КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ)ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАЛИМУЛЛИН ИСКАНДЕР ШАГИТОВИЧ

УДК 510.5

СПЕКТРЫ СТЕПЕНЕЙ АЛГОРИТМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебно-методическое пособие

Казань — 2013

Содержание

1 Введение

Массовой проблемой (по Медведеву) называется произвольная совокупность всюду определенных функций на множестве всех натуральных чисел ω. Элементы массовой проблемы называются также *методами* ее решения. Сопоставляя каждое множество $X \subseteq \omega$ с его характристической функцией χ_X

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X, \\ 0, & \text{если } x \notin X, \end{cases}$$

будем считать, что элементами (методами) массовых проблем могут быть и подмножества множестве всех натуральных чисел ω.

На классе массовых проблем рассматриваются две алгоритмические сводимости. Если A и B — массовые проблемы, то *сильная (или равномерная) сводимость* $\mathrm{A} \leq_s \mathrm{B}$ имеет место, если существует единая алгоритмическая процедура, порождающая методы из A по произвольному методу из B; более формально, если существует тьюринговый оператор Φ, такой, что $\Phi^g \in \mathrm{A}$ для каждого $g \in \mathrm{B}$.

Слабая (или неравномерная) сводимость $\mathrm{A} \leq_w \mathrm{B}$ имеет место, если к каждому методу из B может быть применена некоторая алгоритмическая процедура, порожающая метод из A; то есть для каждого метода $g \in \mathrm{B}$ существует метод $f \in \mathrm{A}$, такой, что $f \leq_T g$.

Обе сводимости индуцируют степенные структуры на классе массовых проблем, соответствующие степени называются *сильными (слабыми) степенями трудности*. Обе структуры являются дистрибутивными решетками относительно следующих операций на массовых проблемах

$$\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} = \{f \oplus g \mid f \in \mathrm{A} \;\&\; g \in \mathrm{B}\}$$

(индуцирует наименьшую верхнюю грань степеней трудности проблем A и B)

$$\mathrm{A} \vee \mathrm{B} = \{0 * f \mid f \in \mathrm{A}\} \cup \{1 * g \mid g \in \mathrm{B}\}$$

(индуцирует наибольшую нижнюю грань степеней трудности проблем A и B). Здесь функции вида $f \oplus g$, $0 * f$, $1 * g$ заданы так:

$f \oplus g(2n) = f(n)$,
$f \oplus g(2n+1) = g(n)$,
$0 * f(0) = 0, \quad 0 * f(n+1) = f(n)$,
$1 * g(0) = 1, \quad 1 * g(n+1) = g(n)$ для всех $n \in \omega$.

Отметим, что решетка сильных степеней $\mathbf{D}_s$ называется также *решеткой Медведева*. Решетка слабых степеней $\mathbf{D}_w$ называется также *решеткой Мучника*.

Массовая проблема $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$ соответствует проблеме решения проблемы A *и* проблемы B. Массовая проблема $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$ соответствует проблеме решения проблемы A *или* проблемы B. Наименьшим элементом решеток сильных и слабых степеней трудности является степень $\mathbf{0}$, состоящая из массовых проблем, имеющих хотя-бы один вычислимый метод (легко видеть, что для таких проблем понятия сильной и слабой сводимости совпадают). Наибольшим элементом формально считается степень $\mathbf{1}$, соответствующая проблеме, не имеющей методов, то есть пустому множеству функций. В этих решетках также имеется элемент, наименьший среди всех отличных от $\mathbf{0}$ степеней. В обоих случаях такой элемент является сильной (слабой) степенью трудности проблемы, состоящей из всех невычислимых методов:

$$\mathrm{NC} = \{f \mid \omega \to \omega \mid f \text{ не является вычислимой функцией}\}.$$

Отметим, что в слабых степенях теоретико-множественное объединение $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ также индуцирует наибольшую нижнюю грань соответствующих степеней трудности, поскольку

$$\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \equiv_w \mathrm{A} \cup \mathrm{B}.$$

Спектром степеней проблемы A назовем совокупность тюринговых степеней, относительно которых хотя-бы один метод из A становится вычислимым:

$$\mathbf{Sp}\,(\mathrm{A}) = \{\mathbf{x} \mid (\exists f \in \mathrm{A})[f \leq_T \mathbf{x}]\}.$$

Например, спектром степеней проблемы NC является совокупность всех ненулевых степеней. Ясно, что спектр степеней проблемы A полностью описывает свойства этой проблемы относительно слабой сводимости. Более того, для проблем A и B имеет место

$$\mathrm{A} \leq_w \mathrm{B} \iff \mathbf{Sp}\,(\mathrm{B}) \subseteq \mathbf{Sp}\,(\mathrm{A}),$$

$$\mathbf{Sp}\,(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) = \mathbf{Sp}\,(\mathrm{A}) \cap \mathbf{Sp}\,(\mathrm{B}),$$

$$\mathbf{Sp}\,(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) = \mathbf{Sp}\,(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathbf{Sp}\,(\mathrm{A}) \cup \mathbf{Sp}\,(\mathrm{B}),$$

так что **Sp** индуцирует изоморфизм решетки слабых степеней и дуальной решетки замкнутых вверх классов степеней относительно включения.

Отметим, что трудно назвать произвольное множество функций-методов (например NC) математической проблемой, поскольку не ясно, какие задачи ее методы позволяют решить. Далее мы будем рассматривать лишь массовые проблемы перечисленных ниже видов, методы которых направлены на решение вполне определенных задач:

1. **Проблемы разрешимости**. Если $A \subseteq \omega$, то

$$\mathrm{Des}(A) = \{\chi_A\}$$

является *проблемой разрешимости* множества A.

2. **Проблемы перечислимости**. Если $A \subseteq \omega$, то

$$\mathrm{Enum}(A) = \{\chi_B \mid A = \mathrm{Pr}_1(B)\}$$

является *проблемой перечислимости* множества A. Здесь

$$\mathrm{Pr}_1(B) = \{x \in \omega \mid (\exists y \in \omega)[\langle x, y\rangle \in B]\}.$$

3. **Проблемы представимости**. Если $\mathfrak{A}$ -счетная алгебраическая система с конечной предикатной сигнатурой Σ, то

$$\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) = \{\chi_{D(\mathfrak{B})} \mid \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A} \;\&\; \mathrm{dom}\,(\mathfrak{B}) \subseteq \omega\}$$

является *проблемой представимости* системы $\mathfrak{A}$. Здесь через $D(\mathfrak{B})$ обозначена атомная диаграмма системы $\mathfrak{B}$; так как универсумом $\mathfrak{B}$ является подмножество натуральных чисел, мы можем отождествить формулы из $D(\mathfrak{B})$ с натуральными числами при помощи фиксированной нумерации предложений в расширенной сигнатуре $\Sigma^* = \Sigma \cup \omega$.

Ясно, что для проблем разрешимости имеем

$$\mathrm{Des}(A) \leq_w \mathrm{Des}(B) \iff \mathrm{Des}(A) \leq_s \mathrm{Des}(B) \iff A \leq_T B,$$

так что упорядочение степеней трудности проблем разрешимости **Des** изоморфно упорядочению тьюринговых степеней $\mathbf{D}_T$.

Из результата Селмана [18] следует, что для проблем перечислимости также имеет место

$$\mathrm{Enum}(A) \leq_w \mathrm{Enum}(B) \iff \mathrm{Enum}(A) \leq_s \mathrm{Enum}(B) \iff A \leq_e B,$$

где запись $A \leq_e B$ означает, что множество A сводится по перечислимости к множеству B, то есть существует в.п. множество W такое, что для всех $x \in \omega$ имеет место

$$x \in A \iff (\exists n)[\langle x, n\rangle \in W \ \&\ D_n \subseteq B].$$

Упорядочение степеней трудности проблем перечислимости **Enum** изоморфно упорядочению e-степеней $\mathbf{D}_e$. Кроме того, степени трудности проблем разрешимости являются степенями трудности проблем перечислимости, поскольку для любого множества A имеет место

$$\mathrm{Des}(A) \equiv_s \mathrm{Enum}(A \oplus \overline{A}),$$

что соотвествует каноническому вложению упорядочений $\iota : \mathbf{D}_T \to \mathbf{D}_e$.

В свою очередь, степени трудности проблем перечислимости являются степенями трудности проблем представимости, поскольку для любого множества A имеет место

$$\mathrm{Enum}(A) \equiv_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{Enum}(A)),$$

где $\mathfrak{Enum}(A)$ — неориентированный граф с вершинами O_0, O_1, O_2, B_j (где $j \in \omega$), C_j (где $j \in A$) и ребрами $\{\mathsf{O}_0, \mathsf{B}_0\}$, $\{\mathsf{O}_1, \mathsf{B}_0\}$, $\{\mathsf{O}_2, \mathsf{B}_0\}$, $\{\mathsf{B}_j, \mathsf{B}_{j+1}\}$ (где $j \in \omega$), $\{\mathsf{B}_j, \mathsf{C}_j\}$ (где $j \in A$). Тогда

$$\mathrm{Des}(A) \equiv_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{Des}(A)),$$

где $\mathfrak{Des}(A) = \mathfrak{Enum}(A \oplus \overline{A})$. Ясно, что для степени $\mathbf{a} = \deg(A)$ имеет место

$$\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{Des}(A)) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{a}\}.$$

Обозначения и терминология являются стандартными и в основном согласованными с монографией [20]. В частности, ω есть множество всех натуральных чисел с 0, $\langle x, y\rangle = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$ — стандартная функция пары из $\omega \times \omega$ на ω. Если $X \subseteq \omega$, то под сокращением

$X^{[e]}$, где $e \in \omega$, понимается множество $\{x \in X \mid (\exists y)[x = \langle e, y\rangle]\}$, т.е. e-й «столбец» множества X; $X^{[<e]} =_{dfn} \cup_{i<e} X^{[i]}$ и $X^{[\geq e]} =_{dfn} \cup_{i \geq e} X^{[i]}$. Отметим, что $X^{[<e]} = X - X^{[\geq e]}$. Кроме того, определим $X^{(e)} = \{y \mid \langle e, y\rangle \in X\}$ и $\mathrm{Pr}_1(X) = \{e \mid X^{(e)} \neq \emptyset\}$.

Если $X \subseteq \omega$ и $s \in \omega$, то $X \upharpoonright s =_{dfn} \{x \in X \mid x < s\}$.

Для множеств A и B под декартовым произведением $A \times B$ мы понимаем множество всех чисел вида $\langle x, y\rangle$, где $x \in A$ и $y \in B$.

Заглавными греческими буквами $\Gamma, \Delta, \Phi, \Psi, \Theta, \ldots$ будем обозначать как тьюринговые операторы, так и операторы перечисления. Чтобы избежать путаницы, аргументы тьюринговых операторов будем обозначать верхним индексом Φ^X, а аргументы операторов перечисления — в круглых скобках $\Phi(X)$.

2 Проблемы представимости алгебраических систем и их спектры степеней

В отличие от проблем разрешимости и перечислимости, для проблем представимости понятия слабой и сильной сводимости не совпадают. Например, пусть $\mathfrak{Enum}^-(A)$ — граф, полученный из $\mathfrak{Enum}(A)$ удалением вершин O_0, O_1 и O_2. Ясно, что

$$\mathrm{Pres}(\mathfrak{Enum}^-(A)) \equiv_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{Enum}(A)).$$

Однако, если множество A не вычислимо перечислимо, но содержит отрезки натурального ряда сколь угодно большой длины, то

$$\mathrm{Pres}(\mathfrak{Enum}(A)) \not\leq_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{Enum}^-(A)).$$

Заметим, что в данном случае неравномерность в сводимости проблемы $\mathrm{Pres}(\mathfrak{Enum}(A))$ к проблеме $\mathrm{Pres}(\mathfrak{Enum}^-(A))$ устраняется обогащением системы $\mathfrak{Enum}^-(A)$ конечным числом констант. А именно, достаточно лишь одной константы B_0, чтобы получить

$$\mathrm{Pres}(\mathfrak{Enum}(A)) \leq_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{Enum}^-(A), \mathsf{B}_0).$$

Стукачевым [5] было замечено, что если

$$\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}) \equiv_w \mathrm{Des}(B),$$

то $\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \leq_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}, \vec{b})$ для некоторого конечного набора $\vec{b}$ элементов из $\mathrm{dom}\,(\mathfrak{B})$. Более того, утверждение остается справедливым, если вместо $\mathrm{Pres}(\mathfrak{A})$ поставить произвольную массовою проблему.

Из изложения глав 3 и 4 (см. следствие 4.13 и теорему 9.3) будет следовать, что условие $\mathrm{Pres}(\mathfrak{B}) \equiv_w \mathrm{Des}(B)$ здесь существенно. В частности, существуют алгебраические системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ такие, что $\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$ и $\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \not\leq_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}, \vec{b})$ для любого конечного набора $\vec{b}$ элементов из $\mathrm{dom}\,(\mathfrak{B})$. Следовательно, неравномерность в сводимости проблем представимости может быть заложена достаточно глубоко.

Таким образом можно говорить как о *сильной сводимости* счетных алгебраических систем

$$\mathfrak{A} \leq_s \mathfrak{B} \stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \leq_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}),$$

так и о *слабой сводимости*

$$\mathfrak{A} \leq_w \mathfrak{B} \stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}),$$

являющихся предметами дальнейшего рассмотрения.

Выделим важный частный случай выполнения сводимостей $\mathfrak{A} \leq_s \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A} \leq_w \mathfrak{B}$.

Под конечно-наследственной надстройкой системы $\mathfrak{B}$ (см. [2]) с носителем B и сигнатурой $\mathfrak{S}$ мы понимаем систему $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$, ореде-ленной на носителе $HF(B) = \bigcup_{n\in\omega} B_n$, где

$$B_0 = B;$$

$$B_{n+1} = B_n \cup \{F \subseteq B_n | F \text{ конечно}\}$$

для всех $n \in \omega$, и сигнатурой $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} \cup \{\emptyset, \in^2\}$, где константный символ $\emptyset$ выделяет пустое множество, а двуместный предикат $\in$ имеет стандартное теоретико-множественное значение (считая, что элементы самого множества B не имеют теоретико-множестсвенной природы).

Пусть дана система $\mathfrak{A}$ носителем которой является подмножество A множества $HF(B)$. Тогда каждую формулу $\Phi(a_1, \ldots, a_n)$ сигнатуры системы $\mathfrak{A}$ с параметрами $a_1, \ldots, a_n \in A$, имеющей геделев номер $m \in \omega = \mathbb{HF}(\emptyset)$ отождествим с элементом $(m, (a_0, \cdots (a_{n-1}, a_n) \cdots))$

множества $HF(B)$. Здесь $(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$. Тогда под атомной диаграммой системы $\mathfrak{A}$ (также, как и под любым набором формул сигнатуры системы $\mathfrak{A}$) можем подразумевать некоторое подмножество $HF(B)$.

Будем говорить, что алгебраическая система $\mathfrak{A}$ *Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$*, если имеется изоморфная копия системы $\mathfrak{A}$ с носителем, являющимся подмножеством $HF(B)$, атомная диаграмма которой определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ посредством некоторой Σ-формулы. Если формула, определяющая атомную диаграмму не содержит параметров, то будем говорить, что $\mathfrak{A}$ *Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ без параметров.*

Нетрудно убедиться в том, что если $\mathfrak{A}$ Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ без параметров, то $\mathfrak{A} \leq_s \mathfrak{B}$. Кроме того, если $\mathfrak{A}$ просто Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$, то $\mathfrak{A} \leq_s (\mathfrak{B}, \vec{b})$ для некоторого конечного набора $\vec{b}$ из $\mathfrak{B}$, и, следовательно, $\mathfrak{A} \leq_w \mathfrak{B}$.

Сводимости $\leq_s$ и $\leq_w$ порождают частично упорядоченные классы степеней $\mathbf{D}_s$ и $\mathbf{D}_w$. В обоих классах имеется наименьший элемент $\mathbf{0}$, соответствующий алгебраическим системам, у которых имеется изоморфная копия с вычислимой атомной диаграммой. Такие системы называются *вычислимыми (конструктивизируемыми).*

Спектр степеней $\mathbf{Sp}\,(\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}))$ проблемы представимости системы $\mathfrak{A}$ будет называться просто *спектром степеней* системы $\mathfrak{A}$ и обозначаться через $\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A})$.

Не каждый замкнутый наверх класс степеней будет являться спектром некоторой счетной алгебраической системы. Это следует например из следующего результата

Теорема 2.1. (Фольклор). *Если несравнимые степени $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ лежат в спектре степеней $\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A})$ счетной алгебраической системы $\mathfrak{A}$, то $\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A})$ содержит также некоторую степень $\mathbf{c}$ такую, что $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{c}$ и $\mathbf{b} \not\leq \mathbf{c}$.*

Следствие 2.2. (Фольклор). *Если степени $\mathbf{a} = \deg(A)$ и $\mathbf{b} = \deg(B)$ не сравнимы, то класс степеней*

$$\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{Des}(A)) \cup \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{Des}(B)) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{x}\} \cup \{\mathbf{x} \mid \mathbf{b} \leq \mathbf{x}\}$$

не является спектром степеней ни одной счетной алгебраической системы. Другими словами массовая проблема $\mathrm{Pres}(\mathfrak{Des}(A)) \vee$

$\mathrm{Pres}(\mathfrak{Des}(B))$ *не слабо эквивалентна ни одной проблеме представимости.*

Отметим также, что для сильной сводимости

$$\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \vee \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}) \equiv_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{C})$$

может иметь место, только если $\mathfrak{C} \equiv_s \mathfrak{A} \leq_s \mathfrak{B}$ или $\mathfrak{C} \equiv_s \mathfrak{B} \leq_s \mathfrak{A}$. Действительно, пусть, например, Φ — тьюринговый оператор Φ осуществляет сильную сводимость проблемы $\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \vee \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$ к $\mathrm{Pres}(\mathfrak{C})$. Фиксируем систему $\mathfrak{C}'$, изоморфную системе $\mathfrak{C}$, универсумом которой является подмножество натуральных чисел. Тогда $\Phi^{D(\mathfrak{C}')}$ имеет вид либо $0 * D(\mathfrak{A}')$, либо $1 * D(\mathfrak{B})$, где $\mathfrak{A}' \cong \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}' \cong \mathfrak{B}$. В первом случае, выберем конечный начальный отрезок атомной диаграммы $D(\mathfrak{C}')$, обеспечивающий первое значение 0 у $\Phi^{D(\mathfrak{C}')}$, и, тогда, сможем эффективно преобразовывать каждую систему $\mathfrak{X} \cong \mathfrak{C}$, $\mathrm{dom}\,(\mathfrak{X}) \subseteq \omega$, к такой системе $\mathfrak{Y} \cong \mathfrak{C}$, что $D(\mathfrak{Y})$ также содержит выбранный начальный отрезок, а значит $\Phi^{D(\mathfrak{Y})}$ будет иметь вид $0 * D(\mathfrak{Z})$, где $\mathfrak{Z} \cong \mathfrak{A}$. Поэтому в первом случае будет иметь место сводимость $\mathfrak{A} \leq_s \mathfrak{C}$, а во втором — $\mathfrak{B} \leq_s \mathfrak{C}$ в силу аналогичных рассуждений.

В тоже самое время можно задать сочленение $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ двух счетных систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ таким образом, что

$$\mathrm{Pres}(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}) \equiv_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \wedge \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}),$$

например, определяя $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ как систему с универсумом, являющимся дизъюнктным объединением универсумов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, и с сигнатурой, полученной добалвлением к объединению сигнатур $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ нового одноместного предиката, истинного на универсуме $\mathfrak{A}$ и ложного на универсуме $\mathfrak{B}$.

Таким образом, сильные и слабые степени проблем представимости образуют верхние полурешетки $\mathbf{Pres}_s \cong \mathbf{D}_s$ и $\mathbf{Pres}_w \cong \mathbf{D}_w$ (здесь через $\mathbf{D}_s$ и $\mathbf{D}_w$ обозначены степени самих систем относительно введеных s- и w-сводимостей). При этом операции взятия наименьшей верхней грани наследуются из решеток $\mathbf{Prob}_s$ и $\mathbf{Prob}_w$.

Упомянутая выше массовая проблема

$$\mathrm{NC} = \{f \mid \omega \to \omega \mid f \text{ не является вычислимой функцией}\}$$

оказывается в сильном смысле эквивалентна проблеме представимости.

Теорема 2.3. *(Сламан[19]; Вехнер[23]) Существуют счетные алгебраические системы* $\mathfrak{A}$*, такие, что*

$$\mathrm{NC} \equiv_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{A}).$$

В частности, $\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A}) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} > \mathbf{0}\}$.

Таким образом верхние полурешетки $\mathbf{D}_s$ и $\mathbf{D}_w$ кроме наименьшего (нулевого) элемента содержат наименьший среди ненулевых. Отметим, что проблема NC не может быть эквивалентна проблеме разрешимости или перечислимости даже в слабом смысле. Более того, верхние полурешетки $\mathbf{D}_T$ и $\mathbf{D}_e$ не содержат наименьших ненулевых элементов.

3 Массовые проблемы перечислимости семейств

Пусть $\mathcal{S}$ — счетное семейство семейство подмножеств ω. *Перечислением* семейства $\mathcal{S}$ назывется такое множество $R \subseteq \omega$, что

$$\mathcal{S} = \{R^{(x)} \mid x \in \omega\},$$

где $R^{(x)} = \{y \in \omega \mid \langle x, y\rangle \in R\}$. Тогда свокупность

$$\mathrm{EF}(\mathcal{S}) = \{\chi_B \mid \mathrm{Pr}_1 B - \text{перечисление } \mathcal{S}\}$$

называется *проблемой перечислимости семейства* $\mathcal{S}$.

