 5u + 10 - 2z = 8 + uz. \end{cases}$ Отсюда ясно, что эта система равносильна системе $\begin{cases} 7u = 8 + uz, \\ 5u + 10 - 2z = 7u. \end{cases}$ Из второго уравнения $z = 5 - u$. Подставляя $5 - u$ вместо z в первое уравнение, получаем уравнение $7u = 8 + u(5-u)$, которое имеет два корня: $u_1 = 2$ и $u_2 = -4$. Тогда $z_1 = 3$ и $z_2 = 9$. По условию задачи $x > y$, т.е. $u = x - y > 0$. Следовательно, для нахождения x и y имеем систему уравнений $\begin{cases} x - y = 2, \\ \dfrac{72}{x+y} = 3. \end{cases}$ Решение этой системы: $x_1 = 13, y_1 = 11$. Легко видеть, что эти x и y удовлетворяют условию задачи. Следовательно, первая бригада делала в один час 13 деталей, а вторая – 11 деталей.

Ответ: Первая бригада делала в один час 13 деталей, а вторая – 11 деталей.

Задача 2. Имеются три раствора с различным процентным содержанием спирта. Если смешать их в пропорции 1 : 2 : 3, то получится 20% раствор. Если смешать их в пропорции 5 : 4 : 3, то получится раствор с 50% содержанием спирта. Сколько процентов спирта будет содержать раствор, если смешать равные количества исходных растворов?

Решение. Пусть количество спирта в 1 л первого, второго и третьего растворов равны соответственно x, y и z. Из условия задачи следуют два равенства: $x + 2y + 3z = 6 \cdot \dfrac{1}{5}$, $5x + 4y + 3z = 12 \cdot \dfrac{1}{2}$. Сложив эти равенства, получим $6x + 6y + 6z = 7\dfrac{1}{5} = 18 \cdot \dfrac{2}{5}$. Переводя $\dfrac{2}{5}$ в проценты получаем ответ: 40%. Таков формально полученный ответ. Но, оказывается, система уравнений $x+2y+3z=6\cdot\frac{1}{5}$ и $5x+4y+3z=12\cdot\frac{1}{2}$ несовместна при условии, что все неизвестные находятся от 0 до 1. В самом деле, умножим уравнение $x+2y+3z=6\cdot\frac{1}{5}$ на 5 и вычтем уравнение $5x+4y+3z=12\cdot\frac{1}{2}$. Получим $6y+12z=0$. Следовательно, y = 0 и z = 0, а значит, x = 1,2. Этого не может быть.

Ответ: Решений нет, т.к. условия задачи противоречивы.

Иррациональные уравнения и неравенства

Среди ***методов решения иррациональных уравнений*** в курсе элементарной математики выделяются общие методы: 1) возведение обеих частей в одну и ту же степень с использованием равносильного перехода; 2) метод замены переменных; 3) переход к системе рациональных алгебраических уравнений.

К частным методам решения иррациональных уравнений относят: 1) метод пристального взгляда, основанный на использовании свойств монотонности функции; 2) умножение на сопряженное выражение; 3) решение уравнений путем использования геометрической интерпретации; 4) метод оценок или исследования области значений.

Иррациональные неравенства решаются с использованием свойств монотонности функций, рассматриваемых в неравенстве.

Задача 1. Решить уравнение:

$$\sqrt{x(x+7)}+\sqrt{(x+7)(x+17)}+\sqrt{(x+17)(x+24)}=12+17\sqrt{2}.$$

Решение. Левая часть уравнения определена при $x\geq 0, x\leq -24$, а также в точках $x=-7, x=-17$. Левая часть симметрична относительно вертикальной прямой $x=-12$. На полупрямой $x\geq 0$ эта функция монотонно возрастает. При $x=1$ левая часть равна правой. Из симметрии следует, что $x=-25$ также является решением. Остается проверить, что значения -7 и, следовательно, -17 уравнению не удовлетворяют. Таким образом, данное уравнение имеет два решения: 1 и -25.

Ответ: 1 и -25.

Задача 2. Решить уравнение:

$$2\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+(x+3)(x+5)}}}}=x.$$

Решение. Рассмотрим выражение, стоящее под знаком последнего радикала. Проделав очевидные преобразования, получаем

$$\sqrt{1+(x+3)(x+5)}=\sqrt{(x+4)^2}=|x+4|.$$

Из условия следует, что $x\geq 0$; поэтому модуль раскроется со знаком плюс и исходное уравнение перепишется в виде

$$2\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)(x+4)}}}=x.$$

Далее, преобразовывая аналогично левую часть этого выражения, получаем последовательно:

$$2\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)(x+3)}}=x,$$
$$2\sqrt{1+x(x+2)}=x,$$
$$2(x+1)=x,\ x=-2.$$

Однако это значение не удовлетворяет условию $x\geq 0$.

***Ответ*:** решений нет.

Задача 3. Найдите сумму всех целых чисел, являющихся решением неравенства: $\dfrac{\sqrt{3x^2-5x+3}-\sqrt{x^2+x+1}}{|2x^2-x-1|-|12x^2+7x+1|}\geq 0$.

Решение. Воспользуемся условием равносильности:

$$\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{h(x)}\leq 0\ (\geq 0)\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}\frac{f(x)-g(x)}{h(x)}\geq 0\ (\leq 0).$$

Умножим числитель на сопряженное положительное выражение – сумму корней, а знаменатель умножим на сопряженное неотрицательное выражение – сумму модулей. Тогда:

$$\frac{\sqrt{3x^2-5x+3}-\sqrt{x^2+x+1}}{\left|2x^2-x-1\right|-\left|12x^2+7x+1\right|}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-5x+3\geq 0, \\ x^2+x+1\geq 0, \\ \dfrac{2x^2-6x+2}{(14x^2+6x)(-10x^2-8x-2)}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in R, \\ \dfrac{\left(x-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}{x\left(x+\dfrac{3}{7}\right)}\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{3}{7};0\right)\cup\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right].$$

В решение входят целые числа: 1, 2, сумма которых равна 3.

***Ответ*: 3.**

Тригонометрические уравнения, неравенства и их системы

В теории элементарной математики выделяется следующая ***классификация тригонометрических уравнений***, исходя из методов их решения: 1) уравнения, приводящиеся к квадратным; 2) уравнения, решаемые разложением на множители; 3) однородные уравнения, содержащие функции *sin* (*cos*) от одного аргумента, сводящиеся к алгебраическим относительно *tg* или *ctg* делением на соответствующую степень *sin* (*cos*); 4) уравнения вида $a\cos x+b\sin x=c$, решаемые методом введения вспомогательного угла либо с помощью универсальной подстановки; 6) тригонометрические уравнения высших степеней, решаемые с помощью метода понижения степени; 7) уравнения вида: $\sin\alpha = \sin\beta, \cos\alpha = \cos\beta, tg\alpha = tg\beta$, решениями которых являются соответственно $\alpha = (-1)^n\beta + \pi n, \alpha = \pm\beta + 2\pi n, \alpha = \beta + \pi n, n \in Z.$

Тригонометрические неравенства решаются с помощью следующих методов и приемов: 1) метод подстановки, сводящий тригонометрическое неравенство к алгебраическому; 2) графический способ; 3) с помощью единичной окружности с использованием определения тригонометрических функций.

Задача 1. Решить уравнение:

$$\left(1+tg^2 2x\right)\left(\sin\frac{21}{4}x\cos\frac{7}{4}x+\sin\frac{5}{4}x\cos\frac{x}{4}\right)=\sec^2 2x\left(\sin\frac{x}{4}\cos\frac{5}{4}x-\sin\frac{7}{4}x\cos\frac{21}{4}x\right).$$

Решение. Область допустимых значений данного уравнения состоит из точек, удовлетворяющих неравенству $\cos 2x \neq 0$, или неравенствам $x \neq \frac{\pi}{4}(2m+1), m \in Z$. В этой области $1+tg^2 2x = \sec^2 2x$, причем функция $y = 1+tg^2 2x$, очевидно, нигде не обращается в нуль. Отсюда следует, что данное уравнение равносильно на своей ОДЗ уравнению

$$\sin\frac{21}{4}x\cos\frac{7}{4}x+\sin\frac{5}{4}x\cos\frac{x}{4}=\sin\frac{x}{4}\cos\frac{5}{4}x-\sin\frac{7}{4}x\cos\frac{21}{4}x$$

или уравнению

$$\sin\frac{21}{4}x\cos\frac{7}{4}x+\cos\frac{21}{4}x\sin\frac{7}{4}x=\sin\frac{x}{4}\cos\frac{5}{4}x-\cos\frac{x}{4}\sin\frac{5}{4}x.$$

Пользуясь формулами для синуса суммы и разности двух углов, последнее уравнение можно переписать в виде $\sin 7x = \sin(-x)$. Перенесем правую часть уравнения налево, воспользуемся тем, что $\sin(-x) = -\sin x$, а также формулой для суммы синусов двух углов. Тогда уравнение $\sin 7x = \sin(-x)$ примет вид: $2\sin 4x\cos 3x = 0$. Последнее уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\sin 4x = 0$ и $\cos 3x = 0$ и потому имеет следующие серии решений: $x=\frac{\pi n}{4}, n\in Z, x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}, k\in Z$. Итак, множество решений уравнения $\sin 7x=\sin(-x)$ имеет вид

$$x=\frac{\pi n}{4}, n\in Z, x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}, k\in Z.$$

Отберем теперь из найденных чисел те, которые содержатся в ОДЗ исходного уравнения, т.е. удовлетворяют неравенствам $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}, m\in Z$. Из первой серии решений уравнения $\sin 7x=\sin(-x)$ в ОДЗ исходного уравнения лежат только точки $x=\frac{\pi n}{4}$ с четными значениями n (n = 2l), т.е. точки $x=\frac{\pi l}{2}, l\in Z$. Все точки второй серии решений содержатся в ОДЗ данного уравнения.

Ответ: $x=\frac{\pi l}{2}, l\in Z$; $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}, k\in Z$.

Задача 2. Найти все решения неравенства $\cos\frac{3}{2}-4x-x^2\geq 0$, лежащие в интервале $-\frac{21}{5}<x<0$.

Решение. Корни квадратного трехчлена $x^2+4x-\cos\frac{3}{2}$ есть $x_1=-2+\sqrt{4+\cos\frac{3}{2}}$ и $x_2=-2-\sqrt{4+\cos\frac{3}{2}}$. Поэтому множество решений данного неравенства имеет вид $x_2\leq x\leq x_1$. В этом множестве нужно выбрать точки, принадлежащие интервалу $-\frac{21}{5}<x<0$. Так как $0<\frac{3}{2}<\frac{\pi}{2}$, то $\cos\frac{3}{2}>0$, и, значит, $x_1>0$. Покажем, что точка x_2 принадлежит интервалу $-\frac{21}{5}<x<0$. Неравенство $x_2<0$ очевидно. Для доказательства неравенства

$-\frac{21}{5} < x_2$ воспользуемся тем, что $\frac{\pi}{3} < \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$, и, следовательно, $\cos\frac{3}{2} < \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Тогда $x_2 = -2 - \sqrt{4 + \cos\frac{3}{2}} > -2 - \sqrt{4 + \frac{1}{2}} = -2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Осталось проверить справедливость неравенства $-2 - \frac{3}{2}\sqrt{2} > -\frac{21}{5}$, или, что равносильно, неравенства $\sqrt{2} < \frac{22}{15}$. Последнее неравенство справедливо, так как $\left(\frac{22}{15}\right)^2 = \frac{484}{225} > 2$. Итак, $-\frac{21}{5} < x_2 < 0$, и искомое множество имеет вид $x_2 \le x < 0$.

Ответ: $-2 - \sqrt{4 + \cos\frac{3}{2}} \le x < 0$.

Задача 3. Найти все значения параметра *а*, при каждом из которых неравенство $a(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a > 0$ выполняется для всех *x*.

Решение. Пусть *a* удовлетворяет условию задачи. Так как данное неравенство должно выполняться при всех *x*, то оно должно выполняться и при $x = \frac{\pi}{2}$, т.е. должно быть выполнено неравенство

$$\left(4 - \sin\frac{\pi}{2}\right)^4 \cdot a - 3 + \cos^2\frac{\pi}{2} + a > 0,$$

или $82a - 3 > 0$. Таким образом, все значения *a*, удовлетворяющие условию задачи, лежат в области $a > \frac{3}{82}$.