Степень трудности проблемы перечислимости множества A является степенью трудности проблем перечислимости семейств:

$$\mathrm{Enum}(A) \equiv_s \mathrm{EF}(\{A\}) \equiv_s \mathrm{EF}(\{\{x\} \mid x \in A\}).$$

Степени трудности проблем перечислимости счетных сейств являются степенями трудности проблем представимости, поскольку для любого счетного семейства $\mathcal{S}$ имеет место $\mathrm{EF}(\mathcal{S}) \equiv_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{EF}(\mathcal{S}))$, где $\mathfrak{EF}(\mathcal{S})$ — неориентированный граф с вершинами O, $\mathsf{B}_{X,i,j}$ (где $i, j \in \omega$, $X \in \mathcal{S}$), $\mathsf{C}_{i,j}$ (где $i \in \omega$, $j \in X \in \mathcal{S}$) и ребрами $\{\mathsf{O}, \mathsf{B}_{X,i,0}\}$ (где

$i \in \omega,\ X \in \mathcal{S}$), $\{\mathsf{B}_{X,i,j}, \mathsf{B}_{X,i,j+1}\}$ (где $i, j \in \omega,\ X \in \mathcal{S}$), $\{\mathsf{B}_{X,i,j}, \mathsf{C}_{X,i,j}\}$ (где $i \in \omega,\ j \in X \in \mathcal{S}$).

В частности спектр степеней массовой проблемы $\mathrm{EF}(\mathcal{S})$ совпадает со спектром степеней (проблемы представимости) графа $\mathfrak{EF}(\mathcal{S})$. Назовем для краткости данный спектр *спектром степеней* семейства $\mathcal{S}$, и будем обозначать его через $\mathbf{Sp}\,(\mathcal{S})$.

Отметим, что если $\mathcal{S}$ целиком содержится в семействе всех вычислимо перечислимых множеств $\mathcal{E}$, то в конечно наследственной надстройке графа $\mathfrak{EF}(\mathcal{S})$ являются Σ-определимыми без параметров произвольные конечные константные обогащения графа $\mathfrak{EF}(\mathcal{S})$.

Все примеры семейств, которые будут строятся в данной работе имеют следующий вид:

$$\mathcal{W}(\mathcal{R}, \nu) = \{\{n\} \oplus U \mid n \in \omega \;\&\; U \in \mathcal{R} \;\&\; U \neq \nu(n)\},$$

где $\mathcal{R}$ — некоторое семейство (как правило вычислимо перечислимое), а ν — некоторая нумерация множеств $\nu : \omega \to 2^\omega$.

В качестве $\mathcal{R}$ можно, например, взять семейство $\mathcal{F}$ всех конечных множеств (конечных подмножеств ω), семейство $\mathcal{E}$ всех вычислимо перечислимых множеств, или семейство $\mathcal{F}$ всех вычислимых множеств.

Отметим, что семейства данного вида являются естественными обобщениями семейства, построенного Вехнером [23], спектр которого есть в точности все ненулевые степени (см. следствие 4.5).

В следующем параграфе будут описаны спектры семейств вида $\mathcal{W}(\mathcal{R}, \nu)$, если $\mathcal{R}$ содержит все конечные множества, и ν — вычислимая нумерация Δ^0_2 множеств.

4 Новые спектры степеней

Под *вычислимой нумерацией Δ^0_2-множеств* мы подразумеваем соответствие $\nu : \omega \to 2^\omega$ такое, что существует вычислимая функция h, для которой имеет место $\chi_{\nu(n)} = \Phi^K_{h(n)}$ при всех $n \in \omega$.

Под *вычислимой нумерацией низких множеств* мы подразумеваем вычислимую нумерацию Δ^0_2-множеств ν такую, что существует вычислимая функция h, для которой имеет место $\chi_{\nu(n)'} = \Phi^K_{h(n)}$ при всех $n \in \omega$.

Будем говорить, что нумерация ν является CS*-нумерацией относительно* вычислимой инъективной функции C из $\omega \times \omega$ в ω, если существуют вычислимая бинарная функция S такая, что для всех n и m имеет место $\nu(S(n,m)) = \nu(n)_C^{(m)}$, где множество $X_C^{(m)}$ для множества $X \subseteq \omega$ определяется следующим образом:

$$X_C^{(m)} = \{k \mid C(m,k) \in X\}.$$

Будем также говорить, что нумерация ν является CS*-нумерацией*, если она является CS-нумерацией относительно некоторой вычислимой инъективной функции C из $\omega \times \omega$ в ω.

Имеет место следующее

Предложение 4.1. *Пусть дана вычислимая нумерация α Δ_2^0 множеств, такая, что класс $\mathcal{C} = \{\alpha(n)\}_{n\in\omega}$ замкнут вниз относительно 1-сводимости, то есть если $X \in \mathcal{C}$ и $Y \leq_1 X$, то $Y \in \mathcal{C}$. Тогда для любой вычислимой инъективной функции $C : \omega \times \omega \to \omega$, существует вычислимая нумерация ν Δ_2^0 множеств, являющаяся CS-нумерацией относительно C, такая, что $\mathcal{C} = \{\nu(n)\}_{n\in\omega}$.*

Доказательство. Фиксируем вычислимую инъекцию $C : \omega \times \omega \to \omega$.

Пусть T — множество строк конечной ненулевой длины в алфавите ω. Конкатенацию строк $a, b \in T$ будем записывать через $a * b$. Выражение $\langle i \rangle$, где $i \in \omega$, означает строку из T длины 1, состоящую из символа i. Фиксируем также некоторую вычислимую биективную нумерацию τ множества T.

Определим по индукции нумерацию ν:

$$\nu(\tau^{-1}(\langle m \rangle)) = \alpha(m),$$

$$\nu(\tau^{-1}(x * \langle m \rangle)) = (\nu(\tau^{-1}(x)))_C^{(m)},$$

где $m \in \omega$ и $x \in T$.

Поскольку $X_C^{(m)} \leq_1 X$ имеем $\mathcal{C} = \{\{\nu(n)\}_{n\in\omega}$. Ясно, что ν — вычислимая нумерация Δ_2^0 множеств. Для того, чтобы убедиться в том, что ν является CS нумерацией достаточно определить функцию S следующим образом:

$$S(n,m) = \tau^{-1}(\tau(n) * \langle m \rangle)$$

для всех $n, m \in \omega$. $\square$

Следующая теорема описывает спектры семейств $\mathcal{W}(\mathcal{R}, \nu)$, где $\mathcal{R}$ — вычислимо перечислимое семейство, содержащее все конечные множества, а ν — вычислимая нумерация Δ^0_2 множеств.

Теорема 4.2. *Пусть ν — вычислимая нумерация Δ^0_2-множеств, и $\mathcal{R}$ — вычислимо перечислимое семейство, содержащее все конечные множества. Тогда для степени $\mathbf{x}$ условия* (i), (ii) *и* (iii) *эквивалентны.*

(i) $\mathbf{x} \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{R}, \nu))$.

(ii) *Существует в.п. относительно $\mathbf{x}$ множество Y такое, что для всех n, и m имеет место $Y^{(\langle n,m\rangle)} \neq \nu(n)$ и $k \in Y^{(\langle n,m\rangle)}$ для всех $k < m$.*

(iii) *Существует в.п. относительно $\mathbf{x}$ множество Y такое, что для всех n, и m имеет место $Y^{(\langle n,m\rangle)} \neq \nu(n)$ и $k \in Y^{(\langle n,m\rangle)}$ для всех $k < m$, причем множество $Y^{(\langle n,m\rangle)}$ конечно.*

Условие (iv) *является достаточным для выполнения условий* (i), (ii) *и* (iii).

(iv) *Существует в.п. относительно $\mathbf{x}$ множество Z такое, что $F \cup Z \notin \{\nu(n)\}_{n\in\omega}$ для любого конечного множества F.*

Если ν является CS-нумерацией, то каждое из условий (iv) *и* (v) *является необходимым и достаточным для условий* (i), (ii) *и* (iii).

(v) *Существует в.п. относительно $\mathbf{x}$ множество $Z \notin \{\nu(n)\}_{n\in\omega}$.*

Доказательство. Для доказательства (iv) $\Longrightarrow$ (ii) достаточно определить

$$Y = \{\langle\langle n, m\rangle, k\rangle \mid k < m \vee k \in Z\}.$$

Проверим теперь эквивалентность условий (ii), (iv) и (v) для CS-нумераций. Докажем сначала, что если ν — CS-нумерация, то из (v) следует (iv). Пусть $Z \notin \{\nu(n)\}_{n\in\omega}$ и Z в.п. относительно $\mathbf{x}$. Определим множество $\widetilde{Z}$, являющееся в.п. относительно $\mathbf{x}$,

$$\widetilde{Z} = \{C(m, k) \mid m \in \omega \;\&\; k \in Z\}.$$

Предположим, что $\widetilde{Z} \cup F = \nu(n)$ для некоторого конечного множества F и номера $n \in \omega$. Так как функция C из определения CS-нумерации инъективна, существует $m \in \omega$ такое, что $C(m,k) \notin F$ для каждого $k \in \omega$. Тогда

$$Z = \widetilde{Z}_C^{(m)} = (\widetilde{Z} \cup F)_C^{(m)} = \nu(n)_C^{(m)} = \nu(S(n,m)),$$

что невозможно. Таким образом, множество $\widetilde{Z}$ удовлетворяет условию (iv).

Покажем, что если ν — CS-нумерация, то из (ii) следует (v). Пусть множество Y удовлетворяет условию (ii). Полагаем

$$Z = \{C(m,k) \mid m \in \omega \ \&\ k \in Y^{(\langle S(m,m),0\rangle)}\}.$$

Тогда для всех n имеем $Z_C^{(n)} = Y^{(\langle S(n,n),0\rangle)} \neq \nu(S(n,n)) = \nu(n)_C^{(n)}$. Таким образом, $Z \notin \{\nu(n)\}_{n\in\omega}$.

Остается доказать эквивалентность условий (i), (ii) и (iii). Импликация (i) $\Longrightarrow$ (ii) следует из более сильного утверждения.

Лемма 4.3. *Пусть ν — произвольная нумерация множеств, а $\mathcal{R}$ — некоторое семейство множеств такое, что каждое конечное множество продолжается до двух различных элементов из $\mathcal{R}$. Тогда существует вычислимая функция $F(e,n,m)$, такая, что для любых $e,n,m \in \omega$ и $X \subseteq \omega$ если W_e^X — перечисление $\mathcal{W}(\mathcal{R},\nu)$, то $W_{F(e,n,m)}^X \in \mathcal{R}$, $k \in W_{F(e,n,m)}^X$ для всех $k < m$, и $W_{F(e,n,m)}^X \neq \nu(n)$.*

Доказательство леммы. Воспользуемся s-m-n теоремой несколько раз. А именно, выберем сначала вычислимую функцию f такую, что для всех $e,n,m,z \in \omega$ и $X \subseteq \omega$ имеет место

$$\Phi_{f(e,n,m)}^X(z) = Pr_1((\mu\langle x,s\rangle)[\{\langle x,2n\rangle\} \cup \{\langle x,2k+1\rangle \mid k < m\} \subseteq W_{e,s}^X]).$$

Из наложенных условий на $\mathcal{R}$ следует, что если W_e^X — перечисление $\mathcal{W}(\mathcal{R},\nu)$, то значение $\Phi_{f(e,n,m)}^X(z)$ всюду определено (и не зависит от z). Теперь остается определить вычислимую функцию $F(e,n,m)$ так, чтобы для всех $e,n,m \in \omega$

$$W_{F(e,n,m)}^X = \{y \mid \Phi_{f(e,n,m)}^X(0)\downarrow \ \&\ \langle \Phi_{f(e,n,m)}^X(0), 2y+1\rangle \in W_{e,s}^X\}.$$

Доказательство леммы завершено.

Докажем теперь импликацию (i) $\Longrightarrow$ (ii). Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{R},\nu))$ и $X \in \mathbf{x}$. Тогда существует $e \in \omega$, такое, что W_e^X — перечисление $\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu)$. Множество Y может быть определено следующим образом

$$Y = \{\langle\langle n,m\rangle,k\rangle \mid k \in W^X_{F(e,n,m)}\}.$$

Докажем импликацию (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Пусть для $X \in \mathbf{x}$ множество $Y = W_i^X$ удовлетворяет условию (ii). Фиксируем вычислимую функцию h, удовлетворяющую условию $\chi_{\nu(n)} = \Phi^K_{h(n)}$ для всех $n \in \omega$, и индекс e такой, что $K = W_e$.

Определим значение $N(n,z,s) = 1$, если $\Phi^{W_{e,s}}_{h(n),s}(z) \downarrow= 1$, и $N(n,z,s) = 0$ в противном случае. Ясно, что $\lim_s N(n,z,s) = \chi_{\nu(n)}(z)$.

Пусть $l(n,m,s)$ — наименьшее натуральное число $y < s$, такое, что либо $\langle\langle n,m\rangle,y\rangle \in W^X_{i,s}$ и $N(n,z,s) = 0$, либо $\langle\langle n,m\rangle,y\rangle \notin W^X_{i,s}$ и $N(n,z,s) = 1$. Если такого $y < s$ не существует, то полагаем $l(n,m,s) = 0$. Так как $Y^{(\langle n,m\rangle)} \neq \nu(n)$, то для любых n и m существует предел $\lim_s l(n,m,s) = l(n,m)$, причем $\chi_Y(\langle\langle n,m\rangle, l(n,m)\rangle) \neq \chi_{\nu(n)}(l(n,m))$. Тогда множество

$$\widetilde{Y} = \{\langle\langle n,m\rangle,k\rangle \mid \langle\langle n,m\rangle,k\rangle \in Y \;\&\; (\exists s)[k < \max(m, l(n,m,s)+1)]\}$$

удовлетворяет условию (iii).

Докажем импликацию (iii) $\Longrightarrow$ (i). Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{R}$ совпадает с семейством $\mathcal{F}$ всех конечных множеств. Тогда

$$\mathcal{R} = \mathcal{F} = \{D_m | m \in \omega\}.$$

Пусть множество Y является вычислимо перечислимым относительно $\mathbf{x}$ и Y удовлетворяет условию (iii). Построим перечисление M семейства $\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu)$, вычислимо перечислимое относительно $\mathbf{x}$:

$$M = \{\langle\langle n,m,z,t\rangle,2n\rangle \mid n,m,z,t \in \omega\} \cup \{\langle\langle n,m,z,t\rangle,2x+1\rangle \mid x \in D_m\} \cup$$
$$\{\langle\langle n,m,z,t\rangle,2x+1\rangle \mid x \in Y^{(\langle n,1+\max(D_m)\rangle)} \;\&\; (\exists s > t)[N(n,z,s) = \chi_{D_m}(z)]\},$$

где $N(n,z,s)$ — вычислимая функция, определенная при доказательстве импликации (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Ясно, что $M^{(\langle n,m,z,t\rangle)} = \{n\} \oplus D_m$, если $N(n,z,s) \neq \chi_{D_m}(z)$ для всех $s > t$, и $M^{(\langle n,m,z,t\rangle)} = \{n\} \oplus$

$Y^{(\langle n,1+\max(D_m)\rangle)}$, если $N(n,z,s)=\chi_{D_m}(z)$ для некоторого $s>t$. В первом случае имеем $\nu(n)\neq D_m$, а во втором $\nu(n)\neq Y^{\langle(\langle n,1+\max(D_m)\rangle)\rangle}$ в силу условия (iii). Поэтому $M^{(\langle n,m,z,t\rangle)}\in\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu)$ для всех $n,m,z,t\in\omega$.

Пусть теперь $\{n\}\oplus F\in\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu)$. Тогда F конечно и $F\neq\nu(n)$. Выберем m и z так, чтобы $F=D_m$ и $\chi_F(z)\neq\chi_{\nu(n)}(z)$. Пусть t такое число, что $\chi_{\nu(n)}(z)=N(n,z,s)$ для всех $s>t$. Тогда $M^{(\langle n,m,z,t\rangle)}=\{n\}\oplus F$.

Таким образом $\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu)=\{M^{(k)}\mid k\in\omega\}$, то есть M является перечислением $\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu)$.

Рассмотрим теперь общий случай, когда семейство $\mathcal{R}$ вычислимо перечислимо и $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{R}$. Фиксируем вычислимую функцию r такую, что

$$\mathcal{R}=\{W_{r(m)}|m\in\omega\}.$$

Пусть опять множество Y является вычислимо перечислимым относительно $\mathbf{x}$ и Y удовлетворяет условию (iii). Определим теперь множество M следующим образом:

$$M=\{\langle\langle n,m,z,t\rangle,2n\rangle\mid n,m,z,t\in\omega\}\cup$$

$$\cup\{\langle\langle n,m,z,t\rangle,2x+1\rangle\mid(\exists u>t)[x\in W_{r(m),u}\ \&$$

$$\&\ (\forall s\in(t,u])[N(n,z,s)\neq\chi_{W_{r(m),s}}]]\}\cup$$

$$\cup\{\langle\langle n,m,z,t\rangle,2x+1\rangle\mid(\exists u>t)[x\in Y^{(\langle n,1+\max(W_{r(m),u})\rangle)}\ \&$$

$$\&\ N(n,z,s)=\chi_{W_{r(m),u}}(z)\ \&\ (\forall s\in(t,u))[N(n,z,s)\neq\chi_{W_{r(m),s}}]],$$

Тогда $M^{(\langle n,m,z,t\rangle)}=\{n\}\oplus W_{r(m)}$, если $N(n,z,s)\neq\chi_{D_m}(z)$ для всех $s>t$, и $M^{(\langle n,m,z,t\rangle)}=\{n\}\oplus Y^{(\langle n,k\rangle)}$ для некоторого $k\in\omega$, если $N(n,z,s)=\chi_{D_m}(z)$ для некоторого $s>t$. В первом случае имеем $\nu(n)\neq W_{r(m)}\in\mathcal{R}$, а во втором $\nu(n)\neq Y^{\langle(\langle n,k\rangle)\rangle}\in\mathcal{F}\subseteq\mathcal{R}$ в силу условия (iii). Поэтому $M^{(\langle n,m,z,t\rangle)}\in\mathcal{W}(\mathcal{R},\nu)$ для всех $n,m,z,t\in\omega$.

Пусть $\{n\}\oplus U\in\mathcal{W}(\mathcal{R},\nu)$. Тогда $U\in\mathcal{R}$ и $U\neq\nu(n)$. Выберем m и z так, чтобы $U=W_{r(m)}$ и $\chi_U(z)\neq\chi_{\nu(n)}(z)$. Пусть t такое число, что $\chi_{\nu(n)}(z)=N(n,z,s)$ и $\chi_{W_{r(m),s}}(z)=\chi_U(z)$ для всех $s>t$. Тогда $M^{(\langle n,m,z,t\rangle)}=\{n\}\oplus U$.

Теорема 4.2 доказана полностью. $\square$

Следствие 4.4. *Пусть* $\mathbf{x}' > \mathbf{0}'$, $\mathcal{R}$ *— вычислимо перечислимое семейство, содержащее все конечные множества, и* ν *— вычислимая нумерация* Δ^0_2*-множеств. Тогда* $\mathbf{x} \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{R}, \nu))$.

Доказательство. Пусть $X \in \mathbf{x}$. Тогда в.п. относительно $\mathbf{x}$ множество $X' \in \mathbf{x}'$ не является Δ^0_2-множеством. Применяем теорему 4.2 (условие (iv)) при $Z = X'$. $\square$

Следствие 4.5. (Вехнер [23]). *Пусть* $\varepsilon(n) = W_n$ *для всех* n*. Тогда* $\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon)) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} > \mathbf{0}\}$.

Доказательство. Ясно, что ε является вычислимой CS-нумерацией Δ^0_2-множеств. Условие (v) теоремы 4.2 эквивалентно существованию не-в.п. множества, являющегося в.п. относительно $\mathbf{x}$, что, в свою очередь, эквивалентно условию $\mathbf{x} > \mathbf{0}$. (Если множество $X \in \mathbf{x}$ не вычислимо, то можем взять множество $Y = X \oplus \overline{X}$). $\square$

Следствие 4.6. *Пусть* $\mathbf{a}' = \mathbf{0}'$ *и* $\varepsilon^A(n) = W^A_n$*, где* $A \in \mathbf{a}$*. Тогда* $\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^A)) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leq \mathbf{a}\}$.

Доказательство. Из $\mathbf{a}' = \mathbf{0}'$, следует, что что ε^A является вычислимой нумерацией Δ^0_2-множеств, причем семейство $\{\varepsilon^A(n)\}_{n \in \omega}$ состоит в точности из всех множеств, вычислимо перечислимых относительно $\mathbf{a}$. Данная нумерация является, очевидно, CS-нумерацией. Тогда условие (v) теоремы 4.2 эквивалентно условию $\mathbf{x} \not\leq \mathbf{a}$. $\square$.

Известно, что существует бесконечно много низких минимальных степеней. Поэтому, возможны спектры степеней семейств, содержащие все степени, кроме двух степеней, одна из которых нулевая.

Следствие 4.7. *Пусть* $\mathbf{a}' = \mathbf{0}'$*,* $\mathbf{a}$ *— минимальная степень,* $\varepsilon^A(n) = W^A_n$*, где* $A \in \mathbf{a}$*. Тогда* $\mathrm{card}\,(\mathbf{D} - \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^A))) = 2$.

Другим приложением теоремы 4.2 служит следствие 4.8, дающее пример двух спектров алгебраических систем, объединение которых снова есть спектр алгебраических систем.

Следствие 4.8. *Пусть* $\mathbf{a} > \mathbf{c}$*,* $\mathbf{b} > \mathbf{c}$*,* $\mathbf{a}' = \mathbf{0}'$*,* $\mathbf{a}' = \mathbf{0}'$ *и* $\mathbf{a} \cap \mathbf{b} = \mathbf{c}$*. Тогда* $\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^C)) \neq \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon_A)), \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^C)) \neq \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^B))$ *и*

$$\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^C)) = \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon_A)) \cup \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^B)),$$

где $A \in \mathbf{a}$*,* $B \in \mathbf{b}$ *и* $C \in \mathbf{c}$*.*

Отметим, что из теорем 5.1 и 5.3 следует, что существует вычислимая нумерация Δ^0_2-множеств ν, такая, что $\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu)) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leq \mathbf{a}\} \cup \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leq \mathbf{b}\}$, даже если низкие степени $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не имеют наибольшей нижней грани.

Предложение 4.1 вместе с теоремой 4.2 позволяет установить существование спектров, состоящих из степеней, тьюринговые скачки которых не лежат в заданной вычислимой совокупности Δ^0_2 множеств, замкнутой вниз относительно 1-сводимости.

Следствие 4.9. *Пусть класс $\mathcal{C} \subseteq \Delta^0_2$ имеет вычислимую нумерацию Δ^0_2 множеств и замкнут вниз относительно 1-сводимости. Тогда для некоторой вычислимой CS-нумерации ν имеем*

$$\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu)) = \{\deg(X) \mid X' \notin \mathcal{C}\}.$$

Доказательство. Так как $Z \leq_1 X'$ для любого вычислимо перечислимого относительно X множества Z имеем

$$(\exists Z \text{ в.п. относительно } X)[Z \notin \mathcal{C}] \iff X' \notin \mathcal{C}.$$

□

Например, каждый уровень иерархии Ершова

$$\{\Sigma^{-1}_a, \Pi^{-1}_a, \Delta^{-1}_a \mid a \in O\}$$

очевидно удовлетворяет условиям следствия 4.9. В частности, для класса Δ^{-1}_ω имеем

Следствие 4.10. *Существует такая вычислимая нумерация ϖ Δ^0_2 множеств, что*

$$\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\varpi)) = \{\deg(X) \mid \emptyset' <_{\mathrm{tt}} X'\}.$$

Доказательство. Действительно, по результату Картенса [6] имеем

$$(\forall Z \text{ в.п. относительно } X)[Z \in \Delta^{-1}_\omega] \iff X' \in \Delta^{-1}_\omega \iff X' \leq_{\mathrm{tt}} \emptyset'.$$

□

Множества X со свойством $X' \leq_{\mathrm{tt}} \emptyset'$ и их степени называются *супернизкими* (см. например [15]). Таким образом, следствие 4.10 дает пример спектра степеней системы, совпадающие с классом всех несупернизких степеней.

Отметим, что доказательство теоремы 4.2 эффективно, в том смысле, что используя данное представлению графа $\mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{R},\nu))$ можно получить перечисление множества Y и множества Z (если ν — CS-нумерация), и наоборот, по данному перечислению ножества Y или множества Z можно эффективно найти представление графа $\mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{R},\nu))$.

Другими словами имеет место следующий результат:

Следствие 4.11. *Если ν — вычислимая нумерация Δ^0_2-множеств, и $\mathcal{R}$ — вычислимо перечислимое семейство, содержащее все конечные множества, то проблема представимости* $\mathrm{Pres}(\mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{R},\nu)))$ *строго эквивалентна*

- *проблеме, состоящей из всех множеств X таких, что множество $\mathrm{Pr}_1(X) = Y$ удовлетворяет условиям: $Y^{(\langle n,m\rangle)} \neq \nu(n)$ и $k \in Y^{(\langle n,m\rangle)}$ для всех для всех n и m и $k < m$;*
- *проблеме, состоящей из всех множеств X таких, что множество $\mathrm{Pr}_1(X) = Y$ удовлетворяет условиям: $Y^{(\langle n,m\rangle)}$ конечно, $Y^{(\langle n,m\rangle)} \neq \nu(n)$ и $k \in Y^{(\langle n,m\rangle)}$ для всех для всех n и m и $k < m$;*
- *(если ν является CS-нумерацией) проблеме, состоящей из всех множеств X таких, что $\mathrm{Pr}_1(X) \notin \{\nu(n)\}_{n\in\omega}$.*

Кроме того, проблема $\mathrm{Pres}(\mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{R},\nu)))$ *строго сводится к проблеме, состоящей из всех множеств X таких, что множество $\mathrm{Pr}_1(X) \cup F \notin \{\nu(n)\}_{n\in\omega}$ для всех конечных множеств F.*

В частности, для нумерации ε из следствия 4.5 проблема представимости системы $\mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F},\varepsilon))$ строго эквивалентна проблеме NC, состоящей из всех невычислимых множеств.

Следующая теорема позволяет строить примеры систем вида $\mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{R},\nu))$, проблема представимости которых слабо, но не сильно эквивалентны проблеме NC.

Теорема 4.12. *Пусть $\mathcal{R}$ — вычислимо перечислимое семейство, содержащее все конечные множества, и γ — вычислимая нумерация низких множеств, такая, что $\deg(\gamma(n)) \cap \deg(\gamma(m)) = \mathbf{0}$ для всех $n \neq m$, и $\beta(n) = W_n^{\gamma(n)}$ для всех n. Тогда $\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{R},\beta)) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} > \mathbf{0}\}$,* *и для каждого $e \in \omega$ существует $n \in \omega$ такое, что множество $W_e^{\gamma(n)}$ не является перечислением $\mathcal{W}(\mathcal{R}, \beta)$.*

Доказательство. По теореме рекурсии существует функция $n(e)$, такая, что для всех $e \in \omega$ и $X \subseteq \omega$ имеет место $W^X_{F(e,n(e),0)} = W^X_{n(e)}$, где F — вычислимая функция из леммы 4.3. Тогда

$$W^{\gamma(n(e))}_{F(e,n(e),0)} = W^{\gamma(n(e))}_{n(e)} = \beta(n(e))$$

для всех $e \in \omega$. По лемме 4.3 $W_e^{\gamma(n(e))}$ не является перечислением $\mathcal{W}(\mathcal{R}, \beta)$ ни для какого $e \in \omega$.

Докажем, что $\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{R}, \beta)) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} > \mathbf{0}\}$. Отметим, что в силу уже доказанного имеем $\mathbf{0} \notin \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{R}, \beta))$. Пусть $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ и $X \in \mathbf{x}$. Поскольку γ — вычислимая нумерация низких множеств, и, следовательно, β — вычислимая нумерация Δ^0_2-множеств, для того, чтобы установить $\mathbf{x} \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{R}, \beta))$, достаточно проверить условие (iv) теоремы 4.2.

Докажем, что в качестве Z всегда можно взять множество $X \oplus \overline{X}$ или множество $\overline{X} \oplus X$. Действительно, в противном случае существовали бы конечные множества F_1, F_2 и номера n_1 и n_2, такие, что

$$F_1 \cup (X \oplus \overline{X}) = \beta(n_1) \text{ и } F_2 \cup (\overline{X} \oplus X) = \beta(n_2).$$

Так как для любого n множество $\beta(n)$ является в.п. относительно $\gamma(n)$, имеем $X \leq_T \gamma(n_1)$ и $X \leq_T \gamma(n_2)$. Учитывая условия, наложенные на нумерацию γ, получаем $n_1 = n_2$. Но тогда $X \oplus \overline{X} =^* \overline{X} \oplus X$, что невозможно. $\square$

Следствие 4.13. *Пусть $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ — вычислимо перечислимые семейства, содержащие все конечные множества (например, $\mathcal{R}_1$ совпадает с семейством $\mathcal{E}$ всех в.п. множеств, а $\mathcal{R}_2$ — с семейством $\mathcal{F}$ всех конечных множеств). Тогда существуют вычислимые нумерации α и β Δ^0_2 множеств такие, что*

- $\mathfrak{E}\mathfrak{F}(\mathcal{W}(\mathcal{R}_1, \alpha)) \equiv_w \mathfrak{E}\mathfrak{F}(\mathcal{W}(\mathcal{R}_2, \beta))$,
- $\mathfrak{E}\mathfrak{F}(\mathcal{W}(\mathcal{R}_1, \alpha)) \leq_s \mathfrak{E}\mathfrak{F}(\mathcal{W}(\mathcal{R}_2, \beta))$ *и*
- $\mathfrak{E}\mathfrak{F}(\mathcal{W}(\mathcal{R}_2, \beta)) \not\leq_s \mathfrak{E}\mathfrak{F}(\mathcal{W}(\mathcal{R}_1, \alpha))$.

Доказательство. Пусть $\alpha(n) = \varepsilon(n) = W_n$ и $\beta(n) = W_n^{\gamma(n)}$ для всех $n \in \omega$, где $\gamma(n)$ —нумерация, удовлетворяющая условиям теоремы 4.12 (построение такой нумерации является легким упражнением). Из следствия 4.11 следует, что

$$\mathrm{Pres}(\mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{R}_1, \alpha))) \equiv_s \mathrm{NC} = \{X \mid X \text{ не вычислимо}\}.$$

По теореме 4.12 имеем

$$\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{R}_1, \alpha))) = \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{R}_2, \beta))) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} > \mathbf{0}\}.$$

Поэтому

$$\mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{R}_1, \alpha)) \equiv_w \mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{R}_2, \beta))$$

и

$$\mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{R}_1, \alpha)) \leq_s \mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{R}_2, \beta)).$$

Предположим, что

$$\mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{R}_2, \beta)) \leq_s \mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{R}_1, \alpha)).$$

Тогда $\mathrm{Enum}(\mathcal{W}(\mathcal{R}_2, \beta))) \leq_s \mathrm{NC}$. Значит, существует $e \in \omega$ такое, что W_e^X — перечисление $\mathcal{W}(\mathcal{R}_2, \beta)$ для любого невычислимого X. В частности, $W_e^{\gamma(n)}$ — перечисление $\mathcal{W}(\mathcal{R}_2, \beta)$ для любого $n \in \omega$. Противоречие с теоремой 4.12. $\Box$

Метод доказательства из теоремы 4.12 будет применен при доказательстве результатов из последней главы.

Замечание. Отметим, что для эквивалентности условий (i) и (v) в теореме 4.2 условие «ν является CS-нумерацией» существенно. Для того, чтобы в этом убедиться фиксируем вычислимую нумерацию ν всех в.п. множеств, такую что $\nu(n_0) = \omega$ имеет место лишь для единственного номера n_0. Ясно, что для степени $\mathbf{0}$ условие (v) теоремы 4.2 не выполнено. С другой стороны вычислимое множество

$$Y = \{\langle\langle n, m\rangle, k\rangle \mid k < m \vee n \neq n_0\}$$

удовлетворяет условию (ii) теоремы 4.2, откуда получаем $\mathbf{0} \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu))$. Кроме того, нетрудно установить, что для нумерации $\nu(n) = \{0\} \cup W_n$ и степени $\mathbf{0}$ условие (i) неверно, но условие (v) имеет место при $Z = \emptyset \in \mathbf{0}$.

5 Операции на нумерациях и спектры

Рассмотрим две операции на нумерациях. Пусть $\nu_1, \nu_2 : \omega \to 2^\omega$. Нумерации $\nu_1 + \nu_2$ и $\nu_1 \times \nu_2$ определяются следующим образом:

$$
\begin{array}{r}
(\nu_1 + \nu_2)(2n) = \nu_1(n), \\
(\nu_1 + \nu_2)(2n+1) = \nu_2(n) \\
\textit{(прямая сумма нумераций } \nu_1 \textit{ и } \nu_2\textit{)},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
(\nu_1 \times \nu_2)(\langle n, m \rangle) = \nu_1(n) \oplus \nu_2(m), \\
\textit{(прямое произведение нумераций } \nu_1 \textit{ и } \nu_2\textit{)},
\end{array}
$$

где $n, m \in \omega$.

Теорема 5.1. (i) *Если ν_1 и ν_2 являются вычислимыми нумерациями Δ^0_2-множеств, то*

$$\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1 + \nu_2)) = \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1)) \cap \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_2)),$$

$$\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1)) \subseteq \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1 \times \nu_2)) \text{ и}$$
$$\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_2)) \subseteq \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1 \times \nu_2)).$$

При этом, если ν_1 и ν_2 являются CS-нумерациями относительно одной и той же вычислимой инъекции $C : \omega \times \omega \to \omega$, то $\nu_1 + \nu_2$ также является CS-нумерацией относительно C.

(ii) *Если, кроме того, ν_1 и ν_2 являются CS-нумерациями, то $\nu_1 \times \nu_2$ также является CS-нумерацией, и*

$$\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1 \times \nu_2)) = \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1)) \cup \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_2)).$$

Доказательство. (i). Докажем утверждение $\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1 + \nu_2)) \subseteq \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1))$. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1 + \nu_2))$ и множество $Y_{\nu_1+\nu_2}$ удовлетворяет условию (ii) теоремы 4.2 при $\nu = \nu_1 + \nu_2$. Тогда множество

$$Y_{\nu_1} = \{\langle\langle n, m\rangle, k\rangle \mid k \in Y^{(\langle\langle 2n, m\rangle\rangle)}_{\nu_1+\nu_2}\}$$

удовлетворяет условию (ii) теоремы 4.2 при $\nu = \nu_1$ и, следовательно, $\mathbf{x} \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1))$. Утверждение $\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1 + \nu_2)) \subseteq \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_2))$ доказывается аналогично.

Докажем $\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_1)) \cap \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_2)) \subseteq \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_1+\nu_2))$. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_1)) \cap \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_2))$, множество Y_{ν_1} удовлетворяет условию (ii) теоремы 4.2 при $\nu=\nu_1$, и Y_{ν_2} удовлетворяет условию (ii) теоремы 4.2 при $\nu=\nu_2$. Тогда множество

$$Y_{\nu_1+\nu_2} = \{\langle\langle 2n,m\rangle,k\rangle \mid k \in Y_{\nu_1}^{(\langle n,m\rangle)}\} \cup \{\langle\langle 2n+1,m\rangle,k\rangle \mid k \in Y_{\nu_2}^{(\langle n,m\rangle)}\}$$

удовлетворяет условию (ii) теоремы 4.2 при $\nu=\nu_1+\nu_2$

Докажем $\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_1)) \subseteq \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_1\times\nu_2))$. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_1))$ и Y_{ν_1} удовлетворяет условию (ii) теоремы 4.2 при $\nu=\nu_1$. Тогда множество

$$Y_{\nu_1\times\nu_2} = \{\langle\langle n,m\rangle,2k\rangle \mid k \in Y_{\nu_1}^{(\langle n,m\rangle)}\} \cup \{\langle\langle n,m\rangle,2k+1\rangle \mid n,m,k \in \omega\}$$

удовлетворяет условию (ii) теоремы 4.2 при $\nu=\nu_1\times\nu_2$ и, следовательно, $\mathbf{x} \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_1\times\nu_2))$. Утверждение $\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_2)) \subseteq \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_1\times\nu_2))$ доказывается аналогично.

Пусть ν_1 — CS-нумерация относительно C с вычислимой функцией S_{ν_1}, а ν_2 — CS-нумерация относительно C с вычислимой функцией S_{ν_2}. Тогда $\nu_1+\nu_2$ — CS-нумерация относительно C с вычислимой функцией $S_{\nu_1+\nu_2}$, где

$$S_{\nu_1+\nu_2}(2n) = S_{\nu_1}(n)$$

и

$$S_{\nu_1+\nu_2}(2n+1) = S_{\nu_2}(n)$$

для всех $n \in \omega$.

(ii). Пусть ν_1 — CS-нумерация с вычислимыми функциями C_{ν_1} и S_{ν_1}, а ν_2 — CS-нумерация с вычислимыми функциями C_{ν_2} и S_{ν_2}. Тогда $\nu_1\times\nu_2$ — CS-нумерация с вычислимыми функциями $C_{\nu_1\times\nu_2}$ и $S_{\nu_1\times\nu_2}$, где

$$C_{\nu_1\times\nu_2}(n,2m) = 2C_{\nu_1}(n,m), C_{\nu_1\times\nu_2}(n,2m+1) = 2C_{\nu_2}(n,m)+1,$$

и

$$S_{\nu_1\times\nu_2}(\langle m,l\rangle,n) = \langle S_{\nu_1}(m,n), S_{\nu_2}(l,n)\rangle$$

для всех $m,n,l \in \omega$.

Осталось убедиться в справедливости утверждения $\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_1\times\nu_2))\subseteq\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_1))\cup\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_2))$. Пусть $\mathbf{x}\in\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_1\times\nu_2))$ и множество $Z=Z_1\oplus Z_2$ удовлетворяет условию (v) теоремы 4.2 при $\nu=\nu_1\times\nu_2$. Если $\mathbf{x}\notin\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_1))\cup\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_2))$, то существуют номера n_1 и n_2, такие, что $Z_1=\nu_1(n_1)$ и $Z_2=\nu_2(n_2)$. Но тогда

$$Z=Z_1\oplus Z_2=\nu_1(n_1)\oplus\nu_2(n_2)=(\nu_1\times\nu_2)(\langle n_1,n_2\rangle),$$

что противоречит выбору множества Z. $\square$

В силу существования бесконечно большого числа различных низких минимальных степеней из следствия 4.7 получаем следующее утверждение.

Следствие 5.2. *Для любого $k\leq\omega$ существует вычислимая нумерация ν_k Δ_2^0 множеств, для которой имеет место*

$$\mathrm{card}\,(\mathbf{D}-\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_k)))=k.$$

Доказательство. Если $k=0$, то полагаем $\nu_k(n)=\emptyset$ для всех $n\in\omega$. Если $k=1$, то полагаем $\nu_k(n)=\varepsilon(n)=W_n$ для всех $n\in\omega$ (следствие 4.5). Если $k=\omega$, то полагаем $\nu_k(n)=\varepsilon^A(n)=W_n^A$ для всех $n\in\omega$, где A — произвольная невычислимое низкое множество, не имеющее минимальную степень.

Если $1<k<\omega$, то возьмем $k-1$ различных минимальных низких степеней $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ \dots\ \mathbf{a}_{k-1}$. Выберем в каждой указанной степени по представителю $A_i\in\mathbf{a}_i$, $1\leq i<k$. Полагаем теперь

$$\nu_k=\varepsilon^{A_1}+(\varepsilon^{A_2}+\cdots(\varepsilon^{A_{k-2}}+\varepsilon^{A_{k-1}})\cdots),$$

где $\varepsilon^{A_i}(n)=W_n^{A_i}$, $1\leq i<k$. Тогда по теореме 5.1

$$\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_k))=\mathbf{D}-\{\mathbf{0},\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_{k-1}\}.$$

$\square$

Теорема 5.3. *Пусть ν — вычислимая нумерация Δ_2^0-множеств (необязательно CS-нумерация), $\mathbf{a}'=\mathbf{0}'$, $A\in\mathbf{a}$, и ε^A — нумерация из следствия 4.6. Тогда*

$$\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu\times\varepsilon^A))=\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu))\cup\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\varepsilon^A)).$$

Доказательство. В силу теоремы 5.1 достаточно показать, что $\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu \times \varepsilon^A)) \subseteq \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1)) \cup \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^A))$. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu \times \varepsilon^A))$, $X \in \mathbf{x}$, и W_e^X — перечисление семейства $\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu \times \varepsilon^A)$. По лемме 4.3 существует вычислимая функция F такая, что для всех n и m справедливо

$$\{k \mid k < m\} \subseteq W^X_{F(e,n,m)} \text{ и } W^X_{F(e,n,m)} \neq (\nu \times \varepsilon^A)(n).$$

Выберем вычислимые функции G и H так, чтобы

$$W^X_{F(e,n,2m)} = W^X_{G(n,m)} \oplus W^X_{H(n,m)}$$

для всех n и m. Ясно, что $\{k \mid k < m\} \subseteq W^X_{G(n,m)}$ для всех n и m. Предположим, что $\mathbf{x} \notin \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^A))$. Тогда $X \leq_T A$ в силу следствия 4.6. Поэтому существует вычислимая функция N такая, что

$$W^A_{N(n,l,m)} = W^X_{H(\langle n,l\rangle,m)}$$

для всех $n, l, m \in \omega$. По теореме рекурсии существует вычислимая функция $L(n,m)$ такая, что

$$W^X_{H(\langle n,L(n,m)\rangle,m)} = W^A_{N(n,L(n,m),m)} = W^A_{L(n,m)} = \varepsilon^A(L(n,m))$$

для всех $n, m \in \omega$. Предположим, что $W^X_{G(\langle n,L(n,m)\rangle,m)} = \nu(n)$ для некоторых n и m. Тогда

$$W^X_{F(e,\langle n,L(n,m)\rangle,2m)} = \nu(n) \oplus \varepsilon^A(L(n,m)) = (\nu \times \varepsilon^A)(\langle n, L(n,m)\rangle)$$

в противоречии с выбором функции F. Таким образом, $W^X_{G(\langle n,L(n,m)\rangle,m)} \neq \nu(n)$ для всех n и m. Кроме того, $\{k \mid k < m\} \subseteq W^X_{G(\langle n,L(n,m)\rangle,m)}$ для всех n и m. Для того, чтобы установить $\mathbf{x} \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu))$ осталось применить условие (ii) теоремы 4.2 при

$$Y = \{\langle\langle n,m\rangle, k\rangle \mid k \in W^X_{G(\langle n,L(n,m)\rangle,m)}\}. \quad \square$$

Теорема 5.1 в отличие от теоремы 5.3 не имеет места для произвольных нумераций ν_1 и ν_2 (см. теорему 5.11). Вместе с тем прямая сумма нумераций CS-нумераций ν_1 и ν_2 будет снова CS-нумерацией, только если ν_1 и ν_2 являются CS-нумерациями относительно одной и той же функции C. Поэтому, теорема 5.1 не может описать, скажем, спектр степеней семейства

$$\mathcal{W}(\mathcal{F}, (\varepsilon^A + \varepsilon^B) \times (\varepsilon^C + (\varepsilon^D \times \varepsilon^E))),$$

где A, B, C, D, E — низкие множества, и $\varepsilon^X(n) = W_n^X$. Ниже спектры семейств такого вида будут описаны, в частности мы увидим, что указанный спектр в действительности совпадает с

$$\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leq \mathbf{a} \,\&\, \mathbf{x} \not\leq \mathbf{b} \vee \mathbf{x} \not\leq \mathbf{c} \,\&\, (\mathbf{x} \not\leq \mathbf{d} \vee \mathbf{x} \not\leq \mathbf{e})\}$$

где $\mathbf{a} = \deg(A)$, $\mathbf{b} = \deg(B)$, $\mathbf{c} = \deg(C)$, $\mathbf{d} = \deg(D)$, $\mathbf{e} = \deg(E)$.