Пусть теперь $a > \frac{3}{82}$. При каждом значении *x* выполнены неравенства $\cos^2 x \ge 0, 4 - \sin x \ge 3$ и $(4 - \sin x)^4 \ge 81$. Так как $a > 0$, то из этих неравенств вытекает, что

$$a(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a \ge 81a - 3 + a = 82a - 3 > 0.$$

Значит, все a из области $a > \frac{3}{82}$ удовлетворяют условию задачи.

***Ответ*:** $a > \frac{3}{82}$.

Показательные уравнения и неравенства

Среди ***методов решения показательных уравнений*** в курсе элементарной математики выделяются следующие: 1) приведение обеих частей показательного уравнения к одному и тому же основанию; 2) вынесение общего множителя за скобки; 3) приведение показательного уравнения к алгебраическому при помощи замены переменной; 4) метод группировки; 5) графический способ решения уравнений; 6) исходя из определения логарифма или используя логарифмирование обеих частей.

Показательные неравенства решаются на основе известных свойств показательной функции, а именно на основе монотонности функции.

Рассмотрим применение методов на примерах решения задач повышенной трудности.

Задача 1. Решите уравнение $2^{2^{\sin^2 x}} + 2^{2^{\frac{\cos 2x}{2}}} = 2^{1+\sqrt[4]{2}}$.

Решение. Данный пример не решается алгоритмически.

Упростим левую часть. Так как $\frac{\cos 2x}{2} = \frac{1-2\sin^2 x}{2} = \frac{1}{2} - \sin^2 x$, то $2^{2^{\sin^2 x}} + 2^{2^{\frac{1}{2}-\sin^2 x}} = 2^{2^{\sin^2 x}} + 2^{\sqrt{2}\cdot 2^{-\sin^2 x}}$. Пусть $t = 2^{\sin^2 x}$, тогда $2^{-\sin^2 x} = \frac{1}{t}$ и левая часть уравнения примет вид $2^t + 2^{\sqrt{2}\frac{1}{t}}$. Дважды воспользуемся неравенством $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (для степеней и в показателе степени). Тогда

$$2^t + 2^{\sqrt{2}\frac{1}{t}} \geq 2\cdot 2^{\frac{t}{2}} \cdot 2^{\frac{\sqrt{2}}{2t}} = 2\cdot 2^{\frac{t^2+\sqrt{2}}{2t}} \geq 2\cdot 2^{\sqrt[4]{2}} = 2^{1+\sqrt[4]{2}},$$

причем, как следует из вида показателя, равенство имеет место тогда и только тогда, когда $t=\sqrt[4]{2}$. Следовательно, решением уравнения может быть только $t=\sqrt[4]{2} \Rightarrow 2^{\sin^2 x}=2^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z.$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z.$

Задача 2. Решить неравенство $2^{2x+1}-21\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}+2\geq 0$.

Решение. Умножая обе части неравенства на 2^{2x+3} и учитывая, что функция $y=2^{2x+3}$ положительна для всех *x*, получаем неравенство

$$4(2^{2x+1})^2+8\cdot 2^{2x+1}-21\geq 0,$$

равносильное исходному неравенству. Поскольку квадратный трехчлен $4y^2+8y-21$ имеет корни $y_1=-\frac{7}{2}$ и $y_2=\frac{3}{2}$, то множество решений неравенства $4y^2+8y-21\geq 0$ состоит из двух промежутков: $y\leq -\frac{7}{2}$ и $y\geq\frac{3}{2}$. Значит, множество решений неравенства $4(2^{2x+1})^2+8\cdot 2^{2x+1}-21\geq 0$ будет объединением множества решений неравенства $2^{2x+1}\leq -\frac{7}{2}$ и множества решений неравенства $2^{2x+1}\geq\frac{3}{2}$. Первое из этих неравенств не имеет решений, а множество решений второго есть промежуток $x\geq\frac{1}{2}\log_2 3-1$. Поэтому множество решений неравенства $4(2^{2x+1})^2+8\cdot 2^{2x+1}-21\geq 0$, а значит, и исходного неравенства, есть тот же самый промежуток.

Ответ: $x\geq\frac{1}{2}\log_2 3-1.$

Логарифмические уравнения и неравенства.

Смешанные уравнения и неравенства, сводимые к логарифмическим уравнениям и неравенствам

Среди ***методов решения логарифмических уравнений*** в курсе элементарной математики выделяются следующие: 1) использование определения логарифма с переходом к системе алгебраических уравнений; 2) метод потенцирования; 3) приведение логарифмического уравнений к квадратному; 4) приведение логарифмов в уравнении к одному и тому же основанию; 5) логарифмирование обеих частей; 6) графический способ решения логарифмических уравнений.

Логарифмические неравенства решаются на основе известных свойств логарифмической функции, а именно на основе монотонности функции.

Рассмотрим применение методов на примерах решения задач повышенной трудности.

Задача 1. Решить уравнение $\dfrac{1}{\sqrt{3x-5}}=(3x-5)^{\log_{\frac{1}{25}}(2+5x-x^2)}$.

Решение. Область допустимых значений данного уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $\begin{cases} 3x-5>0, \\ 2+5x-x^2>0. \end{cases}$ решая эту систему, находим, что ОДЗ есть интервал $\dfrac{5}{3}<x<\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$.

Логарифмируя обе части уравнения, например, по основанию 2, и пользуясь формулами $\log_2\dfrac{1}{\sqrt{y}}=-\dfrac{1}{2}\log_2 y, \log_{\frac{1}{25}} z=-\dfrac{1}{2}\log_5 z$, получим уравнение $-\dfrac{1}{2}\log_2(3x-5)=-\dfrac{1}{2}\log_5(2+5x-x^2)\cdot\log_2(3x-5)$, равносильное исходному уравнению на его ОДЗ.

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$\log_2(3x-5)\cdot(\log_5(2+5x-x^2)-1)=0,$$

откуда следует, что оно равносильно на ОДЗ совокупности двух уравнений $\log_2(3x-5)=0$ и $\log_5(2+5x-x^2)=1$. Первое уравнение имеет единственный корень $x_1=2$, входящий в ОДЗ данного уравнения. Второе уравнение равносильно на ОДЗ квадратному уравнению $2+5x-x^2=5$, имеющему два корня: $x_2=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ и $x_3=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$, из которых в ОДЗ лежит только $x_2=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$.

Ответ: $x_1=2,\ x_2=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$.

Задача 2. Решить неравенство $\dfrac{6}{2x+1}>\dfrac{1+\log_2(2+x)}{x}$.

Решение. Область допустимых значений данного неравенства состоит из всех *x*, удовлетворяющих условиям $x>-2, x\neq -\dfrac{1}{2}, x\neq 0$. Таким образом, эта область состоит из трех промежутков: $-2<x<-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}<x<0, 0<x<+\infty$. Рассмотрим данное неравенство на каждом из этих промежутков отдельно.

а) Пусть $-2<x<-\dfrac{1}{2}$. Тогда, учитывая, что *x* отрицательно на этом промежутке, получаем, что исходное неравенство равносильно неравенству $\log_2(2+x)>\dfrac{4x-1}{2x+1}$. Легко видеть, что на этом интервале справедливы неравенства $\log_2(2+x)<\log_2\dfrac{3}{2}<1, \dfrac{4x-1}{2x+1}=2-\dfrac{3}{2x+1}>2$. Значит, неравенство $\log_2(2+x)>\dfrac{4x-1}{2x+1}$, а вместе с ним и исходное неравенство, не имеет решений на интервале $-2<x<-\dfrac{1}{2}$.

б) Пусть $-\frac{1}{2}<x<0$. Очевидно, что на этом интервале $1+\log_2(2+x)>1+\log_2\frac{3}{2}>0$, и, следовательно, правая часть исходного неравенства отрицательна. В то же время для любой точки x из рассматриваемого интервала $\frac{6}{2x+1}>0$. Значит, для всех x из интервала $-\frac{1}{2}<x<0$ исходное неравенство справедливо.

в) Пусть $x>0$. На этом множестве исходное неравенство равносильно неравенству $\log_2(2+x)<\frac{4x-1}{2x+1}$. Очевидно, что на этом множестве справедливы неравенства: $\frac{4x-1}{2x+1}=2-\frac{3}{2x+1}<2, 1<\log_2(2+x)$. Отсюда следует:

1) неравенство $\log_2(2+x)<\frac{4x-1}{2x+1}$ не имеет решений на том множестве, где $\log_2(x+2)\geq 2$, т.е. неравенство $\log_2(2+x)<\frac{4x-1}{2x+1}$ не имеет решений на множестве $x\geq 2$;

2) неравенство $\log_2(2+x)<\frac{4x-1}{2x+1}$ не имеет решений на том множестве, где $\frac{4x-1}{2x+1}\leq 1$. Учитывая, что в рассматриваемом случае $x>0$, получаем, что неравенство $\log_2(2+x)<\frac{4x-1}{2x+1}$ не имеет решений на множестве $0<x\leq 1$.

Остается найти решения неравенства $\log_2(2+x)<\frac{4x-1}{2x+1}$, принадлежащие интервалу $1<x<2$. Но на этом интервале $\log_2(2+x)>\log_2 3$, $\frac{4x-1}{2x+1}=2-\frac{3}{2x+1}<2-\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$. Покажем теперь, что справедливо числовое неравенство $\log_2 3>\frac{7}{5}$. Действительно, поскольку

$3^5 > 2^7$, то $3 > 2^{\frac{7}{5}}$, откуда и очевидна справедливость неравенства $\log_2 3 > \frac{7}{5}$.

Итак, на интервале $1 < x < 2$ $\log_2(2+x) > \log_2 3 > \frac{7}{5} > \frac{4x-1}{2x+1}$. Значит, неравенство $\log_2(2+x) < \frac{4x-1}{2x+1}$ не имеет решений на интервале $1 < x < 2$.

Подводя итог, получаем, что множество решений исходного неравенства есть интервал $-\frac{1}{2} < x < 0$.

Ответ: $-\frac{1}{2} < x < 0$.

Производная. Применение производной к исследованию функций, в физике и геометрии

Рассмотрим применение производной в задачах повышенной трудности при исследовании функций.

Задача. Найти точки минимума функции $y(x) = x^3 - 2x|x-2|$, заданной на отрезке $[0, 3]$, и ее наибольшее значение на этом отрезке.

Решение. Рассмотрим функцию отдельно на множествах $0 \le x \le 2$ и $2 < x \le 3$.

а) Пусть x принадлежит множеству $0 \le x \le 2$; тогда $|x-2| = -x+2$ и наша функция может быть записана в виде

$$y(x) = x^3 - 2x(-x+2) = x^3 + 2x^2 - 4x.$$

Отсюда следует, что она дифференцируема в каждой точке интервала $0 < x < 2$, и $y'(x) = 3x^2 + 4x - 4$.

Квадратное уравнение $3x^2 + 4x - 4 = 0$ имеет корни $x_1 = -2, x_2 = \frac{2}{3}$, первый из которых не содержится в интервале $0 < x < 2$, а второй содержится.

Легко видеть, что производная $y'(x)$ в точке $x=\frac{2}{3}$ равна нулю, на интервале $0<x<\frac{2}{3}$ отрицательна, на интервале $\frac{2}{3}<x<2$ положительна. Отсюда следует, что на множестве $0<x<2$ имеется единственная точка минимума $x=\frac{2}{3}$.

б) Пусть x принадлежит множеству $2<x\le 3$; тогда $|x-2|=x-2$ и наша функция может быть записана в виде

$$y(x)=x^3-2x(x-2)=x^3-2x^2+4x.$$

Отсюда следует, что она дифференцируема в каждой точке интервала $2<x<3$ и $y'(x)=3x^2-4x+4$. Дискриминант квадратного трехчлена $3x^2-4x+4$ равен -32, значит, уравнение $3x^2-4x+4=0$ не имеет корней, и, следовательно, на всем интервале $2<x<3$ производная $y'(x)$ положительна, т.е. функция $y(x)$ не имеет точек минимума на этом интервале.

Осталась неисследованной только одна внутренняя точка промежутка $0\le x\le 3$, а именно: $x=2$. На отрезке $\frac{2}{3}\le x\le 2$, как уже указывалось, функция $y(x)$ может быть представлена в виде многочлена $y(x)=x^3+2x^2-4x$. Производная этого многочлена положительна на множестве $x>\frac{2}{3}$. Значит, многочлен возрастает на множестве $x>\frac{2}{3}$ и, в частности, на множестве $\frac{2}{3}<x\le 2$. Следовательно, данная функция $y(x)$ возрастает на множестве $\frac{2}{3}<x\le 2$. Поэтому в любой окрестности точки $x=2$ есть точки, где $y(x)$ принимает значения, меньше чем $y(2)$, и точка $x=2$ не есть точка минимума.