Для этого, нам потребуется во-первых изменить определение операции прямого произведения $\times$, и во-вторых сузить класс CS-нумераций до некоторого класса CS-нумерацией, замкнутого относительно как прямой суммы, так и относительно (измененного) прямого произведения. Далее будет показано, что, два варианта определения прямого произведения в некотором смысле эквивалентны и, в частности, порождают семейства с одним и тем же спектром степеней.

Наряду с используемой нами операции

$$X \oplus Y = \{2x \mid x \in X\} \cup \{2x+1 \mid x \in Y\}$$

введем в расморение две похожие операции:

$$A \oplus_1 B = \{\langle 2x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in A\} \cup \{\langle 2x+1, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in B\}$$

$$A \oplus_2 B = \{\langle x, 2y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in A\} \cup \{\langle x, 2y+1\rangle \mid \langle x, y\rangle \in B\}$$

для всех $A, B \subseteq \omega$. Отметим, что имеет место тождество

$$(A \oplus_1 B) \oplus_2 (C \oplus_1 D) = (A \oplus_2 C) \oplus_1 (B \oplus_2 D).$$

Определим для нумераций $\nu_1, \nu_2 : \omega \to 2^\omega$ *модифицированное прямое произведение* $\nu_1 \odot \nu_2$ следующим образом:

$$\nu_1 \odot \nu_2(\langle n, m\rangle) = \nu_1(n) \oplus_1 \nu_2(m)$$

для всех n и m.

Будем говорить, что нумерация ν является *LR-нумерацией*, если существуют вычислимые функции L и R такие, что

$$\nu(n) = \nu(L(n)) \oplus_2 \nu(R(n))$$

для всех n.

Предложение 5.4. *Существует вычислимая инъекция $C_0 : \omega \times \omega \to \omega$, такая что каждая LR-нумерация $\nu : \omega \to 2^\omega$ является CS-нумерацией относительно C_0.*

Доказательство. Пусть вычислимая функция C_0 задана равенствами

$$C_0(m, \langle x, y\rangle) = \langle x, 2^m(2y+1)\rangle$$

для всех $m, x, y \in \omega$.

Ясно, что если

$$\nu(n) = \nu(L(n)) \oplus_2 \nu(R(n))$$

для всех n, то

$$\nu(n)^{(0)}_{C_0} = R(n), \nu(n)^{(1)}_{C_0} = R(L(n)),\ \nu(n)^{(2)}_{C_0} = R(L(L(n))), \ldots,$$

то есть $\nu(n)^{(m)}_{C_0} = R(L^m(n))$ для всех $n, m \in \omega$, так что в определении CS-нумерации можем положить

$$S(n, m) = R(L^m(n))$$

для всех $n, m \in \omega$. $\square$

Предложение 4.1 может быть усилено для LR-нумераций.

Предложение 5.5. *Пусть дана вычислимая нумерация α Δ^0_2 множеств, такая, что класс $\mathcal{C} = \{\alpha(n)\}_{n\in\omega}$ замкнут вниз относительно 1-сводимости, то есть если $X \in \mathcal{C}$ и $Y \leq_1 X$, то $Y \in \mathcal{C}$. Тогда для существует вычислимая LR-нумерация ν Δ^0_2 множеств такая, что $\mathcal{C} = \{\nu(n)\}_{n\in\omega}$.*

Доказательство.

Пусть T — множество строк конечной ненулевой длины в алфавите $\{0, 1\}$. Конкатенацию строк $a, b \in T$ будем записывать через $a * b$. Выражение $\langle i\rangle$, где $i \in \omega$, означает строку из T длины 1, состоящую из символа i. Фиксируем также некоторую вычислимую биективную нумерацию τ множества T.

Определяя для множества $X \subseteq \omega$ обозначение

$$X_m = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, 2y+m\rangle \in X\}$$

при $m \in \{0,1\}$, определим по индукции нумерацию ν:

$$\nu(\tau^{-1}(\langle m\rangle)) = \alpha(i),$$

$$\nu(\tau^{-1}(x * \langle m\rangle)) = (\nu(\tau^{-1}(x)))_m,$$

где $m \in \{0,1\}$ и $x \in T$.

Поскольку $X_0 \leq_1 X$ и $X_1 \leq_1 X$ имеем $\mathcal{C} = \{\{\nu(n)\}_{n\in\omega}$. Ясно, что ν — вычислимая нумерация Δ^0_2 множеств. Для того, чтобы убедиться в том, что ν является LR нумерацией достаточно определить

$$L(n) = \tau^{-1}(\tau(n) * \langle 0\rangle) \quad \text{и} \quad R(n) = \tau^{-1}(\tau(n) * \langle 1\rangle)$$

для всех $n \in \omega$. $\square$

Теорема 5.6. *Если ν_1 и ν_2 являются вычислимыми LR-нумерациями Δ^0_2-множеств, то $\nu_1 + \nu_2$ и $\nu_1 \odot \nu_2$ снова будут вычислимыми LR-нумерациями Δ^0_2-множеств, причем*

$$\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1 + \nu_2)) = \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1)) \cap \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_2)),$$

и

$$\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1 \odot \nu_2)) = \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1)) \cup \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_2)).$$

Доказательство. Пусть ν_0 — LR-нумерация с вычислимыми функциями L_0 и R_0, а ν_1 — LR-нумерация с вычислимыми функциями L_1 и R_1. Тогда $\nu_1 + \nu_2$ — LR-нумерация с вычислимыми функциями L_2 и R_2, где

$$L_2(2n) = L_0(n), L_2(2n+1) = L_1(n), R_2(2n) = R_0(n), R_2(2n+1) = R_1(n),$$

для всех n. Кроме того, из тождества

$$(A \oplus_1 B) \oplus_2 (C \oplus_1 D) = (A \oplus_2 C) \oplus_1 (B \oplus_2 D).$$

следует, что $\nu_1 \odot \nu_2$ — LR-нумерация с вычислимыми функциями L_3 и R_3, где

$$L_3(\langle n, m\rangle) = \langle L_0(n), L_1(m)\rangle, R_3(\langle n, m\rangle) = \langle R_0(n), R_1(m)\rangle,$$

для всех n и m.

Равенства

$$\mathbf{Sp}\left(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_0+\nu_1)\right)=\mathbf{Sp}\left(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_0)\right)\cap\mathbf{Sp}\left(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_1)\right)$$

и

$$\mathbf{Sp}\left(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_0\odot\nu_1)\right)=\mathbf{Sp}\left(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_0)\right)\cup\mathbf{Sp}\left(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_1)\right)$$

следуют теперь из теоремы 5.1 и предложения 5.4 $\square$

Рассмотренные выше нумерации $\varepsilon^A(n)=W_n^A$, где A — произвольное множество низкой степени, являются очевидно вычислимой LR-нумерации Δ_2^0 множеств, и в силу доказанной теоремы таковыми являются все нумерации, полученные из них при помощи операций $+$ и $\odot$. В частности, имеем

Следствие 5.7. *Любая позитивная булева комбинаций классов тьюринговых степеней вида $\{\mathbf{x}\mid\mathbf{x}\not\leq\mathbf{a}\}$, где $\mathbf{a}$ — низкая степень, является спектром степеней некоторого семейства и, следовательно, спектром степеней некоторой алгебраической системы.*

Рассмотрим теперь бесконечные прямые суммы нумераций: если дана бесконечная последовательность нумераций $\nu_0,\nu_1,\nu_2,\ldots$, то определим нумерацию $\Sigma_{i\in\omega}\nu_i$ так:

$$\left(\Sigma_{i\in\omega}\nu_i\right)(\langle m,n\rangle)=\nu_m(n)$$

для всех $m,n\in\omega$.

Предложение 5.8. *Пусть нумерация $\Sigma_{i\in\omega}\nu_i$ и каждая нумерация ν_i, $i\in\omega$ являются вычислимыми LR-нумерациями Δ_2^0 множеств. Тогда*

(i) $\mathbf{Sp}\left(\mathcal{W}(\mathcal{F},\Sigma_{i\in\omega}\nu_i)\right)=\cap_{i\in\omega}\mathbf{Sp}\left(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu_i)\right)$.

(ii) *Сильная (слабая) степень системы $\mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F},\Sigma_{i\in\omega}\nu_i))$ будет наименьшей верхней грани сильных (слабых) степеней $\mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu)_i)$, $i\in\omega$, в полурешетке $\mathbf{D}_s$ ($\mathbf{D}_w$).*

Доказательство. (i). Пусть некоторая нумерация ν является CS-нумерацией класса $\mathcal{C}$ Δ_2^0 множеств посредством вычислимых функций C и S. Тогда из соотношения

$$X^C=\{C(n,k)\mid k\in W_n^X\}=\nu(m)$$

следует, что
$$W_n^X = (X^C)_C^{(n)} = \nu(S(m,n))$$
для всех n. Так как X^C является X-вычислимо перечислимым относительно X множеством, имеем
$$(\exists Z\ X\text{-в.п.})[Z \notin \mathcal{C}] \iff X^C \notin \mathcal{C}.$$
Заметим также, что LR-нумерации $\Sigma_{i\in\omega}\nu_i$ и каждая нумерация ν_i, $i \in \omega$ являются CS-нумерациями посредством одной и той же инъекции
$$C_0(m, \langle x, y\rangle) = \langle x, 2^m(2y+1)\rangle$$
из доказательства предложения 5.4. Теперь по теореме 4.2 имеем
$$\begin{aligned}\deg(X) \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \Sigma_{i\in\omega}\nu_i)) \iff X^{C_0} \notin \cup_{i\in\omega}\mathcal{C}_i \iff \\ \iff (\forall i \in \omega)[X^{C_0} \notin \mathcal{C}_i] \iff (\forall i \in \omega)[\deg(X) \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_i))] \iff \\ \iff \deg(X) \in \cap_{i\in\omega}\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_i)).\end{aligned}$$
Здесь через $\mathcal{C}_i$, $i \in \omega$, обозначется область значений нумерации ν_i.

(ii). Утверждение для слабой сводимости следует из (i). Для сильной сводимости, предварительно фиксируем тьюрингов оператор Ψ такой, что $\mathrm{Pr}_1(\Psi^X) = X^{C_0}$ для всех $X \subseteq \omega$.

Тогда по доказанному для всех $k \in \omega$ и $X \in \mathrm{Pres}\mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \Sigma_{i\in\omega}\nu_i)))$ имеем
$$\mathrm{Pr}_1(\Psi^X) \notin \mathcal{C}_k = \{\nu_k(n) \mid n \in \omega\},$$
откуда в силу следствия 4.11 получаем
$$\mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_k))) \leq_s \mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \Sigma_{i\in\omega}\nu_i))).$$
для всех $k \in \omega$.

Пусть теперь для некоторой счетной алгебраической системы $\mathfrak{A}$ справедливо $\mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_k))) \leq_s \mathfrak{A}$ для всех $k \in \omega$. Тогда опять по уже доказанному имеем
$$\underset{1}{\mathrm{Pr}}(\Psi^X) \notin \mathcal{C}_k = \{\nu_k(n) \mid n \in \omega\},$$
для всех $k \in \omega$ и $X \in \mathrm{Pres}(\mathfrak{A}))$. Значит
$$\underset{1}{\mathrm{Pr}}(\Psi^X) \notin \cup_{i\in\omega}\mathcal{C}_i = \{(\Sigma_{i\in\omega}\nu_i)(n) \mid n \in \omega\}$$

для всех $X \in \mathrm{Pres}(\mathfrak{A})$). Таким образом, по следствию 4.11

$$\mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \Sigma_{i\in\omega}\nu_i))) \leq_s \mathfrak{A}.$$

□

Интересной чертой следующего утверждения является то, что для X-вычислимо перчислимости семейства $\oplus_{i\in\omega}\mathcal{S}_i$ не требуется иметь равномерную по i X-вычислимую процедуру перечисления каждого семейства $\mathcal{S}_i$.

Теорема 5.9. (i) *Существует последовательность семейств $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots$ такая, что*

$$\mathbf{Sp}\,(\mathcal{S}_0) \supsetneqq \mathbf{Sp}\,(\mathcal{S}_1) \supsetneqq \mathbf{Sp}\,(\mathcal{S}_2) \supsetneqq \cdots \supsetneq \cap_{i\in\omega}(\mathbf{Sp}\,(\mathcal{S}_i)) = \mathbf{Sp}\,(\oplus_{i\in\omega}\mathcal{S}_i),$$

где $\oplus_{i\in\omega}\mathcal{S}_i = \{\{m\} \oplus U \mid m \in \omega \;\&\; U \in \mathcal{S}_i\}$.

(ii) *Существует возрастающая последовательность степеней из $\mathbf{D}_s$ ($\mathbf{D}_w$), имеющая точную верхнюю грань.*

Доказательство. (i). Фиксируем множества низких степеней

$$A_0 <_T A_1 <_T A_2 <_T \cdots,$$

такие, что нумерация тьюринговых скачков A_i', $i \in \omega$, является вычислимой нумераций Δ^0_2 множеств. Существование таких степеней следует, например из релятивизации известного построения невычислимого вычислимо перечислимого множества низкой степени. А именно, при релятивизации получим такое $e \in \omega$, что

$$X <_T W_e^X \text{ и } (W_e^X)' \leq_T X'$$

для всех $X \subseteq \omega$. При этом тьюринговый оператор, сводящий $(W_e^X)'$ к X' не зависит от X. Тогда можем положить

$$A_0 = \emptyset, A_{i+1} = W_e^{A_i}, i \in \omega.$$

Из наложенных на множества A_i, $i \in \omega$, следует, что нумерации

$$\nu_i = \varepsilon^{A_i}, i \in \omega \text{ и } \Sigma_{i\in\omega}\,\nu_i$$

являются вычислимыми LR-нумерациями Δ^0_2. По предложению 5.8 имеем
$$\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \Sigma_{i\in\omega}\,\nu_i)) = \cap_{i\in\omega}\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_i)),$$
причем
$$\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_{i+1})) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leq \mathbf{a}_{i+1}\} \subsetneq \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_i)) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leq \mathbf{a}_i\},$$
где $\mathbf{a}_i = \deg(A_i)$, $i \in \omega$. Остается заметить, что семейства
$$\mathcal{W}(\mathcal{F}, \Sigma_{i\in\omega}\,\nu_i) = \{\{\langle m, n\rangle\} \oplus U \mid m, n \in \omega \;\&\; U \in \mathcal{F} \;\&\; U \neq W^{X_m}_n\}$$
и
$$\oplus_{i\in\omega}\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_i) = \{\{m\} \oplus (\{n\} \oplus U) | m, n \in \omega \;\&\; U \in \mathcal{F} \;\&\; U \neq W^{X_m}_n\}$$
имеют один и тот же спектр степеней.

(ii). Следует из только-что доказанного пункта (i) этой теоремы и пункта (ii) предложения 5.8. □

Теорема 5.10. *Для каждой счетной дистрибутивной решетки $\mathfrak{L}$ существует набор семейств $\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$ такой, что спектры степеней семейств из $\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$ образуют решетку относительно объединения и пересечения изоморфную $\mathfrak{L}$.*

Другими словами, каждая счетная дистрибутивная решетка вложима в $\mathbf{D}_w$ с сохранением точных верхних и нижних граней.

Доказательство. Так как каждая счетная дистрибутивная решетка вкладывается в счетную безатомную булеву алгебру, достаточно доказать теорему для решетки $\mathfrak{L}$, являющейся счетной безатомной булевой алгеброй.

Пусть семейство $\mathcal{L}$ вычислимых подмножеств ω образует решетку относительно теоретико-множественных операций $\cup$ и $\cap$ изоморфную $\mathfrak{L}$. При этом можем считать, что $\mathcal{L}$ не содержит пустого множества.

Фиксируем теперь множества низких попарно несравнимых степеней
$$A_0, A_1, A_2, \ldots,$$
такие, что нумерация тьюринговых скачков A'_i, $i \in \omega$, является вычислимой нумераций Δ^0_2 множеств, причем тьюринговые степени

каждой пары множеств A_i и A_j, $i \neq j$, образуют минимальную пару, то есть для $\mathbf{a}_i = \deg(A_i)$ и $\mathbf{a}_j = \deg(A_j)$, $i \neq j$, выполнено

$$\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \leq \mathbf{a}_i\} \cap \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \leq \mathbf{a}_j\} = \{\mathbf{0}\}.$$

Существование таких множеств A_i, $i \in \omega$, является простым упражнением на метод построения минимальных пар (см. например теорему IX.1.2 и упражнения IX.1.5, IX.1.6 из [20]).

Для вычислимого множества $X \subseteq \omega$ введем обозначение

$$\Sigma_{i\in X}\, \nu_i = \Sigma_{i\in\omega}\, \widehat{\nu}_i, \text{ где } \widehat{\nu}_i = \begin{cases} \nu_i, & \text{если } i \in X \\ \lambda n[\emptyset], & \text{если } i \notin X. \end{cases}$$

Для каждого $X \in \mathcal{L}$ определим нумерацию

$$\nu_X = \Sigma_{i\in X}\, \varepsilon^{A_i}.$$

Так как X вычислимо, нумерация ν_X и каждая нумерация $\widehat{\varepsilon}^{A_i}$, $i \in \omega$, являются вычислимыми LR-нумерациями Δ^0_2 множеств. По предложению 5.8 имеем

$$\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_X)) = \cap_{i\in X}\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_i)) = \cap_{i\in X}\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leq \mathbf{a}_i\},$$

где $\mathbf{a}_i = \deg(A_i)$, $i \in \omega$. Поэтому для всех $X, Y \in \mathcal{L}$ справедливо

$$\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_{X\cup Y})) = \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_X)) \cap \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_Y)).$$

Кроме того, в силу попарной несравнимости степеней $\mathbf{a}_i$, $i \in \omega$, для всех $X, Y \in \mathcal{L}$ и $i \in \omega$ имеет место

$$i \in X - Y \implies \mathbf{a}_i \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_Y)) - \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_X)).$$

Поэтому отображение $X \mapsto \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_X))$ инъективно. Докажем

$$\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_{X\cap Y})) = \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_X)) \cup \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_Y)).$$

Ясно, что $\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_X)) \cup \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_Y)) \subseteq \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_{X\cap Y}))$. Для доказательства обратного включения предположим, что $\mathbf{x} \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_{X\cap Y}))$ и $\mathbf{x} \notin \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_X)) \cup \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_Y))$. Тогда существуют $i \in X$ и $j \in Y$ такие, что $\mathbf{x} \leq \mathbf{a}_i$ и $\mathbf{x} \leq \mathbf{a}_j$. Так как $\mathbf{x} \not\leq \mathbf{a}_k$ для всех $k \in X \cap Y$, имеем $i \neq j$. Значит $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, поскольку пара степеней $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{a}_j$ минимальна. Но $\mathbf{x} \not\leq \mathbf{a}_k$ для некоторого элемента k непустого множества $X \cap Y \in \mathcal{L}$. Противоречие.

Осталось сослаться на изоморфизм булевой алгебры $\mathfrak{L}$ со своей дуальной. $\square$

Замечание 1. Установим, что соотношения

$$\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_0 \times \nu_1)) = \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_0)) \cup \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1)).$$

$$\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_0 \times \nu_1)) = \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1)) \cup \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1)).$$

из теорем 5.1 и 5.6 вообще говоря не имеет места для произвольных вычислимых нумераций Δ^0_2-множеств ν_1 и ν_2.

Теорема 5.11. *Существует такая вычислимая нумерация в.п. множеств ν, что $\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu)) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} > \mathbf{0}\}$ и $\mathbf{0} \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu \times \nu))$.*

Доказательство. Пусть T — множество строк конечной длины в алфавите $\omega \cup \{\omega\}$. Конкатенацию строк $a, b \in T$ будем записывать через $a * b$. Буква λ обозначает пустую строку. Для обозначения длины строки $a \in T$ будем использовать выражение $|a|$. Запись $a \subseteq b$ означает, что строка a является началом строки b, то есть $b = a * c$ для некоторой строки c.

Фиксируем также некоторую вычислимую биективную нумерацию τ множества T. Для каждого $a \in T$ определим

$$U_a = W^{\emptyset}_{F(|a|, \tau^{-1}(a), 0)},$$

где F — вычислимая функция из леммы 4.3. Теперь определим для каждого $a \in T$ в.п. множество $V_a = V^1_a \cap (V^2_a \cup V^3_a)$, где

$V^1_a = \{k \mid (\forall b \in T)[b * \omega \not\subseteq a \vee \{i \mid i < k\} \subseteq U_b \vee (\exists c \in T)(\exists j \in \omega)$ $[c * j \subseteq b \;\&\; \{i \mid i \leq j\} \subseteq U_c]]\}$,

$V^2_a = \{k \mid k \in U_a \;\&\; (\forall b \in T)(\forall j \in \omega)[b * j \not\subseteq a \vee \{i \mid i < j\} \subseteq U_b\}$, и

$V^3_a = \{k \mid (\exists b \in T)(\exists j \in \omega)[b * j \subseteq a \;\&\; \{i \mid i \leq j\} \subseteq U_b]\}$ (в зависимости от строки a это множество либо пусто, либо равно ω).

Для двух строк a и b из T будем писать $a <_L b$, если либо $a * \omega \subseteq b$, либо $b * i \subseteq a$ для некоторого $i \in \omega$, либо существует строка $c \in T$

такая, что для некоторых $i \in \omega$ и $j \in \omega \cup \{\omega\}$ имеет место $i < j$, $c * i \subseteq a$ и $c * j \subseteq b$. Нетрудно установить, что отношение $<_L$ линейно упорядочивает множество T. При этом, если $a <_L b$, то

$$V_b = \omega \implies V_a = \omega.$$

Определим по индукции функцию $f : \omega \to T$, такую, что $|f(x)| = x$ для каждого $x \in \omega$:

$$f(0) = \lambda;$$
$$f(x+1) = \begin{cases} f(x) * \omega, & \text{если } V_{f(x)} = \omega, \\ f(x) * i_0, & \text{если } i_0 = (\mu i)[i \notin V_{f(x)}]. \end{cases}$$

Заметим, что по построению имеем $V_{f(x)} = U_{f(x)}$ для каждого $x \in \omega$. Проверим теперь, что вычислимая нумерация в.п. множеств $\nu(n) = V_{\tau(n)}$ искомая.

Действительно, существует такое в.п. множество Y, что для всех n_1, n_2, $m \in \omega$ имеет место

$$Y^{(\langle\langle n_1, n_2\rangle, m\rangle)} = \begin{cases} \{k \mid k < m\} \oplus \omega, & \text{если } \tau(n_1) <_L \tau(n_2), \\ \omega \oplus \{k \mid k < m\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В силу теоремы 4.2 (условие (ii)) имеем $\mathbf{0} \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu \times \nu))$.

Покажем, что $\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu)) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} > \mathbf{0}\}$. Для произвольного $e \in \omega$ имеем

$$\nu(\tau^{-1}(f(e))) = V_{f(e)} = U_{f(e)} = W^{\emptyset}_{F(e, \tau^{-1}(f(e)), 0)}.$$

Из леммы 4.3 следует, что $W_e^{\emptyset}$ не является перечислением семейства $\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu)$ ни для одного $e \in \omega$. Значит $\mathbf{0} \notin \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu))$. Поскольку ν — нумерация в.п. множеств, включение $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} > \mathbf{0}\} \subseteq \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu))$ следует из условия (iv) теоремы 4.2. $\square$

Замечание 2. (Сводимости на нумерациях)

Мы говорим, что нумерация ν_1 *сводится* к нумерации ν_2 (записывается $\nu_1 \leq \nu_2$), если существует вычислимая функция R такая, что $\nu_1(n) = \nu_2(R(n))$ для любого $n \in \omega$. Если $\nu_1 \leq \nu_2$ и $\nu_2 \leq \nu_1$, то нумерации ν_1 и ν_2 называются *эквивалентными* (записывается $\nu_1 \equiv \nu_2$).

Мы говорим, что нумерация ν_1 *r-сводится* к нумерации ν_2 (записывается $\nu_1 \le_r \nu_2$), если существует вычислимая функция R и вычислимая последовательность e-операторов $\{\Theta_n\}_{n\in\omega}$, такие, что $\Theta_n(\omega) = \omega$ для любого $n \in \omega$, и

$$\nu_1(n) = \Theta_n(X) \implies \nu_2(R(n)) = X$$

для любого $n \in \omega$ и $X \subseteq \omega$. Ясно, что из $\nu_1 \le \nu_2$ следует $\nu_1 \le_r \nu_2$

Легко проверить, что отношение $\le_r$ рефлексивно и транзитивно. Если $\nu_1 \le_r \nu_2$ и $\nu_2 \le_r \nu_1$, то нумерации ν_1 и ν_2 назовем *r-эквивалентными* (записывается $\nu_1 \equiv_r \nu_2$).

Отметим, что для нумераций ν_1, ν_2 имеет место

$$\nu_1(n) = X \implies (\nu_1 + \nu_2)(2n) = X,$$

$$\nu_2(n) = X \implies (\nu_1 + \nu_2)(2n+1) = X,$$

$$(\nu_1 \times \nu_2)(\langle n, m\rangle) = X \oplus \omega \implies \nu_1(n) = X, \text{ и}$$

$$(\nu_1 \times \nu_2)(\langle n, m\rangle) = \omega \oplus X \implies \nu_2(m) = X$$

для произвольных $n, m \in \omega$ и $X \subseteq \omega$, так что

$$\nu_1 \le_r \nu_1 + \nu_2, \ \nu_2 \le_r \nu_1 + \nu_2, \ \ \nu_1 \times \nu_2 \le_r \nu_1, \ \nu_1 \times \nu_2 \le_r \nu_2.$$

Докажем, что из $\nu_1 \le_r \rho$ и $\nu_2 \le_r \rho$, следует $\nu_1 + \nu_2 \le_r \rho$. Пусть для всех $n \in \omega$ и $X \subseteq \omega$ имеет место

$$\nu_1(n) = \Theta^1_n(X) \implies \rho(R_1(n)) = X, \text{ и}$$

$$\nu_2(n) = \Theta^2_n(X) \implies \rho(R_2(n)) = X,$$

для некоторых вычислимых функций R_1, R_2 и вычислимых последовательностей e-операторов $\{\Theta^1_n\}_{n\in\omega}$, $\{\Theta^2_n\}_{n\in\omega}$, таких, что $\Theta^1_n(\omega) = \Theta^2_n(\omega) = \omega$ для любого $n \in \omega$. Тогда

$$(\nu_1 + \nu_2)(2n) = \Theta^1_n(X) \implies \rho(R_1(n)) = X, \text{ и}$$

$$(\nu_1 + \nu_2)(2n+1) = \Theta^2_n(X) \implies \rho(R_2(n)) = X,$$

для всех $n \in \omega$ и $X \subseteq \omega$, откуда немедленно следует $\nu_1 + \nu_2 \le_r \rho$.

Из доказанного следует, что операция $+$ корректно задана на классах r-эквивалентности нумераций и определяет операцию взятия наименьшей верхней грани двух классов. В частности, если $\nu_1 \leq_r \rho_1$ и $\nu_2 \leq_r \rho_2$, то

$$\nu_1 + \nu_2 \leq_r \rho_1 + \rho_2.$$

Докажем теперь, что из соотношений $\nu_1 \leq_r \rho_1$ и $\nu_2 \leq_r \rho_2$ также следует

$$\nu_1 \times \nu_2 \leq_r \rho_1 \times \rho_2.$$

Действительно, пусть для всех $n \in \omega$ и $X \subseteq \omega$ имеет место

$$\nu_1(n) = \Theta^1_n(X) \implies \rho_1(R_1(n)) = X, \text{ и}$$

$$\nu_2(n) = \Theta^2_n(X) \implies \rho_2(R_2(n)) = X,$$

для некоторых вычислимых функций R_1, R_2, и вычислимых последовательностей e-операторов $\{\Theta^1_n\}_{n\in\omega}$, $\{\Theta^2_n\}_{n\in\omega}$, таких, что $\Theta^1_n(\omega) = \Theta^2_n(\omega) = \omega$ для любого $n \in \omega$.

Тогда

$$(\nu_1\times\nu_2)(\langle n, m\rangle) = \Theta^1_n(X)\oplus\Theta^2_m(Y) \Longrightarrow (\rho_1\times\rho_2)(\langle R_1(n), R_2(m)\rangle) = X\oplus Y,$$

для произвольных $n, m \in \omega$ и $X, Y \subseteq \omega$. Для доказательства $\nu_1 \times \nu_2 \leq_r \rho_1 \times \rho_2$ осталось определить $\Theta_{\langle n,m\rangle}(X \oplus Y) = \Theta^1_n(X) \oplus \Theta^2_m(Y)$ и $R(\langle n, m\rangle) = \langle R_1(n), R_2(m)\rangle$.

Таким образом, операция $\times$ также корректно определена на классах r-эквивалентности нумераций, хотя и не определяет вообще говоря наибольшую нижнюю грань двух таких классов. Заметим, что расширив r-сводимость до сводимости

$$\nu_1 \leq_{r'} \nu_2 \iff \nu_1 \times \nu_1 \times \cdots \times \nu_1 \leq_r \nu_2,$$

где в $\nu_1 \times \nu_1 \times \cdots \times \nu_1$ применяется конечное число операций $\times$, получим классы r$'$-эквивалентности нумераций, образующие дистрибутивную решетку относительно $+$ и $\times$. Однако для определенной таким образом сводимости следующая теорема уже не имеет места (см. теорему 5.11).

Теорема 5.12. *Если ν_1 и ν_2 — вычислимые нумерации Δ^0_2-множеств и $\nu_1 \leq_r \nu_2$, то $\mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_2)) \subseteq \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1))$.*

Доказательство. Пусть для всех $n \in \omega$ и $X \subseteq \omega$ имеет место

$$\nu_1(n) = \Theta^1_n(X) \implies \nu_2(R(n)) = X,$$

для вычислимой функции R и вычислимой последовательности е-операторов $\{\Theta_n\}_{n\in\omega}$, такой, что $\Theta_n(\omega) = \omega$ для любого $n \in \omega$. Тогда существует вычислимая функция $T(n, m)$ такая, что

$$\{k \mid k < m\} \subseteq \Theta_n(\{k \mid k < T(n, m)\}).$$

Фиксируем также степень $\mathbf{x} \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1))$ и множество Y_{ν_2}, удовлетворяющее условию (ii) теоремы 4.2 при $\nu = \nu_2$.

Тогда вычислимо перечислимое относительно $\mathbf{x}$ множество

$$Y_{\nu_1} = \{\langle\langle n, m\rangle, k\rangle \mid k \in \Theta_n(Y_{\nu_2}^{(\langle R(n), T(n,m)\rangle)})\}$$

удовлетворяет условию (ii) теоремы 4.2 при $\nu = \nu_1$ и, следовательно, $\mathbf{x} \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1))$. $\Box$

Отметим, что $\nu_1 \times \nu_2 \equiv_r \nu_1 \odot \nu_2$, поскольку очевидно существование е-операторов Ψ_1 и Ψ_2 таких, что $\Psi_1(X \oplus Y) = X \oplus_1 Y$ и $\Psi_2(X \oplus_1 Y) = X \oplus Y$ для всех $X, Y \subseteq \omega$. Значит по доказанной теореме спектры степеней семейств $\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1 \odot \nu_2)$ и $\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu_1 \times \nu_2)$ всегда совпадают.

6 Вычислимые нумерации Σ^0_2-множеств

В данном параграфе мы докажем существование семейств, спектр степеней которых имеет вид $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leq \mathbf{a}\}$, где $\mathbf{a}$ — произвольная вычислимо перечислимая степень. Из теоремы 4.2 и следствия 4.6 вытекает, что если $\mathbf{a}' = \mathbf{0}'$ и $A \in \mathbf{a}$, то в качестве такого семейства можем взять семейство вида

$$\mathcal{W}(\mathcal{R}, \varepsilon^A) = \{\{n\} \oplus U \mid n \in \omega \;\&\; U \in \mathcal{R} \;\&\; U \neq W^A_n)\},$$

где $\mathcal{R}$ — произвольное вычислимо перечислимое семейство, содержащее все конечные множества. Однако, если $\mathbf{a}' > \mathbf{0}'$ и $A \in \mathbf{a}$, то не одно из семейств указанного вида не будет иметь спектра степеней равного $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leq \mathbf{a}\}$.

Более того, приведем к противоречию предположение о том, что спектр степеней семейства

$$\mathcal{W}(\mathcal{R}, \varepsilon^A) = \{\{e\} \oplus U \mid e \in \omega \;\&\; U \in \mathcal{R} \;\&\; U \neq W_e^A)\},$$

равен совокупности $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leq \mathbf{a}\}$ при $A \in \mathbf{a}$, $\mathbf{a}' > \mathbf{0}'$ и некотором семействе $\mathcal{R}$, содержащем хотя бы одно непустое конечное множество $F \in \mathcal{R}$. Рассмотрим множество

$$J = \{j \in \omega \mid D_j \in \mathcal{W}(\mathcal{R}, \varepsilon^A)\}.$$

Ясно, что если $\mathcal{W}(\mathcal{R}, \varepsilon^A) = \{W_{d(k)}^X \mid k \in \omega\}$ для некоторого множества X и вычислимой функции d, то для всех $j \in \omega$

$$j \in J \iff (\exists k)(\exists k)[D_j \subseteq W_{d(k),s}^X \;\&\; (\forall x \notin D_j)(\forall t)[x \notin W_{d(k),t}^X]],$$

то есть J будет X'-вычислимо перечислимым множеством. По определению спектра степеней семейства в качестве X здесь может выступать произвольное множество $X \not\leq_T A$.

Релятивизируя к оракулу $\emptyset'$ построение минимальной пары степеней, найдем множества Y_0 и Y_1 такие, что $\emptyset' \leq_T Y_0 \not\leq_T A \oplus \emptyset'$, $\emptyset' \leq_T Y_1 \not\leq_T A \oplus \emptyset'$, и

$$Z \text{ является } Y_0\text{-в.п. } \& \; Z \text{является } Y_1\text{-в.п.} \implies Z \text{ является } \emptyset'\text{-в.п.}$$

для всех $Z \subseteq \omega$. По критерию полноты Фридбера существуют множества X_0 и X_1 такие, что $X_i' \equiv_T X_i \oplus \emptyset' \equiv_T Y_i$ при $i \in \{0,1\}$. Тогда $X_i \not\leq_T A$ при $i \in \{0,1\}$, так что J является одновременно и X_0'-в.п. и X_1'-в.п. Значит J является $\emptyset'$-в.п. Найдем теперь вычислимые функции f, g и h такие, что для всех $n \in \omega$

$$W_{f(n)}^A = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } n \notin A', \\ F, & \text{если } n \in A', \end{cases} \quad D_{g(n)} = \{f(n)\} \oplus \emptyset, \quad D_{h(n)} = \{f(n)\} \oplus F.$$

Тогда $n \in A' \iff g(n) \in J$ и $n \notin A' \iff h(n) \in J$ для всех $n \in \omega$, откуда $A' \leq_T \emptyset'$, что противоречит условию $\mathbf{a}' > \mathbf{0}'$.

Докажем теперь, что можно положить $\mathcal{R}$ равным *семейству* $\mathcal{P}$ всех областей значения строго возрастающих примитивно рекурсивных функций. Мы установим, что если A-вычислимо перечислимо, то $\mathcal{W}(\mathcal{P}, \varepsilon^A)$ является X-в.п. тогда и только тогда, когда $X \not\leq_T A$.

Лемма 6.1. *Если $C \in \mathcal{P}$, $C \subseteq B$, и B примитивно рекурсивно, то $B \in \mathcal{P}$.*

Доказательство. Пусть $C = \operatorname{rng} p$, где p — строго возрастающая примитивно рекурсивная функция. Тогда $B = \operatorname{rng} q$ для строго возрастающей примитивно рекурсивной функции q, определенной по индукции следующим образом:

$$q(0) = \min B;$$

$$q(n+1) = \min\{b \leq p(n+1) \mid b > q(n) \;\&\; b \in B\}.$$

$\square$

Лемма 6.2. *Пусть A — в.п. множество. Тогда существует вычислимая функция g такая, что для произвольных $X \not\leq_T A$ и $e \in \omega$ множество $W^X_{g(e)}$ примитивно рекурсивно и $W^X_{g(e)} \neq W^A_e$.*

Доказательство. В силу вычислимой перечислимости множества A существует сильно вычислимый массив конечных множеств $\{V_{e,s}\}_{e,s\in\omega}$, такой, что

$$W^A_e = \bigcup\nolimits_u \bigcap\nolimits_{s\geq u} V_{e,s}$$

для всех $e \in \omega$, причем

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle e,x,u\rangle \mid (\forall s \geq u)[x \in V_{e,s}]\} \leq_T A.$$

Определим также

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle e,x,u\rangle \in M \mid (\forall t < u)[\langle e,x,t\rangle \notin M]\}.$$

Ясно, что $N \leq_T A$ и $N = \{\langle e,x,u\rangle \in M \mid u = 0 \vee x \notin V_{e,u-1}\}$.

Отождествим множество натуральных чисел ω с множеством T всех конечных строк в алфавите $\omega \cup \{\omega\}$ при помощи такой нумерации, что соответствие

$$\sigma \mapsto \text{длина строки } \sigma$$

и предикаты

$$P_1(\sigma, i, x) = \text{«символ } x \in \omega \text{ является } i\text{-м символом строки } \sigma\text{»},$$

$$P_2(\sigma, i) = \text{«символ } \omega \text{ является } i\text{-м символом строки } \sigma\text{»}$$

примитивно рекурсивны. В частности, для $\sigma \in T$ и $n \in \omega$ запись $\sigma < n$ означает, что номер, соответствующий строке σ, меньше n. Для $\sigma, \tau \in T$ будем писать $\sigma \subseteq \tau$ ($\sigma \subset \tau$) , если строка σ является (собственным) началом τ, конкатенацию строк σ и τ будем обозначать через $\sigma * \tau$. Длина строки σ обозначается через $|\sigma|$.

Фиксируем $e \in \omega$ и $X \not\leq_T A$. Пусть $\widehat{X} = X \oplus \overline{X}$. Ясно, что $\widehat{X} \equiv_T X$ и $\widehat{X}$ не является A-в.п. Определим множество $Z = W^X_{g(e)}$ с помощью следующего X-вычислимого построения.

Построение.

Шаг $s = 0$. $Z_0 = \emptyset$.

Шаг $s + 1$. Пусть конечное множество Z_s уже определено. Полагаем

$$\ell(s) = \min\{x + u \mid (\forall t)[u \leq t < s \implies x \in V_{e,t} \ \&\ x \notin Z_t]\}.$$

Определяем

$$\begin{aligned} Z_{s+1} = Z_s \cup \{\sigma < \ell(s) \mid |\sigma| \in \widehat{X} \ \&\ (\forall \tau)[\tau * \omega \subseteq \sigma \implies |\tau| \notin \widehat{X}]\} \cup \\ \cup \{\sigma < \ell(s) \mid (\exists t < s)(\exists \tau)(\exists u \leq t)[\tau * u \subseteq \sigma \ \&\ \tau \notin V_{e,t}]\} \cup \\ \cup \{\sigma < \ell(s) \mid (\exists \tau)(\exists u > 0)[\tau * u \subseteq \sigma \ \&\ \tau \in V_{e,u-1}]\} \end{aligned}$$

(здесь переменные σ и τ действуют на множестве конечных строк T).

Описание построения завершено.

Докажем, что множество $Z \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_s Z_s$ примитивно рекурсивно и $Z \neq W^A_e$. Предположим сначала, что $W^A_e \not\subseteq Z$. Тогда $\lim_s \ell(s) < \infty$, множество Z конечно и, тем более, примитивно рекурсивно. Поэтому можем считать, что $W^A_e \subseteq Z$ и, следовательно, $\lim_s \ell(s) = \infty$.

Назовем, строку $\sigma \in T$ *правильной*, если для любого ее начала вида $\tau * u$, где $u \in \omega$, справедливо $\langle e, \tau, u\rangle \in N$. Заметим, что если строка $\sigma \in Z$ правильна, то $|\sigma| \in \widehat{X}$. Тем более справедливо

$$\text{строка } \sigma \in W^A_e \text{ правильна} \implies |\sigma| \in \widehat{X}$$

для всех σ. Поскольку правильность строки проверяется эффективно с помощью оракула A, и $\widehat{X}$ не A-в.п., существует такое $n \in \widehat{X}$, что $\sigma \notin W^A_e$ для всех правильных строк σ длины n. Выберем наименьшее возможное $n \in \widehat{X}$ с указанным свойством.

Тогда для каждого $m < n$, $m \in \widehat{X}$, существует правильная строка $\sigma_m \in W_e^A$ длины m. При этом заметим, что если $\tau * \omega \subseteq \sigma_m$, то $|\tau| \notin \widehat{X}$, поскольку $\sigma_m \in Z$. Если же $\tau * u \subseteq \sigma_m$, $u \in \omega$, то в силу правильности строки σ имеем $\langle e, \tau, u\rangle \in N$ и, поэтому, $\tau \in W_e^A \subseteq Z$ и $|\tau| \in \widehat{X}$. Таким образом, строки σ_m при $m < n$, $m \in \widehat{X}$, определены однозначно и имеют общее продолжение.

Определим строку σ_n длины n, одну из таких продолжений, исходя из следующих условий:

$$\begin{array}{lcl} \tau \subset \sigma_n \;\&\; |\tau| \notin \widehat{X} & \Longrightarrow & \tau * \omega \subseteq \sigma_n, \\ \tau \subset \sigma_n \;\&\; |\tau| \in \widehat{X} & \Longrightarrow & \tau * u \subseteq \sigma_n \;\&\; \langle e, \tau, u\rangle \in N, \end{array}$$

для всех строк τ. Ясно, что данные условия описывают однозначно правильную строку σ_n длины n. Так как $n \in \widehat{X}$, имеем $\sigma_n \in Z$. С другой стороны, $\sigma_n \notin W_e^A$ по выбору n. Таким образом, $Z \neq W_e^A$. Кроме того, если $\sigma_n * u \subseteq \rho$ и $u \in \omega$, то $\rho \in Z$, поскольку $\langle e, \sigma_n, u\rangle \notin N$. Тогда

$$\begin{array}{rcl} Z & = & \{\rho \in T \mid (\exists \tau \subseteq \sigma_n)(\exists u \in \omega)[\tau * u \subseteq \rho \;\&\; \tau * u \not\subseteq \sigma_n]\} \cup \\ & & \cup \{\sigma_m \mid m \leq n \;\&\; m \in \widehat{X}\}, \end{array}$$

откуда непосредственно следует примитивная рекурсивность множества Z. $\square$

Лемма 6.3. *Пусть A — в.п. множество. Тогда существует вычислимая функция h такая, что для произвольных $X \not\leq_T A$ и $e \in \omega$ имеет место $W_{h(e)}^X \in \mathcal{P}$ и $W_{h(e)}^X \neq W_e^A$.*

Доказательство. Пусть g — вычислимая функция из леммы 6.2. Фиксируем вычилимые функции a и b, такие, что $W_{a(e)}^X = W_e^X \oplus \omega = \{2x \mid x \in W_e^X\} \cup \{2x+1 \mid x \in \omega\}$ и $W_{b(e)}^X = \{x \mid 2x \in W_e^X\}$ для всех $e \in \omega$ и $X \subseteq \omega$. Полагаем $h = a \circ g \circ b$. Пусть $e \in \omega$ и $X \not\leq_T A$. Тогда $W_{h(e)}^X \neq W_e^A$. По лемме 6.1 из примитивной рекурсивности множества $W_{h(e)}^X$ и соотношения $\{2x+1 \mid x \in \omega\} \subseteq W_{h(e)}^X$ следует $W_{h(e)}^X \in \mathcal{P}$. $\square$

Теорема 6.4. *Пусть A — произвольное в.п. множество, и $\mathcal{P}$ — семейство всех областей значения строго возрастающих примитивно рекурсивных функций. Тогда*
1) семейство

$$\mathcal{W}(\mathcal{P}, \varepsilon^A) = \{\{e\} \oplus U \mid e \in \omega \;\&\; U \in \mathcal{P} \;\&\; U \neq W_e^A\}$$

не является A-в.п.;
2) существует вычислимая функция d такая, что для всех $X \not\leq_T A$ имеет место

$$\mathcal{W}(\mathcal{P}, \varepsilon^A) = \{W^X_{d(n)} \mid n \in \omega\}.$$

Доказательство. 1) Предположим, что A-в.п. множество W^A_u, $u \in \omega$, является перечислением семейства $\mathcal{W}(\mathcal{P}, \varepsilon^A)$. Тогда по лемме 4.3 существует вычислимая функция F такая, что

$$W^A_{F(u,e,0)} \neq \varepsilon^A(e) = W^A_e$$

для всех $e \in \omega$, что противоречит теореме рекурсии.