Функция $y(x)$ задается на отрезке $[0; 2]$ многочленом x^3+2x^2-4x, поэтому она непрерывна на отрезке $[0; 2]$ и дифференцируема на интервале $(0; 2)$, причем $y'\left(\frac{2}{3}\right)=0$. Значит, ее наибольшее значение на отрезке $[0; 2]$ равно большему из чисел $y(0), y\left(\frac{2}{3}\right), y(2)$. Аналогично наибольшее значение $y(x)$ на отрезке $[2; 3]$ равно большему из чисел $y(2)$ и $y(3)$. Поэтому наибольшее значение $y(x)$ на всем отрезке $[0; 3]$ равно большему из чисел $y(0), y\left(\frac{2}{3}\right), y(2), y(3)$. Таким оказывается $y(3)=21$.

Ответ: на данном отрезке функция имеет единственную точку минимума $x=\frac{2}{3}$, а наибольшее значение этой функции на этом отрезке равно 21.

Первообразная. Интеграл

Рассмотрим применение первообразной и интеграла в задачах повышенной трудности.

Задача. Найти все значения параметра a ($a > 0$), при каждом из которых площадь фигуры, ограниченной параболой $y=\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^4}$ и прямой $y=\frac{a^2-ax}{1+a^4}$, будет наибольшей.

Решение. Пусть a – фиксированное положительное число. При этом a координаты точек параболы и прямой удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^4}, \\ y=\dfrac{a^2-ax}{1+a^4}. \end{cases}$$

Приравнивая правые части уравнений, приходим к равенству $x^2+3ax+2a^2=0$, откуда $x_1=-a, x_2=-2a$. Тогда $y_1=\dfrac{2a^2}{1+a^4}$ и $y_2=\dfrac{3a^2}{1+a^4}$. Следовательно, прямая пересекает параболу в двух точках: $B\left(-a, \dfrac{2a^2}{1+a^4}\right)$ и $C\left(-2a, \dfrac{3a^2}{1+a^4}\right)$. Итак, получаем фигуру $CmBn$, лежащую над параболой и под прямой на отрезке $-2a \le x \le -a$. Вычислим ее площадь $S(a)$.

Имеем:

$$S(a)=\int_{-2a}^{-a}\left(\frac{a^2-ax}{1+a^4}-\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^4}\right)dx=\frac{-1}{1+a^4}\int_{-2a}^{-a}(x^2+3ax+2a^2)dx=$$

$$=\frac{-1}{1+a^4}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3ax^2}{2}+2a^2x\right)\Bigg|_{-2a}^{-a}=\frac{a^3}{6(1+a^4)}.$$

Надо найти те значения a, при каждом из которых функция $S(a)$ принимает наибольшее значение на множестве $a>0$. Функция $S(a)$ дифференцируема в каждой точке и

$$S'(a)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3a^2(1+a^4)-4a^3\cdot a^3}{(1+a^4)^2}=\frac{a^2(3-a^4)}{(1+a^4)^2}.$$

Уравнение $S'(a)=0$ имеет в области $a>0$ единственный корень $a_1=\sqrt[4]{3}$. На интервале $0<a<\sqrt[4]{3}$ производная $S'(a)$ положительна, в промежутке $\sqrt[4]{3}<a<+\infty$ производная $S'(a)$ отрицательна. Следовательно, функция $S(a)$ возрастает на промежутке $0<a<\sqrt[4]{3}$ и убывает на промежутке $\sqrt[4]{3}<a<+\infty$. Так как функция $S(a)$ непрерывна в точке $a=\sqrt[4]{3}$, то она в этой точке принимает наибольшее значение. Это значит, что при $a=\sqrt[4]{3}$ данная фигура имеет наибольшую площадь.

Ответ: $a=\sqrt[4]{3}$.

IV. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Целые числа

Вариант 1. Докажите, что: а) если p — простое число и $p > 3$, то $p^2 - 1$ делится на 24; б) если $a + b + c$ делится на 6, то $a^3 + b^3 + c^3$ делится на 6 (a, b, c — целые числа).

Вариант 2. Докажите, что: а) если $a^2 + b^2$ делится на 7, то $a^2 + b^2$ делится и на 49 (a и b — целые числа); б) число $n^2 + 5n + 16$ ни при каком целом n не делится на 169.

Вариант 3. При каких целых a оба корня уравнения $x^2 + ax + 6 = 0$ являются целыми числами?

Вариант 4. Найдите число делителей числа 1024.

Вариант 5. Найдите число делителей числа 210.

Вариант 6. Найдите число делителей числа 10!.

Вариант 7. Какие остатки могут давать точные квадраты при делении на 3, на 4?

Вариант 8. Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами равняться 23?

Вариант 9. Длины всех сторон прямоугольного треугольника — целые. Могут ли длины катетов быть нечетными числами?

Вариант 10. В десятичной записи 12-значного числа N цифры 2 и встречаются по 2 раза, а остальные — по одному разу. Может ли N быть точным квадратом?

Вариант 11. В десятичной записи числа 300 единиц и несколько нулей (а других цифр нет). Может ли это число быть точным квадратом?

Вариант 12. 1987-значное число a делится на 9. Сумма цифр a — число b, сумма цифр b — число c, сумма цифр c — число d. Найдите d.

Вариант 13. Решите в целых числах уравнение $3^x = 1 + y^2$.

Вариант 14. Решите в целых числах уравнение $2^x - 1 = y^2$.

Вариант 15. Решите в целых числах уравнение $x^2 - y^2 = 91$.

Вариант 16. Решите в целых числах уравнение $2^x + 1 = y^2$.

Вариант 17. Решите в целых числах уравнение $13x - 7y = 6$.

Вариант 18. Решите в целых числах уравнение $x! + y! = (x + y)!$.

Вариант 19. Решите в целых числах уравнение $27x - 9y = 15$.

Вариант 20. Решите в целых числах уравнение $1! + 2! + \ldots + x! = y^2$.

Вариант 21. На какие целые k можно сократить дробь $\dfrac{5l+6}{3l+1}$, где l — целое число?

Вариант 22. Дано: lg 16 = 1,20412.. .. Найдите количество цифр и первую цифру числа 125^{100}.

2. Метод математической индукции

Вариант 1. Докажите равенство методом математической индукции: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Вариант 2. Докажите равенство методом математической индукции: $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

Вариант 3. Докажите равенство методом математической индукции: $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$.

Вариант 4. Докажите равенство методом математической индукции: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

Вариант 5. Докажите равенство методом математической индукции: $\dfrac{1}{4 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 6} + \dfrac{1}{6 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(n+3)(n+4)} = \dfrac{n}{4(n+4)}$.

Вариант 6. Докажите равенство методом математической индукции: $2^2 + 6^2 + 10^2 + \ldots + (4n-2)^2 = \dfrac{4n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

Вариант 7. Докажите равенство методом математической индукции: $\frac{7}{1\cdot 8}+\frac{7}{8\cdot 15}+\frac{7}{15\cdot 22}+...+\frac{7}{(7n-6)(7n+1)}=1-\frac{1}{7n+1}$.

Вариант 8. Докажите равенство методом математической индукции: $\frac{1}{4\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 16}+...+\frac{1}{4n(4n+4)}=\frac{1}{16}-\frac{1}{16(n+1)}$.

Вариант 9. Докажите методом математической индукции неравенство ($n\in N$): $|\sin nx|\le n|\sin x|$.

Вариант 10. Докажите методом математической индукции неравенство ($n\in N$): $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}>1$.

Вариант 11. Докажите методом математической индукции неравенство: $(1+h)^n>1+nh$ для любого натурального $n\ge 2$, $h>-1$ и $h\ne 0$ (неравенство Бернулли).

Вариант 12. Докажите методом математической индукции неравенство: $(1+h)^n>1+nh+\frac{n(n-1)}{2}n^2$ для любого натурального $n\ge 3$ и $h>0$.

Вариант 13. Докажите методом математической индукции, что для натурального *n*: $6^{2n-1}+1$ кратно 7.

Вариант 14. Докажите методом математической индукции, что для натурального *n*: $3^{3n+2}+2^{4n+1}$ кратно 11.

Вариант 15. Докажите методом математической индукции, что для натурального *n*: $4^n+15n-1$ кратно 9.

Вариант 16. Докажите методом математической индукции, что для натурального *n*: $7^{2n}-1$ кратно 48.

Вариант 17. Докажите методом математической индукции, что *n* прямых общего положения (т.е. никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку), лежащих в одной плоскости, делят ее на $1+\dfrac{n(n+1)}{2}$ частей.

Вариант 18. Докажите методом математической индукции, что n плоскостей общего положения (т.е. никакие две не параллельны, никакие три не проходят через одну прямую, никакие четыре – через одну точку, никакие две линии пересечения этих плоскостей не параллельны) делят пространство на $\dfrac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$ частей.

Вариант 19. Доказать формулу Муавра
$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$

Вариант 20. Доказать, что при любом целом положительном n величина $a_n=\dfrac{a^n-b^n}{\sqrt{5}}$, где $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, есть число целое, положительное.

Вариант 21. Доказать, что если действительные числа $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ удовлетворяют условию $-1\le a_i\le 0, i=1, 2, ...$, то при всяком n имеет место неравенство $(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)\ge 1+a_1+a_2+...+a_n$.

Вариант 22. Обобщенная n-ая степень любого числа a, обозначаемая символом $(a)_n$, определяется для целых неотрицательных n так: если $n = 0$, то $(a)_n=1$, если $n > 0$, то $(a)_n=a(a-1)...(a-n+1)$. Доказать, что для обобщенной степени суммы двух чисел справедлива формула бинома Ньютона $(a+b)_n=C_n^0(a)_0(b)_n+C_n^1(a)_1(b)_{n-1}+...+C_n^n(a)_n(b)_0$.

3. Преобразование выражений

Вариант 1. Разложите на множители: а) x^4+4; б) x^4+x^2+1; в) x^5+x+1.

Вариант 2. Разложите на множители:
$(x^2+y^2)^3+(z^2-x^2)^3-(y^2+z^2)^3$.

Вариант 3. Разложите на множители: $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

Вариант 4. Разложите на множители: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Вариант 5. Докажите тождество:

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2$.

Вариант 6. Докажите тождество:

$$(b+c-a)^3 + (c+a-b)^3 + (a+b-c)^3 - 3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = \\ = 4(a^3+b^3+c^3-3abc).$$

Вариант 7. Докажите формулу:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Вариант 8. Докажите формулу:

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Вариант 9. Известно, что $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, причем α, β, γ положительны. Докажите тождество: $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

Вариант 10. Известно, что $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, причем α, β, γ положительны. Докажите тождество:

$cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

Вариант 11. Известно, что $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, причем α, β, γ положительны. Докажите тождество:

$cos2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

Вариант 12. Известно, что $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, причем α, β, γ положительны. Докажите тождество:

$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

Вариант 13. Докажите равенство: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ для любого $x \in [-1; 1]$.

Вариант 14. Докажите равенство: $\mathrm{arc}\,tgx + \mathrm{arcc}\,tgx = \frac{\pi}{2}$.

Вариант 15. Докажите равенство: $\cos(arctgx) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Вариант 16. Докажите равенство: $tg(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ для любого $x \in [-1;1]$ и $x \neq 0$.

Вариант 17. Вычислите: $\frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3}\sin 250^\circ}$.

Вариант 18. Вычислите: $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = m$.

Вариант 19. Вычислите: $\cos 84^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ \cos 12^\circ$.

Вариант 20. Вычислите: $\cos^8\alpha - \sin^8\alpha$, если $\cos 2\alpha = m$.

Вариант 21. Вычислите: $\arcsin(\sin 10)$, $\arccos(\cos 12)$.

Вариант 22. Вычислите: $\mathrm{arc}\,tg(tg2)$, $\mathrm{arcc}\,tg(\mathrm{c}tg3)$.

4. Прогрессии

Вариант 1. Решите в целых числах уравнение

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \frac{x-3}{x} + \ldots + \frac{1}{x} = 3.$$

Вариант 2. Докажете справедливость равенства

$$1 - tg\varphi + tg^2\varphi - tg^3\varphi + \ldots = \frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}$$ для любого $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Вариант 3. Сумма четырех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна — 40, а сумма их квадратов равна 3280. Найди эти числа.

Вариант 4. Найдите трехзначное число, если его цифры образуют геометрическую прогрессию, а цифры числа, меньшего данного на 400, — арифметическую.

Вариант 5. При каком значении a найдутся такие x, что числа $5^{1+x}+5^{1-x}$, $\frac{a}{2}$, 25^x+25^{-x} (в указанном порядке) составляют арифметическую прогрессию?

Вариант 6. Числа x, y, z (в указанном порядке) образуют геометрическую прогрессию, а числа $x + y$, $y + z$, $z + x$ — арифметическую. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Вариант 7. Известно, что суммы первых m и n членов арифметической прогрессии равны, т. е. $S_m = S_n$. Найдите S_{m+n}.

Вариант 8. Найдите произведение первых n членов геометрической прогрессии, если известна их сумма A и сумма обратных к ним величин B ($B \neq 0$).

Вариант 9. Члены арифметической (a_n) и геометрической (b_n) прогрессий удовлетворяют условиям $a_{40}=b_{40}>0, a_{60}=b_{60}>0$. Что больше: a_{50} или b_{50}?

Вариант 10. Найдите сумму: $1+11+\ldots+\underbrace{111\ldots1}_{n\ \text{единиц}}$.

Вариант 11. Найдите сумму: $x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n$.

Вариант 12. Найдите сумму:

$$\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\ldots+\frac{1}{(k+n-1)(k+n)}.$$

Вариант 13. Найдите сумму: $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$.

Вариант 14. Найти первый член геометрической прогрессии, если ее третий член равен (-10), а его квадрат в сумме с седьмым членом дает утроенный пятый член.

Вариант 15. Какое наибольшее число членов может содержаться в конечной арифметической прогрессии с разностью 4 при условии, что квадрат ее первого члена в сумме с остальными членами не превосходит 100?

Вариант 16. Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. Сумма их первых членов равна (-3), сумма третьих членов равна 1, а сумма пятых членов равна 5. Найти разность арифметической прогрессии.

Вариант 17. Найдите все возможные значения суммы убывающей арифметической прогрессии

$$a_1 = \frac{6m - m^2 - 9}{6m - m^2}, a_2 = \frac{6m - m^2 - 12}{6m - m^2}, \ldots, a_n = \frac{(-10)}{6m - m^2},$$

где m – некоторое целое число.

Вариант 18. Числа a, b, c и d являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $a + d = 10, a \cdot d = 7$. Найти $b^3 + c^3$.

Вариант 19. Второй член арифметической прогрессии в четыре раза больше четвертого члена, а сумма первых шести членов равна 21. Сумма какого числа первых членов прогрессии равна -261?

Вариант 20. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ определяется следующим правилом: $a_1 = 0,\quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2, \textit{ если число n нечетное}, \\ 2a_n, \textit{ если число n четное}, \end{cases}$ т.е. $a_2 = 9, a_3 = 4, a_5 = 12, a_6 = 14$ и т.д. Найти a_{1999}.

Вариант 21. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ устроена следующим образом: $a_1 = 1$, каждое последующее число равно удвоенной сумме предыдущих чисел, т.е. $a_2 = 2a_1, a_3 = 2(a_1 + a_2)$ и т.д. Найти произведение всех чисел от a_1 до a_{2001}.

Вариант 22. Дана арифметическая прогрессия $a_1, \ldots, a_{81}$ с первым членом $a = \frac{\pi}{4}$ и разностью $\frac{3\pi}{10}$. Найдите количество членов a_n этой прогрессии, при каждом из которых система $\begin{cases} x \sin a_n + y \cos a_n = 1, \\ x tg a_n - y ctg a_n = 1, \end{cases}$ не имеет решений.

5. Исследование функций

Вариант 1. Найдите область определения функций: а) $y=\frac{\sqrt{|x|-x}}{tg2x}$; б) $y=\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{\cos x}$.

Вариант 2. Найдите область определения функций: а) $y=\frac{\arcsin 0,5x}{\sqrt{x^2-1}}$; б) $y=\sqrt{\cos(\sin x)}$.

Вариант 3. Найдите область определения функций: а) $y=\log_{2\sin x}\cos x$; б) $y=\frac{1}{\lg(1-\sqrt{x^2-1})}$.

Вариант 4. Найдите область значения каждой из функций: а) $y=\cos^2 x-\cos x$; б) $y=\sqrt{1-\sin x ctgx}$.

Вариант 5. Найдите область значения каждой из функций: а) $y=3\cos x-4\sin x-1$; б) $y=\frac{1}{tg^2\frac{x}{2}+2}$.

Вариант 6. Найдите область значения каждой из функций: а) $y=\cos^2 x+\cos^4 x$; б) $y=[x]^2$.

Вариант 7. Найдите область значения каждой из функций: а) $y=3\sin^2 x-4\sin x-2$; б) $y=\left\{\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}\right\}$.

Вариант 8. Является ли четной (или нечетной) функция: а) $y=\frac{e^{-x}-1}{e^x+1}$; б) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$?

Вариант 9. Является ли четной (или нечетной) функция: а) $y=\frac{\sqrt[3]{(x+5)^2}-\sqrt[3]{(x-5)^2}}{x\cos x}$; б) $y=\log_a\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$?

Вариант 10. Докажите, что для любой функции f с симметричной относительно точки O областью определения функция $y=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ четная, а функция $y=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ нечетная.

Вариант 11. Докажите, что любая функция с симметричной относительно точки O областью определения представляется (притом единственным образом) в виде суммы четной и нечетной функций.

Вариант 12. Найдите все функции, являющиеся одновременно четными и нечетными.

Вариант 13. Функции f и g периодические с общим периодом T. Докажите, что функции $y=f(x)+g(x)$ и $y=f(x)\cdot g(x)$ являются периодическими с периодом T.

Вариант 14. Докажите, что сумма двух непрерывных периодических функций, определенных на всей числовой прямой и не имеющих общих периодов, не является периодической.

Вариант 15. Докажите, что функция не является периодической: а) $y=\cos x\cos(x\sqrt{2})$; б) $y=\cos x+\cos(x\sqrt{2})$.

Вариант 16. Докажите, что функция не является периодической: а) $y=\sin x^2$; б) $y=\sin\sqrt{x}$.

Вариант 17. Найдите наименьший положительный период функции: а) $y=\cos^3 x$; б) $y=\sqrt{|\sin 2x|}$.

Вариант 18. Найдите наименьший положительный период функции: а) $y=\cos(x\sqrt{2})+\cos\dfrac{x}{\sqrt{2}}$; б) $y=\{-1-2x\}$.

Вариант 19. Докажите, что функция не является периодической: а) $y=\sqrt{x}$; б) $y=\sin|x|$.

Вариант 20. Докажите, что функция не является периодической: а) $y=x^2+x+1$; б) $y=\sin x+\sin(x\sqrt{2})$.

Вариант 21. Сравните числа: а) $\log_2 3$ и $\log_5 8$; б) $\log_9 10$ и $\lg 11$.

Вариант 22. Сравните числа: а) $2^{3^{100}}$ и $3^{2^{150}}$; б) $\operatorname{cosec}\frac{1}{2}$ и $4\left(1-\sin\frac{1}{2}\right)$.

6. Графики функций

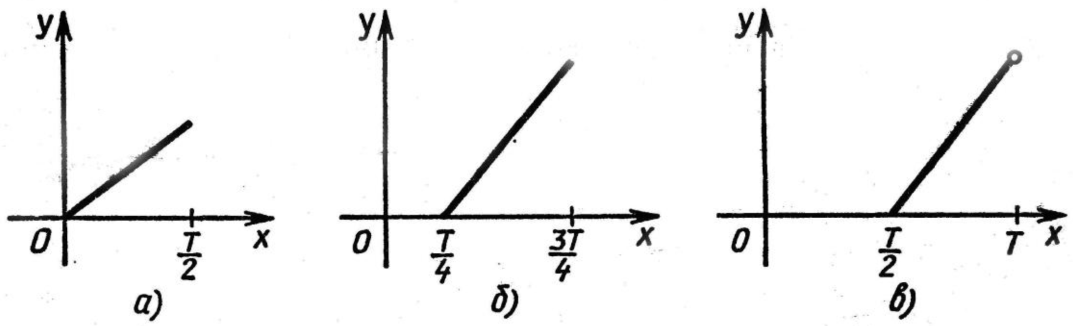


Рис. 5

Вариант 1. Дополните (если это возможно) графики функций, изображенных на рисунке 5, до графиков периодических функций с наименьшим положительным периодом *T*, являющихся при этом: а) четными; б) нечетными.

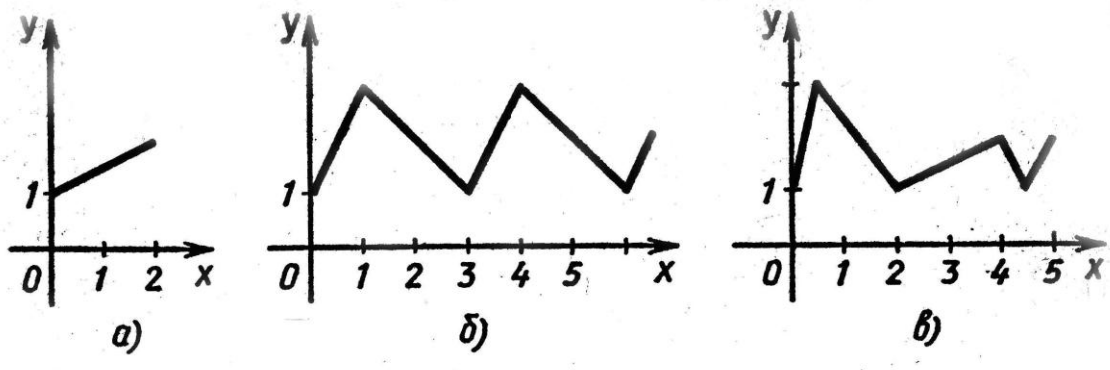


Рис. 6

Вариант 2. На рисунке 6 изображена часть графика периодической функции, определенной на всей числовой прямой. Каким может быть наименьший положительный период функции *f*?

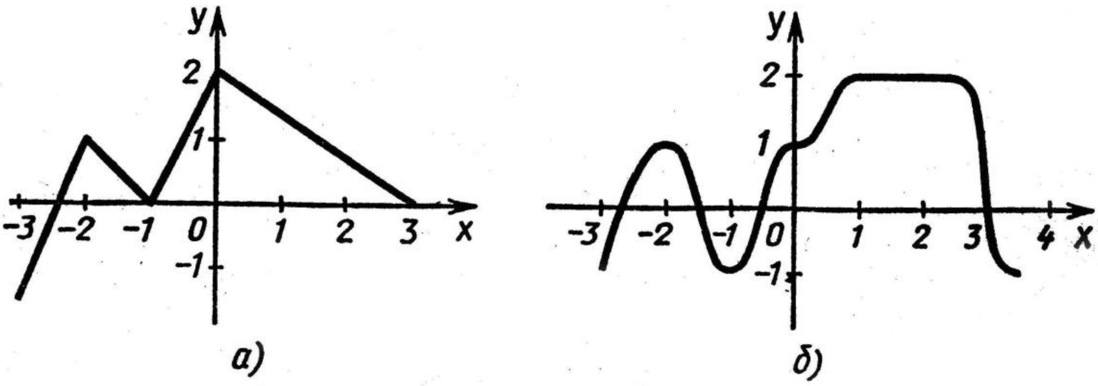


Рис. 7

Вариант 3. Дан график функции $y = f(x)$ (рис. 7). Постройте эскиз графика функции: 1) $y = f(-2x)$; 2) $y = f(|x|)$; 3) $y = f(1-x)$; 4) $y = |f(x)|$.

Вариант 4. Дан график функции $y = f(x)$ (рис. 3). Постройте эскиз графика функции: 1) $y = -2f(x)$; 2) $y = \dfrac{1}{f(x)}$; 3) $y = f(2x+4)$; 4) $y = -f(-|x|)$.

Вариант 5. Найдите последовательность преобразований, с помощью которых из графика функции f может быть получен график функции φ: а) $f(x) = \sin x, \varphi(x) = \sin x + \cos x$; б) $f(x) = \sin^2 x, \varphi(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

Вариант 6. Докажите, что график любой дробно-линейной функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$) может быть получен из графика $y = \dfrac{k}{x}$ параллельным переносом. Укажите коэффициент k.

Вариант 7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции (на R): а) $y = 2\cos 2x + \sin^2 x$; б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - 4x + 3}}$.

Вариант 8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции (на R): а) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x$; б) $y = \cos^2 x + \cos x + 3$.

Вариант 9. Найдите промежутки возрастания (убывания), максимумы и минимумы функции: а) $y = 2\sin x - 3\cos x$; б) $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$.

Вариант 10. Найдите промежутки возрастания (убывания), максимумы и минимумы функции: а) $y = \cos 2x - 2\cos x$; б) $y = \lg \sin x$.