2) Для доказательства существования функции d необходимо зафиксировать следующее:
а) вычислимую последовательность $\{g_j\}_{j \in \omega}$ всех строго возрастающих примитивно рекурсивных функций (тогда $\mathcal{P} = \{\mathrm{rng}\ g_j \mid j \in \omega\}$, причем предикат $P(j, y) =$ «$y \in \mathrm{rng}\ g_j$» будет вычислимым);

б) сильно вычислимый массив конечных множеств $\{V_{e,s}\}_{e,s \in \omega}$ такой, что

$$W^A_e = \bigcup\nolimits_u \bigcap\nolimits_{s \geq u} V_{e,s}$$

для всех $e \in \omega$;

в) вычислимую функцию k такую, что для всех $e, j, s \in \omega$

$$W^A_{k(e,j,s)} = \{x \mid g_j(x + s) \in W^A_e\}.$$

г) вычислимую функцию h из леммы 6.3.

Поскольку $W^X_{h(e)} \neq W^A_e$ и $W_{h(e)} \in \mathcal{P}$ при $X \not\leq_T A$, для вычислимой функции $\widetilde{h}$ такой, что

$$W^X_{\widetilde{h}(e,j,s)} = \{g_j(x) \mid x < s\} \cup \{g_j(x + s) \mid x \in W^X_{h(k(e,j,s))}\},$$

также имеет место $W^X_{\widetilde{h}(e,j,s)} \neq W^A_e$ и $W_{\widetilde{h}(e,j,s)} \in \mathcal{P}$, если $X \not\leq_T A$ и $e, j, s \in \omega$.

Обозначим через υ вычислимую функцию

$$\upsilon(e, y, s) = \min\{u \leq s \mid (\forall t)[u \leq t < s \implies y \in V_{e,t}]\},$$

неубывающую относительно переменной s.

Определим вычислимую функцию d_1 так, что

$$W^X_{d_1(e,j,y)} = \{g_j(x) \mid (\exists s > x)[y \notin V_{e,s} \vee g_j(x) \in W^X_{\widetilde{h}(e,j,\upsilon(e,y,s))}]\}.$$

Ясно, что если $y \notin W^A_e$, то $W^X_{d_1(e,j,y)} = \mathrm{rng}\ g_j$. Если же $y \in W^A_e$, то существует предел $u = \lim_s \upsilon(e,y,s)$. Тогда $W^X_{d_1(e,j,y)} = W^X_{\widetilde{h}(e,j,u)}$, откуда $W^X_{d_1(e,j,y)} \neq W^A_e$ и $W_{d_1(e,j,y)} \in \mathcal{P}$ при $X \not\leq_T A$,

Определим теперь вычислимую функцию d_2 так, что

$$W^X_{d_2(e,j,y,u)} = \begin{cases} \mathrm{rng}\ g_j, & \text{если } y \in \bigcap_{s \geq u} V_{e,s}, \\ W^X_{\widetilde{h}(e,j,t)}, & \text{если } t = \min\{s \geq u \mid y \notin V_{e,s}\}. \end{cases}$$

Убедимся, что вычислимая функция d такая, что

$$W^X_{d(\langle e,j,y,u\rangle)} = \begin{cases} \{e\} \oplus W^X_{d_1(e,j,y)}, & \text{если } u = 0 \text{ и } y \in \mathrm{rng}\ g_j, \\ \{e\} \oplus W^X_{d_2(e,j,y,u)}, & \text{если } u > 0 \text{ и } y \notin \mathrm{rng}\ g_j, \\ \{e\} \oplus W^X_{h(e)}, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

для всех $n = \langle e,j,y,u\rangle \in \omega$ и $X \subseteq \omega$, удовлетворяет утверждению теоремы.

Пусть $X \not\leq_T A$. Отметим сначала, что по построению $W^X_{d(n)} \in \mathcal{W}(\mathcal{P}, \varepsilon^A)$ для всех $n \in \omega$. Предположим, что $\{e\} \oplus \mathrm{rng}\, g_j \in \mathcal{W}(\mathcal{P}, \varepsilon^A)$. Тогда $\mathrm{rng}\, g_j \neq W^A_e$. Если $y \in \mathrm{rng}\ g_j - W^A_e$, то $W^X_{d(n)} = \{e\} \oplus \mathrm{rng}\ g_j$ при $n = \langle e,j,y,0\rangle$. Если же $y \in W^A_e - \mathrm{rng}\ g_j$, то $y \in \bigcap_{s \geq u} V_{e,s}$ для некоторого $u > 0$ и, следовательно, $W^X_{d(n)} = \{e\} \oplus \mathrm{rng}\ g_j$ при $n = \langle e,j,y,u\rangle$.

Таким образом, $\mathcal{W}(\mathcal{P}, \varepsilon^A) = \{W^X_{d(n)} \mid n \in \omega\}$. $\square$

7 Ограничения на спектры степеней алгебраических систем

В предыдущей главе было установлено, что класс спектров степеней алгебраических систем вида $\mathfrak{E}\mathfrak{F}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu))$, где ν — вычислимая LR-нумерация Δ^0_2 множеств замкнут не только относительно пересечения, но и относительно объединения. Однако, общеизвестным считается тот факт, что объединение двух спектров степеней произвольных алгебраических систем не всегда будет снова спектром алгебраической системы. А именно, считаются «фольклором» следующие результаты:

Теорема 7.1. (Фольклор). *Если несравнимые степени* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *лежат в спектре степеней* $\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A})$ *счетной алгебраической системы* $\mathfrak{A}$*, то* $\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A})$ *содержит также некоторую степень* $\mathbf{c}$ *такую, что* $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{c}$ *и* $\mathbf{b} \not\leq \mathbf{c}$.

Следствие 7.2. (Фольклор). *Если степени* $\mathbf{a} = \deg(A)$ *и* $\mathbf{b} = \deg(B)$ *не сравнимы, то класс степеней*

$$\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{Des}(A)) \cup \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{Des}(B)) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{x}\} \cup \{\mathbf{x} \mid \mathbf{b} \leq \mathbf{x}\}$$

не является спектром степеней ни одной счетной алгебраической системы. Другими словами массовая проблема $\mathrm{Pres}(\mathfrak{Des}(A)) \vee \mathrm{Pres}(\mathfrak{Des}(B))$ *не слабо эквивалентна ни одной проблеме представимости.*

Если система $\mathfrak{A}$ в теореме 7.1 является локально конструктивизируемой, то получим усиленное утверждение, известное из работы [16]

Теорема 7.3. (Рихтер [16]). *Если ненулевая степень* $\mathbf{a}$ *лежит в спектре степеней локально конструктивизируемой счетной алгебраической системы (например, линейного порядка), то* $\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A})$ *содержит также некоторую степень* $\mathbf{c}$ *такую, что* $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{c}$.

Следствие 7.4. (Рихтер [16]). *Если локально конструктивизируемая счетная алгебраическая система (например, линейный порядок), имеет степень, то она является конструктуивизируемой.*

В данной главе мы усилим приведенные результаты в нескольких направлениях.

Во-первых мы увидим, что в теореме 7.1 степень $\mathbf{c}$ может быть выбрана такой, что $\mathbf{c}' \leq \mathbf{b}'$. Это позволит нам установить, что верхние полурешетки $\mathbf{D}_s$ и $\mathbf{D}_w$ не являются решетками. Соединение данного направления с релятивизацией некоторых доказательств из предыдущей главы позволит нам обобщить теорему 4.12 и следствие 4.13, и получить описание класса тотальных е-степеней как класса е-степеней $\mathbf{a}$ таких, что системы $\mathfrak{A} = \mathfrak{Enum}(A)$, $A \in \mathbf{a}$, обладают свойством равномерности в том смысле, что из неравномерной сводимости $\mathfrak{B} \leq_w \mathfrak{A}$ следует равномерная сводимость $\mathfrak{B} \leq_s \mathfrak{A}$ для всех систем $\mathfrak{B}$.

Во-вторых, мы установим, что выбор степени $\mathbf{c}$ может зависеть только от несравнимых степеней $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, годящийся одновременно для всех алгебраических систем $\mathfrak{A}$, спектр степеней которых содержит степени $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Отсюда будет следовать, существование степени $\mathbf{c}$ такой, что совокупность $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leq \mathbf{c}\}$ не является спектром степеней ни одной алгебраической системы, то есть следствие 4.5 и теорема 6.4 не могут обобщены на ненизкие не-в.п. степени. Мы увидим далее, что существует даже степень $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}''$ такая, что совокупность $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leq \mathbf{c}\}$ не является спектром степеней.

В-третьих, будет доказано, что спектр степеней не может быть объединением спектров степеней $\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{Des}(A_i))$, $i \in \omega$, если среди тьюринговых степеней множеств A_i, $i \in \omega$, нет наименьшей.

Кроме того, наши рассуждения, примененные к линейным порядкам позволят решить отрицательно вопрос об отделимости несравнимых степеней спектрами линейных порядков, поставленный Миллером.

Вопрос 7.5. (Миллер [14]). *Можно ли для произвольных несравнимых степеней* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *найти такой линейный порядок* $\mathfrak{L}$, *что* $\mathbf{a} \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{L})$ *и* $\mathbf{b} \notin \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{L})$?

8 Нерешеточность полурешеток $\mathbf{D}_s$ и $\mathbf{D}_w$

Основные результаты следующих двух параграфов основываются на следующем

Предложение 8.1. *Пусть счетная алгебраическая система* $\mathfrak{B}$ *не имеет степени, причем* $\mathrm{dom}\,(\mathfrak{B}) \subseteq \omega$ *и* $D(\mathfrak{B}) \leq_T B$ *для некоторого множества* $B \subseteq \omega$. *Тогда существуют последовательность множеств* $X_n \subseteq \omega, n \in \omega$, *удовлетворяющая следующим утверждениям:*

1. если $\mathrm{X} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{X_n \mid n \in \omega\}$, *то для каждого конечного набора* $\vec{b}$

элементов из $\mathfrak{B}$ *имеет место* $\mathrm{Pres}(\mathfrak{B}, \vec{b}) \leq_s \mathrm{X}$*; в частности,* $\deg(X_n) \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{B})$ *для каждого* n*;*

2. *для каждого множества* $X \subseteq \omega$*,* $\deg(X) \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{B})$*, существует не более одного* $n \in \omega$*, для которого имеет место* $X \leq_T X_n$*;*

3. *существует вычислимая функция* f *такая, что* $X'_n = \Phi_{f(n)}(B')$ *для всех* $n \in \omega$*;*

Следствие 8.2. *Если несравнимые степени* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{c}$ *лежат в спектре степеней* $\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A})$ *счетной алгебраической системы* $\mathfrak{A}$*, то* $\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A})$ *содержит также некоторую степень* $\mathbf{b}$ *такую, что* $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{b}$*,* $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{b}$ *и* $\mathbf{b}' \leq \mathbf{a}'$.

Доказательство следствия 8.2. Рассмотрим сначала случай, когда система $\mathfrak{A}$ имеет степень $\mathbf{d}$. Тогда $\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A}) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{d} \leq \mathbf{x}\}$, так что $\mathbf{d} < \mathbf{a}$ и $\mathbf{d} < \mathbf{c}$. По релятивизированному доказательству теоремы о вложимости счетных дистрибутивных решеток в тьюринговые степени существует тройка степеней $\mathbf{x}_0 > \mathbf{d}$, $\mathbf{x}_1 > \mathbf{d}$, $\mathbf{x}_2 > \mathbf{d}$ такая, что $\mathbf{x}'_i \leq \mathbf{d}'$ и $\mathbf{x}_i \cap \mathbf{x}_j = \mathbf{d}$ при $0 \leq i < j \leq 2$. Поскольку $\mathbf{d} < \mathbf{a}$ и $\mathbf{d} < \mathbf{b}$, существует $k \in \{0, 1, 2\}$ такое, что $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{x}_k$ и $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{x}_k$. Так как $\mathbf{x}_k \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A})$ и $\mathbf{x}'_k \leq \mathbf{d}' \leq \mathbf{a}'$ можем положить $\mathbf{b} = \mathbf{x}_k$.

Если же система $\mathfrak{A}$ не имеет степени, то можем применить предложение 8.1, где $\mathfrak{B}$ — некоторая изоморфная копия системы $\mathfrak{A}$ такая, что $\mathrm{dom}\,(\mathfrak{B}) \subseteq \omega$, $D(\mathfrak{B}) \leq_T B$ и $B \in \mathbf{a} \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A})$. Тогда существует бесконечная последовательность степеней $\mathbf{x}_n = \deg(X_n) \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A})$, $n \in \omega$, такая, что $\mathbf{x}'_n \leq \mathbf{a}'$ для всех $n \in \omega$, и для каждой степени $\mathbf{x} \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A})$ существует не более одного $n \in \omega$ такого, что $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}_n$. Так как $\mathbf{a} \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A})$ и $\mathbf{c} \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A})$ для некоторого $k \in \omega$ выполнено $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{x}_k$ и $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{x}_k$. Поскольку $\mathbf{x}_k \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A})$ и $\mathbf{x}'_k \leq \mathbf{a}'$ можем положить $\mathbf{b} = \mathbf{x}_k$.
□

Следствие 8.3. *Пусть тьюринговые степени* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{c}$ *несравнимы,* $\mathbf{a}' = \mathbf{0}'$*,* $A \in \mathbf{a}$ *и* $C \in \mathbf{a}$*. Тогда сильные и слабые степени алгебраических систем* $\mathfrak{Des}(A)$ *и* $\mathfrak{Des}(C)$ *не имеют наибольшей нижней грани в* $\mathbf{D}_s$ *и* $\mathbf{D}_w$*, соответственно.*

Доказательство следствия 8.3. Предположим, что $\mathfrak{B} \leq_w \mathfrak{Des}(A)$ и $\mathfrak{B} \leq_w \mathfrak{Des}(C)$ для некоторой алгебраической системы $\mathfrak{B}$. Тогда

$$\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{Des}(A)) \cup \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{Des}(C)) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{x}\} \cup \{\mathbf{x} \mid \mathbf{c} \leq \mathbf{x}\} \subseteq \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{B}),$$

так что $\mathbf{a} \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{C})$ и $\mathbf{b} \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{C})$. Применяя предыдущее следствие получаем степень $\mathbf{b} \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{B})$, $\mathbf{c}'_{-} = \mathbf{a}' = \mathbf{0}'$ такую, что $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{b}$, $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{b}$. Фиксируем множество $B \in \mathbf{b}$ и рассмотрим алгебраическую систему $\mathfrak{D} = \mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^C)$, где

$$\mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \varepsilon^C) = \{\{n\} \oplus U \mid n \in \omega \ \&\ U \text{ конечно } \&\ U \neq W_n^C\}.$$

По следствию 4.11 $\mathfrak{D} \leq_s \mathfrak{Des}(A)$ и $\mathfrak{D} \leq_s \mathfrak{Des}(C)$, так как для каждого $X \in \mathrm{Pres}(\mathfrak{Des}(A)) \cup \mathrm{Pres}(\mathfrak{Des}(C))$ имеет место $\deg(X) \not\leq_T B$ и, следовательно, $X \oplus \overline{X} \notin \{W_n^B\}_{n \in \omega}$. С другой стороны, $\mathfrak{D} \not\leq_w \mathfrak{B}$, поскольку $\mathbf{b} \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{B}) - \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{D})$.

Поэтому, сильная (слабая) степень системы $\mathfrak{C}$ не может являться наибольшей нижней гранью сильных (слабых) степеней систем $\mathfrak{Des}(A)$ и $\mathfrak{Des}(B)$.

Доказательство предложения 8.1. Пусть дана счетная алгебраическая система $\mathfrak{B}$, не имеющая степени, такая, что $\mathrm{dom}\,(\mathfrak{B}) \subseteq \omega$ и $\deg(D(\mathfrak{B})) \leq_T B$. Построим множества $X_n \subseteq \omega, n \in \omega$, для которых будут выполнены условия:

1. для каждого конечного набора $\vec{b}$ элементов из $\mathfrak{B}$ имеет место

$$\mathrm{Pres}(\mathfrak{B}, \vec{b}) \leq_s \mathrm{X} \overset{\mathrm{def}}{=} \{X_n \mid n \in \omega\};$$

2. для каждого множества $X \subseteq \omega$, $\deg(X) \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{B})$, существует не более одного $n \in \omega$, для которого имеет место $X \leq_T X_n$;

3. существует вычислимая функция f такая, что $X_n' = \Phi_{f(n)}(B')$ для всех $n \in \omega$;

Множества X_n, $n \in \omega$, будут иметь вид $X_n = A_n \oplus F_n$, где каждое множество A_n является атомной диаграммой некоторой системы $\mathfrak{B}_n \cong \mathfrak{B}$, $\mathrm{dom}\,(\mathfrak{B}_n) = \omega$, а F_n — графиком частичной функции f_n.

Множество A_n будет строиться одновременно с изоморфизмом $g_n : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_n$. Требования

$$T_{n,b} : g_n(b) \in \mathrm{dom}\,(\mathfrak{B}_n)$$

для всех $n \in \omega$ и $b \in \mathrm{dom}\,(\mathfrak{B})$ гарантируют, что каждая функция g_n определена на всем $\mathfrak{B}$. Из требований

$$S_{n,c} : (\exists b \in \mathrm{dom}\,(\mathfrak{B}))[g_n(b) = c],$$

где $n, c \in \omega$, следует, что $\mathrm{dom}\,(\mathfrak{B}_n)$ целиком содержится в области значений функции g_n.

Для выполнения условия 1 фиксируем сначала вычислимую нумерацию всех конечных наборов натуральных чисел $\alpha : \omega \mapsto \omega^{<\omega}$, такую, что каждому набору соответствует бесконечное число номеров. Теперь достаточно удовлетворить требованиям

$$P_{\vec{b}} : (\exists k \in \omega)(\forall n \in \omega)[\alpha(f_n(k)) = (g_n(b_0), \ldots, g_n(b_{r-1}))]$$

для каждого конечного набора $\vec{b} = (b_0, \ldots, b_{r-1})$ из $\mathfrak{B}$. Действительно, пусть дан конечный набор $\vec{b}$ из $\mathfrak{B}$. Фиксируем $k \in \omega$ из требования $P_{\vec{b}}$. Тогда любое множество $X_n \in \mathrm{X}$ имеет вид $D(\mathfrak{B}_n) \oplus \mathrm{graph}\,(f_n)$, где $\mathfrak{B}_n \cong \mathfrak{B}$, причем значение $\alpha(f_n(k))$ является набором элементов из $\mathfrak{B}_n$, соответствующим набору $\vec{b}$ относительно изоморфизма $g_n : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_n$, то есть по данному $X_n \in \mathrm{X}$ мы можем равномерно построить $(\mathfrak{B}_n, \alpha(f_n(k))) \cong (\mathfrak{B}, \vec{b})$.

Для выполнения условия 2 нужно удовлетворить требованиям

$$N_{\Phi,\Psi,n,m} : \Phi(X_n) = \Psi(X_m) \text{ всюду определены} \Longrightarrow \deg(\Phi(X_n)) \notin \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{B})$$

для всех тьюринговых функционалов Φ, Ψ и произвольных пар $n \neq m$.