Вариант 11. Найдите асимптоты графика функции: а) $y = \dfrac{x}{x-2}$; б) $y = \dfrac{x^2}{|x|+1}$; в) $y = \dfrac{x^2+4}{x^2-9}$.

Вариант 12. Постройте график каждой из функций: а) $y = \sin(\arcsin x)$; б) $y = \arcsin(\sin x)$.

Вариант 13. Постройте график каждой из функций: а) $y = \cos(2\arccos x)$; б) $y = \mathrm{arc}\,tg(tgx)$.

Вариант 14. Найдите с помощью эскизов графиков число решений уравнения: а) $\sin x = 100x$; б) $\arcsin x = x$.

Вариант 15. Найдите с помощью эскизов графиков число решений уравнения: а) $\lg x = \cos x$; б) $x^2 + tg^2 x = 100$.

Вариант 16. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют заданному условию: а) $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1} \le 0$; б) $|x| + |y| = 4$.

Вариант 17. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют заданному условию: а) $\sqrt{x+y} \ge |x|$; б) $\dfrac{xy+1}{xy-1} \ge \dfrac{y+1}{y-1}$.

Вариант 18. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют заданному условию: а) $y^2 + \cos^2 x = 1$; б) $x^2 + y^2 = x^2y^2 + 1$.

Вариант 19. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют заданному условию: $|y| = \log_{\frac{1}{3}} \big||x+2| - 1\big|$.

Вариант 20. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют заданному условию: а) $\sqrt{x+y} \geq \sqrt{|x|}$; б) $|x|-|y|<a$.

Вариант 21. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют заданному условию: а) $[x] \leq [y]$; б) $\{x\} \geq \{y\}$.

Вариант 22. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют заданному условию: а) $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$; б) $\sin x > \sin y$.

7. Алгебраические уравнения

Вариант 1. Найдите значения *a*, при которых данное уравнение имеет решение. Найдите знаки корней:

а) $x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0$; б) $(a-3)x^2 - 2(3a-4)x + 7a - 6 = 0$.

Вариант 2. Для каких значений *a* один из корней уравнения $(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ больше 3, а другой меньше 2?

Вариант 3. Найдите все значения *a*, при которых оба корня уравнения $(2a+3)x^2 + (a+1)x + 4 = 0$ принадлежат отрезку [—2; 0].

Вариант 4. Числа x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$. Выразите через *p* и *q*: а) $x_1^2 + {}_2^2$; б) $x_1^3 + {}_2^3$; в) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$; г) $x_1^4 + {}_2^4$.

Вариант 5. Сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 4x + p = 0$ равна 16. Найдите *p*.

Вариант 6. При каком значении *a* сумма корней уравнения $x^2 + 2a(x-1) + 1 = 0$ равна сумме квадратов этих корней?

Вариант 7. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней, причем $a + b + c < 0$. Определите знак *c*.

Вариант 8. Решите уравнения: а) $2x^3 - x^2 + x + 1 = 0$;

б) $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = 40$.

Вариант 9. Решите уравнения: а) $10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$;

б) $(x-1)^5 + (x+3)^5 = 242(x+1)$.

Вариант 10. Решите уравнения: а) $x^4 + x^3 + x^2 - x - 2 = 0$;

б) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 100$.

Вариант 11. Решите уравнения: а) $2x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 7x - 6 = 0$;

б) $x^4 + (x+2)^4 = 17$.

Вариант 12. Решите уравнения: а) $\dfrac{1}{x(x+2)} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{12}$;

б) $6 - \dfrac{21}{x^2 - 4x + 10} = 4x - x^2$.

Вариант 13. Решите уравнения: а) $\dfrac{1}{(x+2)(x-7)} + \dfrac{2}{(x-2)(x-3)} = 1$;

б) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) = -30$.

Вариант 14. Решите уравнения: а) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 6$;

б) $\dfrac{6x}{x^2 + 2x + 3} + \dfrac{11x}{x^2 + 7x + 3} = 2$.

Вариант 15. Решите уравнения: а) $x^4 - 2x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 - 2x + 1 = 0$;

б) $2x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$.

Вариант 16. Решите уравнения: а) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0$;

б) $x^4 - 4x^3 - 18x^2 - 12x + 9 = 0$.

Вариант 17. Решите уравнения: а) $8x^4 + 8x^3 - x - 190 = 0$;

б) $4x^4 - 4x^3 + \dfrac{x}{2} = 66$.

Вариант 18. Решите уравнения: а) $x^4 + 4x - 1 = 0$; б) $x^4 - 4x^3 - 1 = 0$.

Вариант 19. Решите уравнения:

а) $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$;

б) $(x^2-x+1)^2+2(x^3+1)=(x+1)^2$.

Вариант 20. Решите уравнения: а) $x^2+\dfrac{9x^2}{(3+x)^2}=7$; б) $x^2+|x|-2=0$.

Вариант 21. Решите уравнения: а) $x^2+\dfrac{x^2}{(1+x)^2}=1$;

б) $x^2-2x-3=|3x-3|$.

Вариант 22. Решите уравнения: а) $2|x+6|-|x|-|x-6|=18$;

б) $|2x-3|=|x^2-2x-6|$.

8. Алгебраические неравенства

Вариант 1. Решите неравенства: а) $\dfrac{3(x-1)(x+2)^2}{(x^2+1)(x+1)^2(x-2)}\geq 0$;

б) $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)\geq 5$.

Вариант 2. Решите неравенства: а) $x^4+3x^3+2x^2+3x+1>0$;

б) $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)\geq 17$.

Вариант 3. Решите неравенства: а) $x^{18}-x^{13}+x^{10}-x^7+x^2-x+1>0$;

б) $x^{12}-x^9+x^4-x+1<0$.

Вариант 4. Решите неравенства: а) $|x^2-2x|<x$; б) $3x^2-|x-3|>9x-2$.

Вариант 5. Докажите неравенство: а) $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ $(a>0, b>0)$;

б) $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$ $(a>0)$.

Вариант 6. Докажите неравенство:

а) $\dfrac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}$ $(a>0, b>0, c>0, d>0)$;

б) $\dfrac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$ $(a>0, b>0, c>0)$.

Вариант 7. Докажите неравенство: а) $a^2+b^2+c^2 \ge ab+ac+bc$;
б) $(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc\ (a\ge 0, b\ge 0, c\ge 0)$.

Вариант 8. Докажите неравенство: а) если $a+b+c=1$, то $a^2+b^2+c^2 \ge \frac{1}{3}$; б) $a^4+b^4+c^4 \ge abc\,(a+b+c)$.

Вариант 9. Докажите неравенство: а) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}$; б) $(a+b)(a^3+b^3) \le 2\,(a^4+b^4)$.

Вариант 10. Докажите неравенство: а) $5a^2-6ab+5b^2>0\ (a^2+b^2\ne 0)$;
б) $\sqrt{(a+c)(b+d)} \ge \sqrt{ab}+\sqrt{cd}\ (a\ge 0, b\ge 0, c\ge 0, d\ge 0)$.

Вариант 11. Докажите неравенство
$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a-\ln b} < \frac{a+b}{2}\ (a>0, b>0, a\ne b)$.

Вариант 12. Решите неравенство $\left|x^9-x\right|+\left|x^8-x^7\right| \le \left|x^9-x^8+x^7-x\right|$.

Вариант 13. Доказать, что для любых действительных чисел p и t справедливо неравенство $6(4p+3)^4+3+(3-6(4p+3)^4)\sin t \ge 0$, и найти все пары чисел (p, t), для которых это неравенство превращается в равенство.

Вариант 14. Доказать, что для любых действительных чисел p и t справедливо неравенство $(5p+2)^4+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-(5p+2)^4\right)\sin\frac{t}{2} \ge 0$, и найти все пары чисел (p, t), для которых это неравенство превращается в равенство.

Вариант 15. Доказать, что для любых действительных чисел p и t справедливо неравенство $4(p-3)^4+2+(2-4(p-3)^4)\cos t \ge 0$, и найти все пары чисел (p, t), для которых это неравенство превращается в равенство.

Вариант 16. Доказать, что для любых действительных чисел p и t справедливо неравенство $2(2p-1)^4+1+(1-2(2p-1)^4)\sin 2t \ge 0$, и найти все пары чисел (p, t), для которых это неравенство превращается в равенство.

Вариант 17. Найти все значения параметра b, при каждом из которых неравенство $\cos^2 x + 2b\sin x - b^2 < b - 2$ выполняется для любого числа x.

Вариант 18. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a^2 + a - \sin^2 x - 2a\cos x > 1$ выполняется для любого числа x.

Вариант 19. Найти все значения параметра b, при каждом из которых неравенство $\cos^2 x + 2b\sin x - 2b < b^2 - 4$ выполняется для любого числа x.

Вариант 20. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a\cos x > 2$ выполняется для любого числа x.

Вариант 21. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\sin^2 x - 6 + 4a + a(5 - \cos^4 x)^2 < 0$ выполняется для любого числа x.

Вариант 22. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $2a - 4 + a(3 - \sin^2 x)^2 + \cos^2 x < 0$ выполняется для любого числа x.

9. Системы алгебраических уравнений

Вариант 1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = 3a^3, \\ (x+y)(x^2+y^2) = 15a^3. \end{cases}$

Вариант 2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy + 15 = 0. \end{cases}$

Вариант 3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} u + v = 2, \\ |3u - v| = 1. \end{cases}$

Вариант 4. Решите систему уравнений: $\begin{cases} |x-1| + |y-2| = 1, \\ y + |x-1| = 3. \end{cases}$

Вариант 5. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + y - z = 2, \\ 2x - y + 4z = 1, \\ -x + 6y - z = 5. \end{cases}$

Вариант 6. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x+y+z=-2, \\ x-y+2z=-7, \\ 2x+3y-z=1. \end{cases}$

Вариант 7. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x+y=3, \\ x^4+y^4=17. \end{cases}$

Вариант 8. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x+y+xy=0, \\ x^3+y^3+x^3y^3=12. \end{cases}$

Вариант 9. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x-y+xy=17, \\ x^2+y^2=34. \end{cases}$

Вариант 10. Решите систему уравнений: $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=10, \\ (x-y)(xy+1)=-3. \end{cases}$

Вариант 11. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2-3y^2-2xy=0, \\ x^2-2x+y^2=6. \end{cases}$

Вариант 12. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x+y=z, \\ y^2+z^2=13x^2, \\ 2(x^2+z^2)=zy^2. \end{cases}$

Вариант 13. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2-y^2=3, \\ x^2+xy+y^2=7. \end{cases}$

Вариант 14. Решите систему уравнений: $\begin{cases} (x^2+y^2)\dfrac{x}{y}=6, \\ (x^2-y^2)y=x. \end{cases}$

Вариант 15. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^3-y^3=19(x-y), \\ x^3+y^3=7(x+y). \end{cases}$

Вариант 16. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^3=5x+y, \\ y^3=x+5y. \end{cases}$

Вариант 17. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2+y+z=2, \\ x+y^2+z=2, \\ x+y+z^2=2. \end{cases}$

Вариант 18. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2+2yz=1, \\ y^2+2xz=2, \\ z^2+2xy=1. \end{cases}$

Вариант 19. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\right)=15, \\ 3y\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\right)=20, \\ 6z\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)=13. \end{cases}$

Вариант 20. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{6}{5}, \\ \dfrac{xz}{x+z}=\dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{zy}{z+y}=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

Вариант 21. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^3+y^3-z^3-xyz=-4, \\ x^3-y^3+z^3-xyz=8, \\ -x^3+y^3+z^3-xyz=-2. \end{cases}$

Вариант 22. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 4x^2+4y+1=0, \\ 4y^2+4z+1=0, \\ 4z^2+4x+1=0. \end{cases}$

10. Задачи на составление уравнений и их систем

Вариант 1. Две точки двигаются по окружности длиной 1,2 м с постоянными скоростями. Если они двигаются в разных направлениях, то встречаются через каждые 15 с. При движении в одном направлении одна точка догоняет другую через каждые 60 с. Найдите скорость каждой точки.

Вариант 2. Сумма цифр трехзначного числа равна 17, а сумма их квадратов 109. Если из данного числа вычесть 495, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите число.

Вариант 3. Пассажир метро спускается по движущемуся эскалатору за 24 с. Если же он идет по неподвижному эскалатору с той же скоростью, то спустится вниз за 42 с. За какое время пассажир спустится вниз, стоя на ступеньках движущегося эскалатора?

Вариант 4. Три пункта A, B и C соединены прямолинейными дорогами. К отрезку дороги AB примыкает квадратное поле со стороной, равной $\frac{1}{2}AB$, к отрезку дороги BC примыкает квадратное поле со стороной, равной BC, а к отрезку дороги AC примыкает прямоугольный участок леса длиной, равной AC, и шириной 4 км. Площадь леса на 20 $км^2$ больше суммы площадей квадратных полей. Найдите площадь леса.

Вариант 5. Для награждения победителей школьной олимпиады было закуплено несколько одинаковых книг и одинаковых значков. За книги заплатили 10 р. 56 к., за значки — 56 к. Книг купили на 6 штук больше, чем значков. Сколько было куплено книг?

Вариант 6. Школьник затратил некоторую сумму денег на покупку портфеля, авторучки и книги. Если бы портфель стоил в 5 раз дешевле, авторучка — в 2 раза дешевле, а книга — в 2,5 раза дешевле, чем на самом деле, те та же покупка стоила бы 8 р. Если бы портфель стоил в 2 раза дешевле, книга — в 3 раза дешевле, а авторучка — в 4 раза дешевле, то за ту же покупку школьник уплатил бы 12 р. Сколько стоит вся покупка и за что было уплачено больше: за портфель или за авторучку?

Вариант 7. Имеются три куска различных сплавов золота с серебром. Известно, что количество золота в 2 г сплава из третьего куска то же, что во взятых вместе 1 г из первого и 1 г из второго куска. Масса третьего куска равна суммарной массе части первого куска, содержащей 10 г золота, и части второго куска, содержащей 80 г золота. Третий кусок, масса которого в 4 раза больше первого, содержит 75 г золота. Сколько граммов золота содержится в первом куске?

Вариант 8. Из пункта A в пункт B в 8 ч утра выходит скорый поезд. В этот же момент из B в A выходят пассажирский и курьерский поезда, причем скорость пассажирского поезда в 2 раза меньше скорости курьерского. Скорый поезд прибывает в пункт B в 17 ч 50 мин того же дня, а встречает курьерский поезд не ранее 10 ч 30 мин утра. Найдите время прибытия пассажирского поезда в пункт A, если известно, что между моментами встреч скорого поезда с курьерским и скорого поезда с пассажирским проходит не менее часа.

Вариант 9. Самолет совершает посадку и движется по земле в течение некоторого времени равномерно со скоростью v. Затем летчик включает тормоза, и движение самолета становится равнозамедленным, причем в каждую секунду скорость уменьшается на 2 м/с. Путь от места приземления до полной остановки равен 4 км. Отношение времени, за которое самолет проходит первые 400 м, к времени, за которое самолет проходит весь путь по земле, равно 4:65. Определите скорость v.

Вариант 10. Из пункта A в пункт B со скоростью 80 км/ч выехал автомобиль, а через некоторое время с постоянной скоростью выехал второй. После остановки на 20 мин в пункте B второй автомобиль поехал с той же скоростью назад, через 48 км встретил первый автомобиль, шедший навстречу, и был на расстоянии 120 км от B в момент прибытия в B первого автомобиля. Найти расстояние от A до места первой встречи автомобилей, если $AB = 480$ км.

Вариант 11. Длина дороги, соединяющей пункты A и B, равна 2 км. По этой дороге курсируют два автобуса. Достигнув пункта A или пункта B, каждый из автобусов немедленно разворачивается и следует без остановок к другому пункту. Первый автобус движется со скоростью 51 км/ч, а второй –

со скоростью 42 км/ч. Сколько раз за 8 часов движения автобусы встретятся а) в пункте B; б) между пунктами A и B, если известно, что первый стартует из пункта A, а второй – из пункта B?

Вариант 12. Первый раствор содержит 20% азотной кислоты и 80% воды, второй – 60% азотной кислоты и 40% воды. Первая смесь была получена из 15 литров первого раствора и некоторого количества второго раствора. Смешав то же самое количество второго раствора с 5 литрами первого, получили вторую смесь. Сколько литров второго раствора было использовано для приготовления первой смеси, если известно, что процентное содержание воды во второй смеси в два раза больше процентного содержания кислоты в первой?

Вариант 13. Пункты A, B и C расположены на реке в указанном порядке вниз по течению. Расстояние между A и B равно 4 км, а между B и C – 14 км. В 12.00 из пункта B отплыла лодка и направилась в пункт A. Достигнув пункта A, она сразу же повернула назад и в 14.00 прибыла в пункт C. Скорость течения реки равна 5 км/ч. Найти скорость лодки в стоячей воде.

Вариант 14. Имеется некоторое количество раствора соли в воде. После испарения из раствора двух литров воды концентрация соли возросла на 20%, а после разведения получившегося раствора десятью литрами воды концентрация соли стала в два раза меньше первоначальной. Найти концентрацию соли в исходном растворе, считая массу одного литра воды равной 1 кг.

Вариант 15. Из пункта A в пункт B выехал первый мотоциклист. Одновременно с ним с такой же скоростью из B в A выехал второй мотоциклист. Через некоторое время первый мотоциклист увеличил скорость на 5 км/ч. Если бы первый мотоциклист сразу двигался с увеличенной скоростью, то его встреча со вторым мотоциклистом состоялась бы на 2 часа раньше. Известно, что расстояние между A и B равно 1100 км, в момент изменения скорости первым мотоциклистом расстояние между ним и вторым мотоциклистом было больше 200 км, на весь путь из A в B первый мотоциклист затратил 42 часа. Найти первоначальную скорость мотоциклистов.

Вариант 16. Автомобиль, двигаясь от пункта *A* до пункта *B*, проехал первую треть пути со скоростью v_1, а оставшиеся две трети – со скоростью v_2. На обратном пути автомобиль половину всего времени движения от *B* до *A* проехал со скоростью v_1, а втору половину – со скоростью v_2. Известно, что средняя скорость движения от *A* до *B* в a_1 раз больше средней скорости движения от *B* к *A*. Найдите все значения *a*, при которых задача нахождения отношения скоростей v_2 и v_1 имеет решение.

Вариант 17. Саша и Сережа дважды обменивались марками, причем каждый раз $\frac{1}{7}$ количества марок, имевшегося (на момент обмена) у Саши, обменивалось на половину количества марок, имевшегося у Сережи. Сколько марок было у Саши и сколько у Сережи до первого обмена, если после первого обмена у Саши было 945 марок, а после второго обмена у Сережи – 220?

Вариант 18. В двух коробках лежат карандаши: в первой красные, во второй – синие. Известно, что красных карандашей меньше, чем синих. Сорок процентов карандашей из первой коробки переложили во вторую. Затем 20% карандашей, оказавшихся во второй коробке, переложили в первую, причем половину из них составляли синие. После этого красных карандашей в первой коробке оказалось на 26 больше, чем во второй, а общее количество карандашей во второй коробке увеличилось по сравнению с первоначальным более чем на 5%. Найти общее количество синих карандашей.

Вариант 19. Два велосипедиста стартуют одновременно из двух точек круговой велотрассы: первый из точки *A*, второй из точки *B* – и едут в противоположных направлениях с постоянными скоростями. Известно, что из первых 15 встреч на трассе после старта только третья и пятнадцатая состоялись в точке *B*. Найти отношение скорости первого велосипедиста к скорости второго, если известно, что к моменту их пятой встречи каждый из велосипедистов проехал не менее одного круга.

Вариант 20. Из аэропорта одновременно вылетают два самолета и сразу набирают скорость и высоту. Они летят по замкнутым круговым маршрутам. Первый – по окружности радиуса R, а второй – по окружности радиуса r. Предполагается, что самолеты летят безостановочно с одинаковыми постоянными скоростями, и каждый из них облетает свою окружность за целое число часов. Кроме того, на ранее, чем через 43 часа, и не позднее, чем через 49 часов после вылета, произошли следующие два события: первый самолет облетел свою окружность 5 раз, и разрыв во времени между этими событиями составил не менее 2 часов. Найти отношение $\frac{r}{R}$.

Вариант 21. Из пункта *A* в пункт *B* с постоянной скоростью двигалась колонна машин. На половине пути у одной из машин произошла поломка, на устранение которой потребовалось $\frac{1}{12}$ часть времени, за которое колонна проходит весь путь. Во сколько раз нужно увеличить скорость отставшей машины для того, чтобы она въехала в *B* одновременно с колонной?

Вариант 22. Катер и яхта, отправляющиеся из портов *A* и *B* навстречу друг другу в 9.00, встречаются в 13.00. Катер и теплоход, отправляющиеся из этих же портов навстречу друг другу в 10.00, также встречаются в 13.00. Определить, на сколько километров отстает к 19.00 яхта от теплохода, если они выйдут из порта *A* в 10.00 в одном направлении. Расстояние между портами *A* и *B* равняется 104 км.

11. Иррациональные уравнения и неравенства

Вариант 1. Решите уравнение и неравенство: а) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$; б) $\sqrt{x^3+233}+\sqrt{x^2-49}-\sqrt{128-x}\le\frac{56}{x}+5$.

Вариант 2. Решите уравнение и неравенство:

а) $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$; б) $\sqrt{4^{x+1}+17}-5>2^x$.

Вариант 3. Решите уравнение и неравенство: а) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1$; б) $\log_2(\sqrt{x+3}-x-1)\le 0$.

Вариант 4. Решите уравнение и неравенство: а) $\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x-1}}+\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}=4\dfrac{1}{4}$; б) $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}>2$.

Вариант 5. Решите уравнение и неравенство: а) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x-1}=1$; б) $\sqrt{9+3^x-2}\ge 9-3^x$.

Вариант 6. Решите уравнение и неравенство: а) $\sqrt[3]{10-x}-\sqrt[3]{3-x}=1$;

б) $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{25}{9}>\dfrac{3x^2+\dfrac{4}{9}}{2\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+\sqrt{x\left(x-\dfrac{8}{3}\right)}}$.

Вариант 7. Решите уравнение и неравенство: а) $x+\sqrt[3]{x}=2$; б) $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\dfrac{35}{12}$.

Вариант 8. Решите уравнение и неравенство:

а) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$; б) $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\dfrac{1}{2}$.

Вариант 9. Решите уравнение и неравенство: а) $\sqrt{1+\cos x}=\sin x$; б) $x^2-2x+3<\sqrt{4-x^2}$.

Вариант 10. Решите уравнение и неравенство: а) $\sqrt{1-2\cos x}=\sin x$;

б) $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}<35-2x$.

Вариант 11. Решите уравнение и неравенство: а) $\sqrt{4-3\cos x}=-2\cos x$;

б) $4x^2+12x\sqrt{1+x}\le 27(1+x)$.

Вариант 12. Решите уравнение и неравенство: а) $\sqrt{2\sin 2x} = -2\sin x$; б) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}+1}{x} \ge 1$.

Вариант 13. Решите уравнение и неравенство:

а) $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} = 2$; б) $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$.

Вариант 14. Решите уравнение и неравенство:

а) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$; б) $x - \sqrt{1-|x|} < 0$.

Вариант 15. Решите уравнение и неравенство: а) $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = 17$; б) $3\sqrt{x} - \sqrt{x+3} > 1$.

Вариант 16. Решите уравнение и неравенство:

а) $\sqrt[4]{x(2-x)} + \sqrt[3]{x^4(2-x)^7(x+3)^5} + \sqrt[6]{(x-2)(x+1)x^2} + \sqrt[5]{(x+2)(x+6)} = 2$;

б) $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$.

Вариант 17. Решите уравнение и неравенство:

а) $\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} = 8\sqrt[3]{(x-1)^2}$; б) $\sqrt{x^2-3x+2} > 2x-5$.

Вариант 18. Решите уравнение и неравенство:

а) $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} = \sqrt[3]{(7+x)(2-x)}$; б) $\left|\sqrt{-2x-4}-3\right| < \left|\sqrt{9+2x}-2\right| + 1$.

Вариант 19. Решите уравнение и неравенство:

а) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$; б) $\dfrac{x-1}{x\sqrt{4+3x-x^2}} > 0$.

Вариант 20. Решите уравнение и систему неравенств:

а) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}$; б) $\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+5x+5} \ge 2, \\ x^2+6x+5 \le 0. \end{cases}$

Вариант 21. Решите уравнение и неравенство: а) $x^2 - 5x - 4\sqrt{x} + 13 = 0$; б) $\sqrt{|1-8x|-2} \le x+1$.

Вариант 22. Решите уравнение и неравенство: а) $\sqrt{4-3\cos x}=-2\cos x$;

б) $\sqrt{x^3+233}+\sqrt{x^2-49}-\sqrt{128-x}\le\frac{56}{x}+5$.