В ходе построения будет определен предикат $A(s, n, \sigma)$, где $n, s \in \omega$ и $\sigma \in 2^{<\omega}$ — начальный сегмент (если $A(s, n, \sigma)$, то мы будем говорить, что σ является n-допустимым на шаге s). Предикат $A(n, s, \sigma)$ будет обязательно иметь место, если σ есть начальный сегмент множества X_n. Кроме того, для каждого s мы сможем с помощью оракула B' эффективно указать индекс B-вычислимой перечислимости множества

$$\{\langle n, \sigma\rangle : A(s, n, \sigma)\},$$

то есть должна существовать функция $h \leq_T B'$, что для всех $n, s \in \omega$ и $\sigma \in 2^{<\omega}$ справедливо

$$A(s, n, \sigma) \iff \langle n, \sigma\rangle \in W_{h(s)}(B).$$

Наше построение множеств X_n, $n \in \omega$, будет равномерно вычислимым относительно B'. Поэтому для выполнения условия 3 достаточно удовлетворить требования генеричности

$$G_{n,e} : (\exists \sigma \subseteq X_n)(\exists s \in \omega)[\Phi_e(\sigma; e)\downarrow \vee (\forall \tau \supseteq \sigma)[A(n, s, \tau) \implies \Phi_e(\tau; e)\uparrow]]$$

для всех $n, e \in \omega$. Действительно, чтобы узнать, верно ли $e \in X'_n$, можно B'-вычислимо найти $\sigma \subseteq X_n$ и $s \in \omega$ из требования $G_{n,e}$. Если $\Phi_e(\sigma; e)\downarrow$, то, очевидно, $\Phi_e(X_n; e)\downarrow$ и $e \in X'_n$. Если же $\Phi_e(\tau; e)\uparrow$ для всех n-допустимых сегментов $\tau \supseteq \sigma$ на шаге s, то $\Phi_e(X_n; e)\uparrow$ и, следовательно, $e \notin X'_n$. Изложенная выше B'-вычислимая процедура вычисления X'_n равномерна по n и, поэтому, существует такая вычислимая функция f, что $X'_n = \Phi_{f(n)}(B')$ для всех $n \in \omega$.

Пусть

$$R_0, R_1, R_2 \ldots$$

— упорядочение всех имеющихся требований $T_{n,b}$, $S_{n,c}$, $P_{\vec{b}}$, $N_{\Phi,\Psi,n,m}$ и $G_{n,e}$, вычислимое относительно B (так как $\mathrm{dom}\,(\mathfrak{B}) \leq_T D(\mathfrak{B}) \leq_T B$).

Описанное ниже пошаговое построение определяет множества D_n посредством их начальных сегментов $\delta_n[s]$, множества $F_n = \mathrm{graph}\,(f_n)$ — посредством их начальных сегментов $\varphi_n[s]$, а изоморфизмы $g_n : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_n$ посредством частичных функций $\psi_n[s]$, определенных на конечной части $\mathrm{dom}\,(\mathfrak{B})$.

Будем говорить, что $\sigma \in 2^{<\omega}$ *однозначен*, если σ является начальным сегментом графика некоторой частичной функции. Для начального сегмента $\sigma \in 2^{<\omega}$ определим $\sigma^0, \sigma^1 \in 2^{<\omega}$ как начальные сегменты наибольшей длины, такие, что для всех $A, B \subseteq \omega$ имеет место

$$\sigma \subseteq A \oplus B \implies \sigma^0 \subseteq A \;\&\; \sigma^1 \subseteq B.$$

На шаге s полагаем предикат $A(s, n, \sigma)$ истинным и говорим, что *σ n-допустим на шаге s*), если:
1. σ^1 — сравнимый с $\varphi_n[s]$ однозначный начальный сегмент;
2. σ^0 — сравнимый с $\delta_n[s]$ начальный сегмент атомной диаграммы некоторой системы $\widehat{\mathfrak{B}}$, $\mathrm{dom}\,(\widehat{\mathfrak{B}}) = \omega$, для которой существует изоморфизм $\widehat{g}_n : \mathfrak{B} \to \widehat{\mathfrak{B}}$, расширяющий частичную функцию $\psi_n[s]$.

Нетрудно видеть, что зная начальные сегменты $\varphi_n[s]$, $\delta_n[s]$ и конечную функцию $\psi_n[s]$ мы можем используя оракул $D(\mathfrak{B}) \leq_T B$ перечислить все пары $\langle n, \sigma\rangle$ такие, что $A(s, n, \sigma)$. Более того, оракул B' позволяет указать конечный набор $\vec{b}_s$ элементов из $\mathfrak{B}$ и геделев номер вычислимой функции r_s, значениями которой являются (номера) экзистенциональных предложений языка системы $(\mathfrak{B}, \vec{b}_s)$, что для всех $\langle n, \sigma\rangle$ имеет место

$$A(s, n, \sigma) \iff r_s(n, \sigma) \in \mathrm{Th}_\exists(\mathfrak{B}, \vec{b}_s).$$

Тем более для предиката $A(s,n,\sigma)$ будет существовать упомянутая выше функция $h \leq_T B'$.

На каждом шаге s функция $\psi_n[s]$ будет определена таким образом, что для некоторой системы $\mathfrak{B}_n[s]$, $\mathrm{dom}\,(\mathfrak{B}_n[s]) = \omega$, $\delta_n[s] \subseteq D(\mathfrak{B}_n)$, существует изоморфизм $g_n[s] : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_n[s]$, расширяющий $\psi_n[s]$. Ясно, что система $\mathfrak{B}_n[s]$ и изоморфизм $g_n[s]$, если таковые существуют, могут быть алгоритмически найдены с использованием оракула B'.

Построение.

Шаг $s = 0$. Полагаем $\varphi_n[0]$, $\delta_n[0]$ и $\psi_n[0]$ пустыми.

Шаг $s + 1$. Удовлетворяем требование R_s.

Случай 1. $R_s = G_{n,e}$.

С помощью оракула B' выясняем, существует ли такой начальный сегмент σ такой, что $A(s,n,\sigma)$ и $\Phi_e(\sigma; e)\downarrow$. Если такого σ не существует, то полагаем $\varphi_n[s+1] = \varphi_n[s]$, $\delta_n[s+1] = \delta_n[s]$, $\psi_k[s+1] = \psi_k[s]$. Если имеется такой σ, то полагаем $\varphi_n[s+1] = \varphi_n[s] \cup \sigma^1$, $\delta_n[s+1] = \delta_n \cup \sigma^0$, $\psi_k[s+1] = \psi_k[s]$. (Отметим, что $\delta_n[s+1] \in \{\delta_n[s], \sigma^0\}$, так что снова существует система $\widehat{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}_n[s+1]$, такая, что $\mathrm{dom}\,(\widehat{\mathfrak{B}}) = \omega$, $\delta_n[s+1] \subseteq D(\widehat{\mathfrak{B}})$, для которой существует изоморфизм $\widehat{g}_n : \mathfrak{B} \to \widehat{\mathfrak{B}}$, расширяющий $\psi_n[s+1] = \psi_n[s]$).

В любом случае полагаем $\varphi_k[s+1] = \varphi_k[s]$, $\delta_k[s+1] = \delta_k[s]$ при $k \neq n$, и $\psi_k[s+1] = \psi_k[s]$ для всех k.

Случай 2. $R_s = N_{\Phi,\Psi,n,m}$, $n \neq m$.

С помощью оракула B' выясняем, существует ли такие начальные сегменты σ_n и σ_m такие, что $A(s,n,\sigma_n)$, $A(s,m,\sigma_m)$ и

$$\Phi(\sigma_n; x)\downarrow \neq \Psi(\sigma_m; x)\downarrow$$

для некоторого $x \in \omega$. Если таких σ_n и σ_m не существует, то полагаем $\varphi_n[s+1] = \varphi_n[s]$, $\delta_n[s+1] = \delta_n[s]$, $\varphi_m[s+1] = \varphi_m[s]$, $\delta_m[s+1] = \delta_m[s]$.

Если имеются такие σ_n и σ_m, то полагаем $\varphi_n[s+1] = \varphi_n[s] \cup \sigma_n^1$, $\delta_n[s+1] = \delta_n[s] \cup \sigma_n^0$, $\varphi_m[s+1] = \varphi_m[s] \cup \sigma_m^1$, $\delta_m[s+1] = \delta_m[s] \cup \sigma_m^0$.

В любом случае полагаем $\varphi_k[s+1] = \varphi_k[s]$, $\delta_k[s+1] = \delta_k[s]$ при $k \neq n, m$, и $\psi_k[s+1] = \psi_k[s]$ для всех k.

Случай 3. $R_s = P_{n,b}$.

Если значение $\psi_n[s](b)$ не определено, то пусть $\psi_n[s+1] = \psi_n[s] \cup \{\langle b, g_n[s](b)\rangle\}$. В противном случае $\psi_n[s+1] = \psi_n[s]$.

В любом случае полагаем $\psi_k[s+1] = \psi_k[s]$ при $k \neq n$, $\varphi_k[s+1] = \varphi_k[s]$, $\delta_k[s+1] = \delta_k[s]$ для всех k.

Случай 4. $R_s = S_{n,c}$.

Если не существует $b \in \mathfrak{B}$ такого, что $\psi_n[s](b) = c$, то пусть $\psi_n[s+1] = \psi_n[s] \cup \{\langle b, c\rangle\}$, где b таково, что $g_n[s](b) = c$. В противном случае $\psi_n[s+1] = \psi_n[s]$.

В любом случае полагаем $\psi_k[s+1] = \psi_k[s]$ при $k \neq n$, $\varphi_k[s+1] = \varphi_k[s]$, $\delta_k[s+1] = \delta_k[s]$ для всех k.

Случай 5. $R_s = P_{\vec{b}}$ для $\vec{b} = (b_0, \dots, b_{r-1})$.

Найдем достаточно большое $k \in \omega$, что не существует таких $m, n \in \omega$, что $\varphi_n[s](\langle k, m\rangle) = 1$.

Тогда для каждого $n \in \omega$ начальный сегмент $\varphi_n[s+1]$ задается конкатенацией $\varphi_n[s]$ с подходящим сегментом вида $0\dots01$ так, чтобы $\varphi_n[s+1](\langle k, m_n\rangle) = 1$ и $\alpha(m_n) = (g_n[s](b_1), \dots, g_n[s](b_{r-1}))$; такое m_n существует, поскольку прообраз каждого набора относительно α бесконечен. Кроме того, для каждого $n \in \omega$ определим $\psi_n[s+1] = \psi_n[s] \cup \{\langle b_i, g_n[s](b_i)\rangle : i < r\}$ и $\delta_n[s+1] = \delta_n[s]$.

Описание построения завершено.

Определим $A_n = \bigcup_s \delta_n[s]$, $F_n = \bigcup_s \varphi_n[s]$, $g_n = \bigcup_s \psi_n[s]$ для каждого n.

Нетрудно убедиться, что по построению для каждого n множество D_n является атомной диаграммой некоторой системы $\mathfrak{B}_n$, такой, что $\operatorname{dom}(\mathfrak{B}_n) = \omega$ и $g_n : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_n$ — изоморфизм алгебраических систем. Кроме того, описание случая 1 построения обеспечивает выполнение всех требований $G_{n,e}$.

Пользуясь индукцией, отметим также, что на каждом шаге построения имеется такое $k \in \omega$, для которого $\varphi_n[s](\langle k, m\rangle) \neq 1$ для всех $m, n \in \omega$. Поэтому, все требования $P_{\vec{b}}$ оказываются выполненными (случай 5).

Осталось убедиться в выполнении каждого требования $R_s = N_{\Phi,\Psi,n,m}$, $n \neq m$. Предположим, что $\Phi(X_n) = \Psi(X_m)$, причем обе части равенства всюду определены. Нужно установить, что $\deg(\Phi(X_n)) \notin \mathbf{Sp}(\mathfrak{B})$.

Из построения следует, что если для сегментов σ_n и σ_m и некоторого $x \in \omega$ имеют место соотношения $A(s, n, \sigma_n)$, $A(s, m, \sigma_m)$, $\Phi(\sigma_n; x)\downarrow$ и $\Psi(\sigma_m; x)\downarrow$, то необходимо $\Phi(\sigma_n; x) = \Psi(\sigma_m; x)$. Так как каждый предикат $A(s, k, \sigma)$, $k \in \omega$, выполнен для любого начального семейства множества X_n, то для любых $x, y \in \omega$ имеем

$$\Phi(X_n, x) = y \iff (\exists\sigma)[A(s, n, \sigma) \text{ и } \Phi(\sigma; x)\downarrow = y].$$

Кроме того, по определению предиката $A(s, n, \sigma)$ существует конечный набор $\vec{b}_s$ элементов из $\mathfrak{B}$, что для некоторой вычислимой функции r_s имеет место

$$A(s, n, \sigma) \iff r_s(n, \sigma) \in \mathrm{Th}_\exists(\mathfrak{B}, \vec{b}_s)$$

для всех $\langle n, \sigma\rangle$. Таким образом,

$$\Phi(X_n; x) = y \iff (\exists\sigma)[r_s(n, \sigma) \in \mathrm{Th}_\exists(\mathfrak{B}, \vec{b}_s) \text{ и } \Phi(\sigma; x)\downarrow = y].$$

для всех $x, y \in \omega$. Отсюда следует, что $\Phi(X_n) \leq_T D(\mathfrak{C})$ для произвольной системы $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{B}$, такой, что $\mathrm{dom}\,(\mathfrak{C}) \subseteq \omega$. Поэтому $\deg(\Phi(X_n)) \notin \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{B})$, так как иначе $\deg(\Phi(X_n))$ являлась бы степенью системы $\mathfrak{B}$.

9 Равномерность сводимости к алгебраическим системам и тотальные e-степени

Стукачевым [5] было замечено, что если система $\mathfrak{B}$ имеет степень, то слабые и сильные сводимости к проблеме представимости системы $\mathfrak{B}$ эквивалентны с точностью до обогащения системы $\mathfrak{B}$ конечным числом констант. А именно, существует такой конечный набор $\vec{b}$ элементов системы $\mathfrak{B}$, что для любой массовой проблемы P имеет место

$$\mathrm{P} \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}) \implies \mathrm{P} \leq_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}, \vec{b}).$$

Цель настоящего параграфа — установить, что данный результат невозможно распространить на произвольные счетные системы $\mathfrak{B}$. Следующая теорема утверждает, что приведенное выше свойство системы $\mathfrak{B}$ на самом деле эквивалентно, тому что $\mathfrak{B}$ имеет степень.

Теорема 9.1. *Если счетная алгебраическая система* $\mathfrak{B}$ *не имеет степени, то существует массовая проблема* P*, такая, что* $\mathrm{P} \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$ *и* $\mathrm{P} \not\leq_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}, \vec{b})$ *для любого конечного набора* $\vec{b}$ *элементов из* $\mathrm{dom}\,(\mathfrak{B})$.

Доказательство. Пусть X_n $(n \in \omega)$ — последовательность из предложения 8.1. Определим массовую проблему

$$\mathrm{P} = \{Y \subseteq \omega \mid (\forall n \in \omega)[Y \neq W_n(X_n)]\},$$

соответствующая проблеме вычисления какого-нибудь множества, не совпадающего ни с одним из множеств $W_n(X_n)$, $n \in \omega$.

Докажем, что $\mathrm{P} \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$. Пусть $X \in \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$. Тогда X является атомной диаграммой системы $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{B}$, в частности, имеем $\deg(X) \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{B})$ и $\overline{X} \equiv_e X$ (перечисляя множество истинных формул можно перечислить множество ложных формул и наоборот).

Предположим, что $X =^* W_n(X_n)$ и $\overline{X} =^* W_m(X_m)$ для некоторых $n, m \in \omega$. Тогда $X \leq_T X_n$ и $X \leq_T X_m$, откуда получаем $n = m$ по утверждению 2 предложения 8.1. Следовательно, $W_n(X_n) =^* \overline{W_n(X_n)}$, что невозможно.

Значит существует множество $Y \in \{X, \overline{X}\}$, не совпадающее (даже с точностью до конечного числа элементов) ни с одним множеством вида $W_n(X_n)$, $n \in \omega$. (Отметим, что указать такое множество равномерно по данному X мы не можем.) Ясно, что $Y \in \mathrm{P}$ и $Y \leq_T X$. Таким образом, $\mathrm{P} \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$.

Приведем к противоречию предположение о том, что $\mathrm{P} \leq_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}, \vec{b})$ для некоторого конечного набора $\vec{b}$ из $\mathfrak{B}$. Действительно, в силу утверждения 1 предложения 8.1 отсюда следовало бы, что $\mathrm{P} \leq_s \mathrm{X} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{X_n \mid n \in \omega\}$. Фиксируем тьюрингов функционал Φ такой, что $\Phi(X_n) \in \mathrm{P}$ для каждого $n \in \omega$. Пусть $n_0 \in \omega$ — такой индекс, что

$$W_{n_0}(X) = \Phi(X)$$

для каждого $X \subseteq \omega$. В частности,

$$W_{n_0}(X_{n_0}) = \Phi(X_{n_0}),$$

что противоречит утверждению $\Phi(X_{n_0}) \in \mathrm{P}$. $\Box$

Проблема P не является, вообще говоря, проблемой представимости какой-либо системы. Однако, в некоторых случаях в качестве все-же можно считать P проблемой представимости.

Докажем сначала следующую лемму, являющуюся частичным обобщением теоремы 4.2 для не-Δ_2^0 нумераций. Здесь запись $\nu \leq_T X$ означает, что для нумерации $\nu : \omega \to 2^\omega$ и множества $X \subseteq \omega$ имеет место $\{\langle n, m\rangle \mid m \in \nu(n)\} \leq_T X$.

Лемма 9.2. *Если для нумерации множеств $\nu : \omega \to 2^\omega$ и множества $Y \subseteq \omega$ имеет место $\nu \leq_T Y'$ и $Y \neq^* \nu(n)$ для всех $n \in \omega$, то $\deg(Y) \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu))$.*

Доказательство. Пусть D_j, $j \in \omega$, — стандартная сильно вычислимая нумерация всех конечных множеств, и $A \vartriangle B$ обозначает симметрическую разность множеств A и B. Из условий леммы следует, что множество $(Y \cup D_j) \vartriangle \nu(n)$ не пусто для каждого $n \in \omega$.

По лемме о пределе существует функция $p \leq_T Y$ такая, что для всех $n \in \omega$

$$\nu(n) = \lim_s D_{p(n,s)}$$

(то есть $\nu(n) = \cup_t \cap_{s>t} D_{p(n,s)}$ и $\overline{\nu(n)} = \cup_t \cap_{s>t} \overline{D_{p(n,s)}}$). Тогда Y-вычислимая функция

$$\ell(n, j, s) = (\mu z)[z = s \text{ или } z \in (Y \cup D_j) \vartriangle D_{p(n,s)}]$$

будет всегда иметь конечный предел $\lim_s \ell(n, j, s)$ причем

$$\lim_s \ell(n, j, s) \in (Y \cup D_j) \vartriangle \nu(n)$$

для всех $n, j \in \omega$. Отметим, что если

$$U_{n,j} = D_j \cup \{z \in Y \mid (\exists s)[z \leq \ell(n, j, s)\},$$

то $D_j \subseteq U_{n,j}$ и $\emptyset =^* U_{n,j} \neq \nu(n)$ для всех $n, j \in \omega$. Тогда можем определить Y-в.п. множество Z таким, что

$$Z^{(\langle\langle n,j\rangle,t\rangle)} = \begin{cases} \{n\} \oplus D_j, & \text{если } D_j \neq D_{p(n,s)} \text{ для всех } s \geq t, \\ \{n\} \oplus U_{n,j} & \text{в противном случае} \end{cases}$$

для всех $\langle\langle n, j\rangle, t\rangle$. Нетрудно убедиться, что

$$\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu) = \{Z^{(\langle\langle n,j\rangle,t\rangle)} \mid n, j, t \in \omega\}$$

и, следовательно, $\deg(Y) \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \nu))$.$\square$

Будем говорить, что система $\mathfrak{B}$ *имеет j-степень* $\mathbf{b}$, если степень $\mathbf{b}$ является наименьшим тьюринговым скачком степеней из $\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{B})$.

Теорема 9.3. *Если счетная алгебраическая система $\mathfrak{B}$ имеет j-степень и не имеет степени, то существует счетная алгебраическая система $\mathfrak{A}$, такая, что* $\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$ *и* $\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \not\leq_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}, \vec{b})$ *для любого конечного набора $\vec{b}$ элементов из* $\mathrm{dom}\,(\mathfrak{B})$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{b} = \deg(B) \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{B})$ такая степень, что $\mathbf{b}' = \deg(B')$ — j-степень системы $\mathfrak{B}$. Тогда существует изоморфная копия $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{B}$, такая, что $\mathrm{dom}\,(\mathfrak{C}) \subseteq \omega$ и $D(\mathfrak{C}) \leq_T B$. Ясно, что для доказательства теоремы достаточно считать, что $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$.

Пусть X_n $(n \in \omega)$ — последовательность из предложения 8.1, соответствующая системе $\mathfrak{B}$ и множеству B.

Рассмотрим нумерацию множеств

$$\delta(n) = W_n(X_n)$$

и массовую проблему

$$\mathrm{Q}(\nu) = \{R \subseteq \omega \mid (\forall n \in \omega)[(\mathrm{Pr}_1(R))^{(n)} \neq \nu(n)\},$$

соответствующую проблеме эффективного перечисления какого-нибудь не равного $\delta(n)$ множества по данному n. По лемме 4.3 имеет место сводимость

$$\mathrm{Q}(\delta) \leq_s \mathrm{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \delta)) \equiv_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \delta))).$$

Из утверждения 3 предложения 8.1 следует, что $\delta \leq_T B'$. В силу $\mathrm{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \delta)) \equiv_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \delta)))$ мы можем положить $\mathfrak{A} = \mathfrak{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \delta)))$, если удастся установить, что $\mathrm{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \delta)) \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$ и $\mathrm{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \delta)) \not\leq_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}, \vec{b})$ для всех всех конечных наборов $\vec{b}$ из $\mathfrak{B}$.

Докажем, что $\mathrm{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F}, \delta)) \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$. Пусть $X \in \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$. Используя рассуждения из доказательства теоремы 9.1, фиксируем множество $Y \in \{X, \overline{X}\}$, такое, что

$$Y \neq^* \delta(n) = W_n(X_n)$$

для всех $n \in \omega$.

Ясно, что $\deg(Y) = \deg(X) \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{B})$. Поскольку $\deg(B')$ является j-степенью системы $\mathfrak{B}$, имеем $\delta \leq_T B' \leq_T Y'$. По лемме 9.2 $\deg(X) = \deg(Y) \in \mathbf{Sp}\,(\mathcal{W}(\mathcal{F},\nu))$. Значит, существует $Z \leq_T X$ такое, что $Z \in \mathrm{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F},\delta))$. Таким образом, $\mathrm{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F},\delta)) \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$.