12. Тригонометрические уравнения, неравенства и их системы

Вариант 1. Решите уравнение и неравенство: а) $3+2\sin 2x=tgx+ctgx$;

б) $\sqrt{3}tg^2x-4tgx+\sqrt{3}>0$.

Вариант 2. Решите уравнение и неравенство: а) $tgx-\sin x=1-tgx\sin x$;

б) $\frac{15}{\sin x+1}<11-2\sin x$.

Вариант 3. Решите уравнение и неравенство: а) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$; б) $\frac{2}{tgx+1}<2-tgx$.

Вариант 4. Решите уравнение и неравенство: а) $\sqrt{6\sin x}-2\cos x=0$; б) $tgx+ctgx\ge\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Вариант 5. Решите уравнение и неравенство: а) $|x|\sin x+x=0$; б) $\cos 2x\le\cos 3x-\cos 4x$.

Вариант 6. Решите уравнение и неравенство: а) $\sqrt{\sin x-1}+2x=0$; б) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x\ge 2$.

Вариант 7. Решите уравнение и неравенство: а) $|x|\cos x-x=0$; б) $\sin 2x+2\sin x>0$.

Вариант 8. Решите уравнение и неравенство: а) $\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{-x}}{2}\right)^2=\sin\frac{x}{2}$;

б) $(1+\cos 2x)(tgx-\sqrt{3})>0$.

Вариант 9. Решите уравнение и докажите справедливость неравенства:

а) $\frac{1}{\cos^4 x}-tg^4x=17$; б) $\sqrt{\cos\varphi}<\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}$, если $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

Вариант 10. Решите уравнение и докажите справедливость неравенства: а) $tg3x - tgx = 2(\sin 4x - \sin 2x)$; б) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha \ge \frac{1}{2}$ при любом α.

Вариант 11. Решите уравнение и неравенство:

а) $3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$; б) $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\cos \pi x\right) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вариант 12. Решите уравнение и неравенство: а) $2^{2tg\frac{x}{2} - \cos x} = 4$; б) $\sqrt{5 - 2\sin x} \ge 6\sin x - 1$.

Вариант 13. Решите уравнение и докажите неравенство: а) $\sin 2x + tgx = 2$; б) $\cos\sin x > \sin\cos x$, если $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Вариант 14. Решите уравнение и докажите неравенство: а) $\sin x + ctg\frac{x}{2} = 2$; б) $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$, если A, B и С – углы треугольника.

Вариант 15. Решите уравнение и неравенство: а) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$; б) $2 + \sin x > \frac{1}{1 + x^2}$.

Вариант 16. Решите уравнение и неравенство: а) $2\sin x + 3\cos x = 4$; б) $2 - \cos x > \frac{1}{1 + x^2}$.

Вариант 17. Решите уравнение и докажите неравенство:

а) $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = tgx + ctgx$; б) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, если $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Вариант 18. Решите уравнение и докажите неравенство:

а) $\cos\frac{\pi x}{31}\cos\frac{2\pi x}{31}\cos\frac{4\pi x}{31}\cos\frac{8\pi x}{31}\cos\frac{16\pi x}{31} = \frac{1}{32}$; б) $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$, если $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Вариант 19. Решите уравнение и докажите неравенство: а) $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}$; б) $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, если $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Вариант 20. Решите уравнение и докажите неравенство: а) $\sin^{100} x + \cos^{100} x = 1$; б) $\sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, если $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Вариант 21. Решите уравнение и неравенство: а) $2\cos\frac{x}{10} = 2^x + 2^{-x}$; б) $\arccos(3x) + \arcsin(x+1) \le \frac{7\pi}{6}$.

Вариант 22. Решите уравнение и неравенство:

а) $3\left(\log_2 \sin x\right)^2 + \log_2(1-\cos 2x) = 2$; б) $\sqrt{3}tg^2 x - 4tgx + \sqrt{3} > 0$.

13. Показательные уравнения и неравенства. Смешанные уравнения и неравенства, сводимые к показательным уравнениям и неравенствам

Вариант 1. Решите уравнение и неравенство:

а) $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x = 10$; б) $2^x + 2^{|x|} \ge 2\sqrt{2}$.

Вариант 2. Решите уравнение и неравенство: а) $3^x + 4^x = 25$; б) $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$.

Вариант 3. Решите уравнение и неравенство:

а) $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 4$; б) $a^x < b^{2+x}$.

Вариант 4. Решите уравнение и неравенство:

а) $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 4^x$; б) $\frac{2^{x-1}-1}{2^{x+1}+1} < 2$.

Вариант 5. Решите уравнение и неравенство: а) $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1$; б) $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$.

Вариант 6. Решите уравнение и неравенство: а) $x^{\frac{5}{4}-2\cos 3x}=\sqrt[4]{x}$; б) $9^{\sqrt{x^2-3}}+3<3^{\sqrt{x^2-3}}\cdot\frac{28}{3}$.

Вариант 7. Решите уравнение и неравенство: а) $|x-2|^{10x^2-3x-1}=1$; б) $9^x-2^{\frac{2x+1}{2}}<2^{\frac{2x+7}{2}}-3^{2x-1}$.

Вариант 8. Решите уравнение и неравенство: а) $2^{|x|}=\sin x^2$; б) $2^{\frac{1-x}{x}}<2^{\frac{1-2x}{2x}}+1$.

Вариант 9. Решите уравнение и неравенство: а) $2^{\sin^2 x}+4\cdot 2^{\cos^2 x}=6$; б) $(\sqrt{2}+1)^x+1<2\cdot(\sqrt{2}-1)^x$.

Вариант 10. Решите уравнение и неравенство: а) $3^{\lg tgx}-2\cdot 3^{\lg ctgx+1}=1$; б) $2^{\lg(x^2-1)}\geq(x+1)^{\lg 2}$.

Вариант 11. Решите уравнение и неравенство:

а) $4^{3+2\cos 2x}-7\cdot 4^{1+\cos 2x}=4^{\frac{1}{2}}$; б) $3^{\sqrt{x+1}}>2^{a-1}$ для всех значений a.

Вариант 12. Решите уравнение и неравенство: а) $(2\sin x)^{\cos x}=1$;

б) $26^x+27\geq 9(6-\sqrt{10})^x+3(6+\sqrt{10})^x$.

Вариант 13. Решите систему уравнений и неравенство: а) $\begin{cases}3^{2x}+4^{2y}=82,\\ 3^x-4^y=8;\end{cases}$ б) $2\sqrt{5\cdot 6^x-2\cdot 9^x-3\cdot 4^x}+3^x<2^{x+1}$.

Вариант 14. Решите систему уравнений и неравенство: а) $\begin{cases}\left(2^{x+1}-3\right)\cdot 2^{y-1}=1,\\ \sqrt{3x+y^2}=x+y;\end{cases}$ б) $3^{(x+3)^2}+\frac{1}{9}\leq 3^{x^2-2}+27^{2x+3}$.

Вариант 15. Решите систему уравнений и неравенство: а) $\begin{cases} 2^{\cos x} + 2^{\frac{1}{\cos y}} = 5, \\ 2^{\cos x + \frac{1}{\cos y}} = 4; \end{cases}$ б) $\dfrac{21 - 2^x - 2^{6-x} - \left|3 - 2^x\right|}{5 - \left|3 - 2^x\right|} \geq 1$.

Вариант 16. Решите систему уравнений и неравенство: а) $\begin{cases} 9^{2tgx + \cos y} = 3, \\ 9^{\cos y} - 81^{tgx} = 2; \end{cases}$ б) $\sqrt{17 \cdot 9^x - 4^x} \geq 3^x - 3 \cdot 2^x$.

Вариант 17. Решите уравнение и найдите наибольшее целое число k, удовлетворяющее неравенству: а) $7 \cdot \dfrac{4^{x-2}}{4^x - 3 \cdot 5^x} = 1 + 3 \cdot \left(\dfrac{5}{4}\right)^x$; б) $4 \cdot 3^{2k+1} + 3^k < 1$.

Вариант 18. Решите уравнение и неравенство: а) $6^{\frac{x}{2}} - 3 \cdot 6^{1 - \frac{3x}{2}} = 3 \cdot 6^{-\frac{x}{2}}$; б) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$.

Вариант 19. Решите систему уравнений и неравенство: а) $\begin{cases} 2^{\frac{6}{1-x}} + 2 \cdot 3^{y+1} = 21, \\ 5 \cdot 2^{x+2} - \dfrac{18}{3^{2-y}} = 56; \end{cases}$ б) $3^{4-3x} - 35\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2-3x} + 6 \geq 0$.

Вариант 20. Решите уравнение и неравенство: а) $2^x \cdot 5^{\frac{x+2}{x}} = 100$; б) $\sqrt{2(5^x + 24)} - \sqrt{5^x - 7} \geq \sqrt{5^x + 7}$.

Вариант 21. Решите уравнение и неравенство: а) $5^{2x} = 115 \cdot 5^{x-1} + 50$; б) $(2^x + 2^{3-x})^{2\log_2(x+3) - \log_2(x+9)} < 1$.

Вариант 22. Решите уравнение и неравенство: а) $2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 x} = 6$; б) $2^x + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}$.

14. Логарифмические уравнения и неравенства. Смешанные уравнения и неравенства, сводимые к логарифмическим уравнениям и неравенствам

Вариант 1. Решите уравнение и неравенство:

а) $\sqrt{1+\log_2 x}+\sqrt{4\log_4 x-2}=4$; б) $\log_2\left(1+\log_{\frac{1}{9}} x-\log_9 x\right)<1$.

Вариант 2. Решите уравнение и неравенство:

а) $\log_6 2^{x+3}-\log_6\left|3^x-3\right|=x$; б) $\log_2^2(x-1)^2-\log_{0,5}(x-1)>5$.

Вариант 3. Решите уравнение и неравенство: а) $\log_{\frac{1}{3}}\left(3+\left|\sin x\right|\right)=2^{|x|}-2$; б) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\log_{x-1}9\right)>0$.

Вариант 4. Решите уравнение и неравенство:

а) $\sqrt[3]{1+\lg tgx}+\sqrt[3]{1-\lg tgx}=2$; б) $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\log_5 x\right)>0$.

Вариант 5. Решите уравнение и неравенство: а) $9x^{\lg x}+91x^{-\lg x}=60$; б) $\log_2\left(2^x-1\right)\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{x+1}-2\right)>2$.

Вариант 6. Решите уравнение и неравенство: а) $\left|x-1\right|^{\log_2 x-\log_2 x^2}=\left|x-1\right|^3$; б) $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}<6$.

Вариант 7. Решите уравнение и неравенство: а) $x^{2\lg\frac{100}{x}-3\lg x}=0,1$; б) $3^{\lg x+2}<3^{\lg 2x+5}-2$.

Вариант 8. Решите уравнение и неравенство: а) $\log_{x+1}\left(x^2+x-6\right)=4$;

б) $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}<10$.

Вариант 9. Решите уравнение и неравенство:

а) $\lg(arctgx)+\lg(arcctgx)=a$; б) $\log_{x-3}(x-4)<2$.

Вариант 10. Решите уравнение и неравенство:

а) $\log_{x+1}\left(x^2-9x+8\right)\cdot\log_{x-1}\left(x+1\right)=3$; б) $2^{\log_{2-x}(x^2+8x+15)}<1$.

Вариант 11. Решите уравнение и неравенство:

а) $\arcsin\left(\lg x^2\right)+\arcsin\left(\lg x\right)=\dfrac{\pi}{3}$; б) $\log_{x^2}\dfrac{4x-5}{|x-2|}\geq\dfrac{1}{2}$.

Вариант 12. Решите уравнение и неравенство:

а) $\log_{3-4x^2}\left(9-16x^4\right)=2+\dfrac{1}{\log_2\left(3-4x^2\right)}$; б) $\log_x\left(\log_9\left(3^x-9\right)\right)<1$.

Вариант 13. Решите систему уравнений и неравенство:

а) $\begin{cases}\log_x y=2,\\ \log_{x+1}(y+23)=3;\end{cases}$ б) $\sqrt{\log_5(x+2)}>\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{5}{x+2}$.

Вариант 14. Решите систему уравнений и неравенство:

а) $\begin{cases}(x+y)^x=(x-y)^y,\\ \log_2 x=1+\log_2 y;\end{cases}$ б) $\log_a(3a^x-5)<x+1$ для любых допустимых значений a.

Вариант 15. Решите систему уравнений и неравенство:

а) $\begin{cases}(x-y)^{2y-x}=125,\\ \lg 2(x-y)=1;\end{cases}$

б) $(\log_{3-x}(2x+1))\cdot(\log_{2x+1}x^2)\leq(\log_{3-x}(3x+1))\cdot(\log_{3x+1}(x+2))$.

Вариант 16. Решите уравнение и неравенство:

а) $\begin{cases}2\log_2 x-3^y=15,\\ 3^y\cdot\log_2 x=2^{\log_2 x}+3^{y+1};\end{cases}$ б) $1+\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_3(4-x)\right)>0$.

Вариант 17. Решите систему уравнений и неравенство:

а) $\begin{cases}3^{\cos x}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\cos y},\\ \log_2(\sin x-\cos y)+\log_2(\sin x+\cos y)=-1;\end{cases}$ б) $\dfrac{\log_2 x-3}{6\log_x 2-1}\leq 2$.

Вариант 18. Решите систему уравнений и неравенство:

а) $\begin{cases}\log_2\sin x+\log_2\sin y=-2,\\ \log_3\cos x+\log_3\cos y=1-\log_3 4;\end{cases}$ б) $\dfrac{1}{\log_x 2}-\log_2\dfrac{1}{x}\leq 2$.

Вариант 19. Решите систему уравнений и неравенство:

а) $\begin{cases} \log_2(3y^2 - x^2) = 3, \\ 8\log_{16}(-x) + \log_2 y^2 = 4; \end{cases}$ б) $\dfrac{(\log_2 3)^x - (\log_2 3)^2}{(\log_2 3)^{-x} - x(\log_{2^x} 3)} > 0$.

Вариант 20. Решите уравнение и неравенство:

а) $\log_2(4x+1)\log_5(4x+4) + \log_3(4x+2)\log_4(4x+3) = 2\log_3(4x+2)\log_5(4x+4)$

б) $\log_{\frac{3}{4}}(3x+4) < \log_{\frac{3}{4}} x^2$.

Вариант 21. Решите уравнение и неравенство:

а) $\log_{\frac{1}{3}}(1 + (x^2 - 3x + 2)^2) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$; б) $\log_x 2 < \log_{6-x} 2$.

Вариант 22. Решите уравнение и неравенство:

а) $\log_{3-4x^2}\left(9 - 16x^4\right) = 2 + \dfrac{1}{\log_2\left(3 - 4x^2\right)}$; б) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2 \log_{x-1} 9\right) > 0$.

15. Производная. Применение производной к исследованию функций, в физике и геометрии

Вариант 1. Пользуясь признаками возрастания и убывания функций, найдите промежутки возрастания и убывания функций: а) $f(x) = 2x^2$; б) $f(x) = 3 - 4x$; в) $f(x) = 3 - x^2$; г) $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x}$.

Вариант 2. Пользуясь определением производной, докажите, что функция дифференцируема в точке x_0, если: а) $f(x) = x|x|,\ x_0 = 0$; б) $f(x) = \left|x^2 - 1\right|(x+1),\ x_0 = -1$.

Вариант 3. Найдите производную функции: а) $y = x^x$; б) $y = (\sin x)^{\cos x}$.

Вариант 4. Вычислите сумму:

а) $1 + \dfrac{2}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{4}{2^3} + \ldots + \dfrac{n}{2^{n-1}}$; б) $2 + 3 \cdot \dfrac{2}{2} + 4 \cdot \dfrac{3}{2^2} + 5 \cdot \dfrac{4}{2^3} + \ldots + (n+1)\dfrac{n}{2^{n-1}}$.

Вариант 5. Исследуйте функции на возрастание (убывание) и экстремумы: а) $f(x)=x^2(\sqrt{x}-1)$; б) $f(x)=x^2\sqrt{1-2x}$; в) $f(x)=6\sin x-\cos 2x$; г) $f(x)=2\sin x+3\cos x$.

Вариант 6. Исследуйте функции на возрастание (убывание) и экстремумы:

а) $f(x)=-0,2x^5+0,5x^4-x^3-x^2-x$; б) $f(x)=0,8x^5-x^4+3x^3+2x^2+4x$.

Вариант 7. Найдите все значения *a*, при которых функция *f* возрастает на *R*:

а) $f(x)=\dfrac{a^2-1}{3}x^3+(a-1)x^2+2x+5$; б) $f(x)=2x^3-3(a+2)x^2+48ax+6x-5$.

Вариант 8. Докажите, что данное уравнение имеет единственный корень: а) $\cos x=\dfrac{\pi}{2}-x$; б) $\sin x=-x-\pi$.

Вариант 9. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции:

а) $f(x)=4x^3-x|x-2|$ на [0; 3]; б) $f(x)=\max\limits_{R}\left(\dfrac{10}{x^2+4\pi x+41}+\cos x\right)$.

Вариант 10. Три пункта *A*, *B*, *C* не лежат на одной прямой, причем $\angle ABC=60^\circ$. Одновременно из точки *A* выходит автомобиль, а из точки *B* – поезд. Автомобиль движется по направлению к *B* со скоростью 80 км/ч, поезд – к *C* со скоростью 50 км/ч. В какой момент времени (от начала движения) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если *AB* = 200 км?

Вариант 11. На странице текст должен занимать 384 $см^2$. Верхнее и нижнее поля должны быть по 3 см, правое и левое – по 2 см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

Вариант 12. Расходы на топливо для парохода делятся на две части. Первая из них не зависит от скорости и равна 480 р. в час. А вторая часть расходов пропорциональна куба скорости, причем при скорости 10 км/ч эта часть расходов равна 30 р. в час. При какой скорости общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей?

Вариант 13. Найдите кратчайшее расстояние от точки M (0; 1) до графика функции $f(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}}$.

Вариант 14. Решите уравнение: а) $\ln x = 1 - x$; б) $2^x = 3 - x$.

Вариант 15. К реке шириной a проведен под прямым углом канал шириной b. Какую максимальную длину могут иметь суда, чтобы пройти в этот канал? (a и b измеряются в метрах)

Вариант 16. Найдите минимальное значение функции $f(x)=2x+\dfrac{18\pi^2}{x}+\cos x$ на интервале (0; 10).

Вариант 17. Колесо радиуса R катится по прямой. Угол φ поворота колеса за t секунд определяется уравнением $\varphi = t+\dfrac{t^2}{2}$. Найдите скорость и ускорение движения центра колеса.

Вариант 19. Лампа подвешена на высоте 12 м над прямой горизонтальной дорожкой, по которой идет человек ростом 1,8 м. С какой скоростью удлиняется его тень, если он удаляется от лампы со скоростью 50 м/мин?

Вариант 20. Найдите все значения аргумента, при которых касательные, проведенные к графикам функций $f(x)=3\cos 5x$ и $g(x)=5\cos 3x+2$ через точки с этими абсциссами, параллельны.

Вариант 21. Докажите, что отрезок касательной к гиперболе $y=\dfrac{a}{x}$, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам.

Вариант 22. Докажите, что треугольник, образованный касательной к гиперболе $xy=a^2$ и осями координат, имеет постоянную площадь, равную

$2a^2$, а точка касания является центром окружности, описанной около этого треугольника.

16. Первообразная. Интеграл

Вариант 1. Вычислите: а) $\int\limits_0^{28} \frac{5-x}{\sqrt[3]{1+\frac{x}{4}}}dx$; б) $\int\limits_0^1 xe^{x^2}dx$.

Вариант 2. Вычислите: а) $\int\limits_{-2}^{0} x\sqrt[3]{1-\frac{x}{2}}dx$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x+\cos^4 x)dx$.

Вариант 3. С помощью интегралов найдите предел:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+...+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}\right)$.

Вариант 4. С помощью интегралов найдите предел:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}}$ при $p>0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^{p-1}}{(n+1)^p}+\frac{n^{p-1}}{(n+2)^p}+...+\frac{n^{p-1}}{(n+n)^p}\right)$

при $p > 1$.

Вариант 5. Вычислите: а) $\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 nxdx\ (n\in N)$;

б) $\int\limits_0^{2\pi} \sin kx\cos mxdx\ (m\in N, k\in N)$.

Вариант 6. Вычислите: а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 xdx$; б) $\int\limits_0^{\pi} \sin 3x\cos 5xdx$.

Вариант 7. Используя геометрическую интерпретацию интеграла, вычислите: а) $\int\limits_{-2}^{2} \left||x|-1\right|dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$.

Вариант 8. Используя геометрическую интерпретацию интеграла, вычислите: а) $\int\limits_0^3 \left|x^2-1\right|dx$; б) $\int\limits_0^5 \left|\{x\}-\frac{1}{2}\right|dx$.

Вариант 9. Вычислите площадь фигуры, состоящей из точек, лежащих внутри эллипса. (Эллипсом называется фигура, координаты точек которой удовлетворяют равенству $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.)

Вариант 10. При каких значениях параметров *a, b* и *c* определен интеграл: а) $\int\limits_a^b \frac{dx}{x-2}$; б) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{x-c}$; в) $\int\limits_a^b \frac{dx}{x+c}$?

Вариант 11. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y=\left|x^2-1\right|$ и $y=5+|x|$; б) $|y|=2x-x^2$.

Вариант 12. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{2x-1}$, $x=2$, $x=a$, $y=0$, равна $\ln\frac{4}{\sqrt{5}}$. Найдите *a*.

Вариант 13. Докажите, что площадь параболического сегмента, заключенного между параболой $y=x^2$ и произвольной прямой, параллельной оси абсцисс, равна 2/3 площади прямоугольника с вершинами в точках пересечения прямой с параболой и основаниями перпендикуляров к оси абсцисс, опущенных из точек пересечения.

Вариант 14. Пружина растягивается на 2 см под действием силы в 180 Н. Первоначальная длина пружины равна 20 см. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину до 25 см?

Вариант 15. Капля воды с начальной массой *M* падает под действием силы тяжести и равномерно испаряется, теряя ежесекундно массу *m*. Какова работа силы тяжести за время от начала падения капли до ее полного испарения?

Вариант 16. Какую минимальную работу по преодолению силы тяжести надо произвести, чтобы насыпать кучу песка в форме конуса высотой *H* и радиусом основания *R*? Плотность песка равна, и его поднимают с плоскости основания конуса.

Вариант 17. Найдите пары чисел *a* и *b*, при которых функция $f(x) = a\sin\pi x + b$ удовлетворяет условиям: $f'(2) = 2, \int_0^2 f(x)dx = 4$.

Вариант 18. При каком значении *a* площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x + a\ (a > 0)$, $x = 0, x = 2$ и $y = 2$, равна 12?

Вариант 19. В каком отношении делится площадь квадрата параболой, проходящей через две его соседние вершины и касающейся одной стороны в ее середине?

Вариант 20. Найдите наибольшее и наименьшее значения интеграла: а) $\int_0^a \cos\frac{x}{2}dx, a \in R$; б) $\int_0^{a+\frac{\pi}{2}} \cos 2xdx, a \in R$

Вариант 21. Найти все значения параметра *a* $(2 \le a \le 5)$, при каждом из которых площадь фигуры, лежащей в полуплоскости $x \ge 0$ и ограниченной прямыми $y = 2, y = 3$ и кривыми $y = \sqrt{ax}, y = \frac{2}{3}\sqrt{ax}$, будет наименьшей. Найти эту площадь.

Вариант 22. Найти все значения параметра *a* $(1 \le a \le 4)$, при каждом из которых площадь фигуры, лежащей в полуплоскости $x \ge 0$ и ограниченной прямыми $y = 2, y = 3$ и кривыми $y = ax^2, y = \frac{2}{3}ax^2$, будет наименьшей. Найти эту площадь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев В.А., Мордкович А.Г. Справочник по математике. – М.: Просвещение, 1995.

2. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа / Б.М. Ивлев, А.М. Абрамов и др. – М.: Просвещение, 1990.

3. Избранные задачи / Под ред. В.М. Алексеева. – М.: Мир, 1977.

4. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену / О.Ю. Черкасов, А.Г. Якушев. – М.: Айрис-пресс, 2006.

5. Морозова Е.А., Петраков И.С. Международные математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1967.

6. Островский А.И. 75 задач по элементарной математике – простых, но… - М.: Просвещение, 1966.

7. Триг Ч. Задачи с изюминкой. – М.: Мир, 1975.

8. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики: Часть I. Арифметика и алгебра. – М.: Наука, 1976.

9. Штейнгауг. Сто задач. – М.: Наука, 1986.

10. Яглом А.М., Яглом И.М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. – М., 1954.

СОДЕРЖАНИЕ

I. Основные математические понятия	4
II. Справочник	5
III. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа	46
IV. Задания для самостоятельной работы	75
Литература	115