Докажем, что $\mathrm{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F},\delta)) \not\leq_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{B},\vec{b})$ для любого конечного набора $\vec{b}$ элементов из $\mathfrak{B}$. В силу иммеющихся сводимостей

$$\mathrm{Pres}(\mathfrak{B},\vec{b}) \leq_s \mathrm{X}$$

(утверждение 1 предложения 8.1) и

$$\mathrm{Q}(\delta) \leq_s \mathrm{EF}(\mathcal{W}(\mathcal{F},\delta))$$

для этого достаточно установить, что $\mathrm{Q}(\delta) \not\leq_s \mathrm{X} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{X_n \mid n \in \omega\}$.

Предположим, что $\mathrm{Q}(\delta) \leq_s \mathrm{X}$ и пусть Φ — такой тьюригов функционал, что $\Phi(X_n) \in \mathrm{Q}(\delta)$ для каждого $n \in \omega$. По теореме параметризации существует такая вычислимая функция s, что

$$W_{s(n)}(X) = (\mathrm{Pr}_1(\Phi(X)))^{(n)}$$

для каждого X и n. По теореме рекурсии существует такое n_0, что

$$W_{s(n_0)}(X) = W_{n_0}(X)$$

для каждого X. В частности,

$$(\mathrm{Pr}_1(\Phi(X_{n_0})))^{(n_0)} = W_{s(n_0)}(X_{n_0}) = W_{n_0}(X_{n_0}) = \delta(n_0),$$

что противоречит утверждению $\Phi(X_{n_0}) \in \mathrm{Q}(\delta)$. $\Box$

Ясно, что если система $\mathfrak{B}$ имеет низкую изоморфную копию (то есть $\mathbf{b}' = \mathbf{0}'$ для некоторой степени $\mathbf{b} \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{B})$), то степень $\mathbf{0}'$ является j-степенью системы $\mathfrak{B}$.

Следствие 9.4. *Если счетная алгебраическая система $\mathfrak{B}$ имеет низкую изоморфную копию и не имеет степени, то существует счетная алгебраическая система $\mathfrak{A}$, такая, что $\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$ и $\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \not\leq_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{B},\vec{b})$ для любого конечного набора $\vec{b}$ элементов из* $\mathrm{dom}\,(\mathfrak{B})$.

Будем говорить, что система $\mathfrak{B}$ *имеет е-степень*, если существует множество $B \subseteq \omega$ такое, что

$$\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{B}) = \{\deg(C) \mid B \text{ является } C\text{-в.п.}\}.$$

Степень по перечислимости (e-степень) множества B называется в этом случае *е-степенью* системы $\mathfrak{B}$. Легко видеть, что система $\mathfrak{B}$ имеет степень тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$ имеет тотальную e-степень. Вместе с тем, нетрудно показать, что тьюринговая степень, соответствующая скачку e-степени системы $\mathfrak{B}$ относительно канонического изоморфизма тотальных е-степеней и тьюринговых степеней, будет являться j-степенью системы $\mathfrak{B}$ (см. [8]).

Следствие 9.5. *Если счетная алгебраическая система* $\mathfrak{B}$ *имеет нетотальную е-степень, то существует счетная алгебраическая система* $\mathfrak{A}$*, такая, что* $\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$ *и* $\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \not\leq_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}, \vec{b})$ *для любого конечного набора* $\vec{b}$ *элементов из* $\mathrm{dom}\,(\mathfrak{B})$*.*

Поскольку $\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{Enum}(B)) = \{\deg(C) \mid B\ C\text{-в.п.}\}$ в частности имеем

Следствие 9.6. *Для е-степени* $\mathbf{b}$ *следующие условия эквивалентны:*

1. $\mathbf{b}$ *является тотальной е-степенью;*
2. *Для* $B \in \mathbf{b}$ *и произвольной алгебраической системы* $\mathfrak{A}$ *из* $\mathfrak{A} \leq_w \mathfrak{Enum}(B)$ *следует* $\mathfrak{A} \leq_s \mathfrak{Enum}(B)$*.*

10 Случай линейных порядков

В этом параграфе мы ответим отрицательно на упомянутый выше вопрос Миллера:

Вопрос 7.5 (Миллер [14]). *Можно ли для произвольных несравнимых степеней* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *найти такой линейный порядок* $\mathfrak{L}$*, что* $\mathbf{a} \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{L})$ *и* $\mathbf{b} \notin \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{L})$?

Кроме того, мы увидим, что существует низкая степень $\mathbf{b}$ такая, что совокупность степеней $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leq \mathbf{b}\}$ не является спектром степеней никакого счетного линейного порядка. Вместе с тем в предыдущей главе мы видели, что алгебраические системы со спектрами степеней вида $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leq \mathbf{b}\}$, где $\mathbf{b}$ — низкая степень, и, в частности, со спектром $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} > \mathbf{0}\}$, существуют и могут быть указаны единообразным способом (следствия 4.5 и 4.6) Поэтому, вдобавок мы получим косвенный аргумент в пользу отрицательного ответа на до сих пор открытый вопрос Доуни [7] о существовании линейных порядков со спектром степеней $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} > \mathbf{0}\}$. Если такие линейные порядки и существуют, то доказательство этого факта не должно допускать обобщение на спектры вида $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leq \mathbf{b}\}$, где $\mathbf{b}$ произвольная низкая степень,

Теорема 10.1. *Для каждой степени* $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ *существует степень* $\mathbf{b}$, *несравнимая с* $\mathbf{a}$, *такая, что* $\mathbf{b}' \leq \mathbf{a}'$ *и для любого линейного порядка* $\mathfrak{L}$

$$\mathbf{a} \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{L}) \implies \mathbf{b} \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{L}).$$

Отметим, что если линейный порядок $\mathfrak{L}$ поставить в начало данного утверждения, то есть от схемы «$\forall\mathbf{a}\exists\mathbf{b}\forall\mathfrak{L}\ldots$» перейти к «$\forall\mathfrak{L}\forall\mathbf{a}\exists\mathbf{b}\ldots$», то получим более слабое утверждение, известное из работы Рихтер [16] (теорема 7.3).

Фиксируя теперь произвольную низкую степень $\mathbf{a} > \mathbf{0}$, получаем:

Следствие 10.2. *Существует низкие несравнимые степени* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$, *такие, что не существует линейного порядка* $\mathfrak{L}$, *для которого имеет место* $\mathbf{a} \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{L})$ *и* $\mathbf{b} \notin \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{L})$.

Следствие 10.3. *Существует такая низкая степень* $\mathbf{b}$, *что*

$$\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{L}) \neq \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leq \mathbf{b}\}$$

для всех счетных линейных порядков $\mathfrak{L}$.

Доказательство теоремы 10.1. Найт [12] было показано, что, если $\mathbf{b} < \mathbf{a}$, то существует линейный порядок $\mathfrak{L}$, для которого $\mathbf{a} \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{L})$ и $\mathbf{b} \notin \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{L})$. По этой причине мы не будем заботиться об условии $\mathbf{b} \not< \mathbf{a}$.

Кроме того, вместо рассмотрения всех линейных порядков $\mathfrak{L}$ таких, что $\mathbf{a} \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{L})$, достаточно рассмотреть порядки вида $\langle W, <_\eta \rangle$, где $<_\eta$ — фиксированный вычислимый плотный линейный порядок на ω без наибольшего и наименьшего элементов (то есть порядок, изоморфный упорядочению рациональных чисел), а $W \subseteq \omega$ — произвольное $\mathbf{a}$-в.п. множество (вычислимо перечислимое относительно $\mathbf{a}$).

Фиксируем множество $A \in \mathbf{a}$. Требования на множество $B \in \mathbf{b}$ имеют вид:

$I_e : \langle B^{(n(e))}, <_\eta \rangle \cong \langle W_e^A, <_\eta \rangle$ посредством измоорфизма g^e (где $n : \omega \to \omega$ — некоторая функция, а $B^{(n(e))} = \{x : \langle n(e), x \rangle \in B\}$), и

$N_e : \chi_A \neq \Phi_e^B$, для всех $e \in \omega$.

Здесь W_e^A, $e \in \omega$ — геделева нумерация всех A-в.п. множеств, а Φ_e, $e \in \omega$ — геделева нумерация всех тьюринговых операторов.

Множество B будет определено через последовательность $\{0,1\}$-значных частичных функций $\{\beta_s\}_{s \in \omega}$, такую, что $\beta_s \subseteq \beta_{s+1}$ для каждого s и $\chi_B = \cup_{s \in \omega} \beta_s$. Тогда $B = \mathcal{S}(\chi_B) = \mathcal{S}(\cup_{s \in \omega} \beta_s) = \cup_{s \in \omega} \mathcal{S}(\beta_s)$.

Кроме того, каждую строку конечной длины, состоящую из символов 0 и 1, будем отождествлять с соответствующей $\{0,1\}$-значной функцией, определенной на начальном отрезке ω. Множество всех таких строк обозначается через $2^{<\omega}$.

Предположим, что значение $n(e) \in \omega$ определено для некоторого $e \in \omega$. Пусть $\alpha \subseteq \beta$ — такие $\{0,1\}$-значные частичные конечные функции, причем существует вложение ψ^e порядка $\langle \mathcal{S}(\alpha)^{(n(e))}, <_\eta \rangle$ в порядок $\langle W_e^A, <_\eta \rangle$. Будем говорить, что β является *e-расширением α относительно ψ^e*, если вложение ψ^e можно продолжить до вложения φ^e порядка $\langle \mathcal{S}(\beta)^{(n(e))}, <_\eta \rangle$ в порядок $\langle W_e^A, <_\eta \rangle$.

Нетрудно заметить, что для фиксированных α и ψ^e предикат "β является e-расширением α относительно ψ^e" A-в.п. (равномерно относительно α и ψ^e). С другой стороны, этот же предикат будет (неравномерно) вычислим, поскольку вычислим каждый экзистенциональный тип линейного порядка.

На каждом шаге s нашего построения значения $n(e)$ будут определены только для $e < s/2$. Кроме того, для каждого $e < s/2$ будет определено вложение ψ_s^e порядка $\langle \mathcal{S}(\beta_s)^{(n(e))}, <_\eta \rangle$ в порядок $\langle W_e^A, <_\eta \rangle$, которое будет продолжено на следующем шаге $s+1$ вложением ψ_{s+1}^e. (Функция $\cup_s \psi_s^e$ будет требуемым изоморфизмом g^e для I_e). Будем говорить для краткости, что β является *подходящим расширением* *на шаге* $s+1$, если $\beta_s \subseteq \beta$ и β есть e-расширение β_s относительно ψ_s^e для всех $e < s/2$. Таким образом, β_{s+1} является одним из подходящих расширений на шаге $s+1$, так же как и каждая β_t при $t > s$.

Для удовлетворения требования N_e на шаге $s+1$ нам нужно попытаться найти (используя A'-оракул) такую строку σ, что $\beta_s \cup \sigma$ существует и является подходящим расширением на шаге $s+1$, причем $\Phi_e^\sigma(x) \downarrow \neq \chi_A(x)$ для некоторого x. Если такой σ существует, то достаточно определить $\beta_{s+1} = \beta_s \cup \sigma$, расширяя каждое вложение ψ_s^i, $i < s/2$, до вложения $\psi_{s+1}^i : \mathcal{S}(\beta_{s+1})^{(n(i))} \to W_i^A$ (существующего в силу того, что $\beta_s \cup \sigma$ — подходящее). В этом случае мы безусловно выполняем требование N_e. Если такой строки σ не существует, то требование N_e будет выполнено автоматически. Действительно, предположим, что $\chi_A = \Phi_e^B$. Тогда, в противоречии с условиями теоремы A будет вычислимым. Для вычисления $\chi_A(x)$ для произвольного x достаточно найти строку σ, такую, что $\beta_s \cup \sigma$ является подходящим расширением на шаге $s+1$ (это вычислимый предикат!), и $\Phi_e^\sigma(x) \downarrow$. Тогда для такого σ будет иметь место $\chi_A(x) = \Phi_e^\sigma(x)$.

Наше построение будет A'-вычислимым. Отсюда следует, что требования $R_e, e \in \omega$, обеспечивают условие $B' \leq_T A'$:

$R_e : (\exists s)[(\exists \sigma \subseteq \beta_s)[\Phi_e^\sigma(e) \downarrow] \vee (\forall \sigma)[\sigma$ — подходящее расширение на шаге $s+1 \implies \Phi_e^\sigma(e) \uparrow]]$.

Здесь переменная σ действует на множестве $2^{<\omega}$ всех строк конечной длины состоящих из символов 0 и 1.

В самом деле, зная A', мы можем эффективно найти шаг s такой, что либо для некоторого $\sigma \subseteq \beta_s$ имеет место $\Phi_e^\sigma(e) \downarrow$ для некоторого s, либо $\Phi_e^\sigma(e) \uparrow$ для всех σ, являющихся подходящими расширениями на шаге $s+1$ (последнее условие равномерно A-в.п.!). В первом случае имеет место $e \in B'$, во втором — $e \notin B'$.

Построение.

Шаг $s = 0$. Значение функция $n(e)$ пока не определено ни для одного $e \in \omega$. Функции β_0 и ψ_0^e, $e \in \omega$, являются пустыми (нигде не определенные) функциями.

Шаг $s+1 = 2e+1$. (Выполнение требований I_i, $i \leq e$).

Пусть k — достаточно большое число, такое, что значение $\beta_s(\langle k, y\rangle)$ не определено ни для одного $y \in \omega$. Полагаем $n(e) = k$. Для каждого $i \leq e$ найдем наименьшее число w_i, такое, что $w_i \in W_e^A - \mathrm{rng}\,(\psi_s^i)$. Если такого w_i не существует, то считаем w_i неопределенным. Если w_i определено, фиксируем такое число b_i, что $\beta_s(\langle n(i), b_i\rangle)$ не определено, и $<_\eta$-изоморфизм $\psi_s^i \mid \mathcal{S}(\beta_s)^{(n(i))} \to \mathrm{rng}\,(\psi_s^i)$ можно продолжить до изоморфизма между $\langle \{b_i\} \cup \mathcal{S}(\beta_s)^{(n(i))}, <_\eta\rangle$ и $\langle \{w_i\} \cup \mathrm{rng}\,(\psi_s^i), <_\eta\rangle$ (такое b_i найдется, поскольку $<_\eta$ — плотный линейный порядок без концевых точек). Полагаем

$$\beta_{s+1} = \beta_s \cup \{\langle\langle n(i), b_i\rangle, 1\rangle \mid i \leq e \text{ и } w_i \text{ определено}\},$$

$$\psi_{s+1}^i = \psi_s^i \cup \{\langle b_i, w_i\rangle\}, \text{ если } i \leq e \text{ и } w_i \text{ определено, и}$$

$$\psi_{s+1}^i = \psi_s^i \text{ в противном случае.}$$

Stage $s+1 = 2e+2$. (Выполнение N_e).

Случай 1. Существует такая строка σ, что $\beta_s \cup \sigma$ существует и является подходящим расширением на шаге $s+1$, и $\Phi_e^\sigma(x)\downarrow \neq \chi_A(x)$ для некоторого x (истинность данного утверждения можно установить с помощью A'-оракула). Фиксируем такую строку σ. Тогда для каждого $i \leq e$ существует вложение φ_s^i из $\langle \mathcal{S}(\beta_s \cup \sigma)^{(n(i))}, <_\eta\rangle$ в $\langle W_i^A, <_\eta\rangle$, продолжающее вложение ψ_s^i. Определим $\beta_{s+1} = \beta_s \cup \sigma$, $\psi_{s+1}^i = \varphi_s^i$ для $i \leq e$, и оставляем ψ_{s+1}^i пустыми при $i > e$.

Случай 2. В противном случае. Полагаем $\beta_{s+1} = \beta_s$ и $\psi_{s+1}^i = \psi_s^i$ для всех $i \in \omega$.

Описание построения завершено.

Отметим, что длины строк σ, для которых имеет место случай 1 на четных шагах, могут быть неограниченно большими, поскольку для каждого $m \in \omega$ существсвует индекс $e(m)$, для которого имеет место

$$\Phi_{e(m)}^\sigma(x)\downarrow \iff \Phi_{e(m)}^\sigma(x)\downarrow = 1 - \chi_A(0) \iff x = 0 \text{ и } |\sigma| > m.$$

Следовательно, $\cup_s \psi_s$ является всюду определенной функцией, так что $\chi_B = \cup_s \psi_s$ для некоторого множества B. В силу рассуждений, предшествующих построению, каждое N_e-требование выполнено.

Нечетные шаги построения описаны таким образом, что для каждого $e \in \omega$ функция $g^e = \cup_s \psi_s^e$ осуществляет изоморфизм между порядками $\langle B^{(n(e))}, <_\eta\rangle$ и $\langle W_e^A, <_\eta\rangle$.

Для того, чтобы установить $B' \leq_T A'$, достаточно показать, что каждое R_e-требование выполнено. Пусть $k(e)$ — такой индекс, что

$$\Phi^\sigma_{k(e)}(x)\downarrow \iff \Phi^\sigma_{k(e)}(x)\downarrow = 1 - \chi_A(0) \iff x = 0 \text{ и } \Phi^\sigma_e(e)\downarrow .$$

Рассмотрим шаг $2k(e)+2$. В случае 1 имеем $\Phi^\sigma_e(e)\downarrow$ для некоторого $\sigma \subseteq \beta_{s+1}$, что влечет истинность R_e по первому дизъюнкту. В случае 2 $\Phi^\sigma_e(e)\uparrow$ для всех подходящих расширений σ на шаге $s+1$, т.е. R_e выполнено по второму дизъюнкту. □

11 Спектры степеней систем произвольной сигнатуры

Теперь мы попытаемся усиливает известный «фольклорный» результат (теорема 7.1) таким же образом, как теорема 10.1 усиливает результат Рихтер [16] (теорема 7.3). Кроме того, вместо двух несравнимых степеней в следующей теореме речь идет о произвольной совокупности степеней без наименьшего элемента.

Теорема 11.1. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— непустая счетная совокупность степеней, в которой нет наименьшего элемента. Тогда существует такая степень* $\mathbf{b}$*, что* $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{b}$ *для всех* $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$*, и*

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A}) \implies \mathbf{b} \in \mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A})$$

для произвольной алгебраической структуры $\mathfrak{A}$*.*

Данная теорема не дает нам хорошей оценки алгоритмической сложности степени $\mathbf{b}$ (хотя в следствии 8.2 мы имели очень хорошую оценку $\mathbf{c}' \leq \mathbf{a}'$). Поэтому расположенное ниже следствие также не дает нам никакой дополнительной информации о степенях $\mathbf{b}$ с указанным свойством (см. замечание в конце этого параграфа и результаты следующего параграфа).

Следствие 11.2. *Существует такая степень* $\mathbf{b}$*, что*

$$\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A}) \neq \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leq \mathbf{b}\}$$

для всех алгебраических структур $\mathfrak{A}$*.*

Доказательство. Фиксируем произвольные несравнимые степени $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$. Применяем теорему 11.1 при $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}, \mathbf{c}\}$. $\square$

Доказательство теоремы 11.1. Следуя [10] и [11], вместо всех алгебраических структур $\mathfrak{A}$ достаточно рассмотреть только неориентированные графы $\langle V, R\rangle$ без петель (т.е. бинарное отношение R симметрично и иррефлексино), где носитель $V \subseteq \omega$ — произвольное множество, а вычислимое отношение R фиксировано таким, что $\langle \omega, R\rangle$ является *случайным* графом. Например, можем положить $R(m,n) \overset{dfn}{\Longleftrightarrow}$ по крайней мере одно из чисел $\left[\frac{m}{2^n}\right]$ и $\left[\frac{n}{2^m}\right]$ нечетно (что эквивалентно $n \in D_m$ или $m \in D_n$ для канонической нумерации $\{D_n\}_{n\in\omega}$ всех конечных множеств). Легко проверить, что для каждой пары непересекающихся конечных множеств $X, Y \subseteq \omega$ существует $z \in \omega$, такое, что $R(x,z)$ и $\neg R(y,z)$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$, то есть граф $\langle \omega, R\rangle$ случаен.

Пусть $\langle V_0, R\rangle, \langle V_1, R\rangle, \langle V_2, R\rangle, \ldots$ — все графы с точностью до изоморфизма, такие, что $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Sp}\,(\langle V_e, R\rangle), e \in \omega$. Предположим также, что $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots\}$ и $A_i \in \mathbf{a}_i$ для каждого $i \in \omega$. Построим множество B, удовлетворяя требованиям $\{I_e\}_{e\in\omega}$ и $\{N_{e,j}\}_{e,j\in\omega}$:

$I_e : \langle B^{(n(e))}, R\rangle \cong \langle V_e, R\rangle$ посредсвом изоморфизма g^e (для некоторой фукции n),

$N_{e,j} : \chi_{A_j} \neq \Phi_e^B$.

Как и при доказательстве теоремы 10.1 будем строить B и g^e, $e \in \omega$, с помощью монотонных последовательностей конечиных частичных функций: $\chi_B = \cup_s \beta_s$ и $g^e = \cup_s \psi_s^e$.

Будем теперь говорить, что β является *подходящим расширением на шаге* $s+1$, если $\beta_s \subseteq \beta$, и для каждого $e < s/2$ вложение

$$\psi_s^e : \langle \mathcal{S}(\beta_s)^{(n(e))}, R\rangle \to \langle V_e, R\rangle$$

может быть продолжено до вложения

$$\varphi_s^e : \langle \mathcal{S}(\beta)^{(n(e))}, R\rangle \to \langle V_e, R\rangle.$$

Поскольку $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Sp}\,(\langle V_e, R\rangle)$ для всех $e \in \omega$, для каждого фиксированного s предикат «β является подходящим расширением на шаге $s+1$» вычислимо перечислим относительно каждой степени $\mathbf{a}_j \in \mathbf{A}$, $i \in \omega$.

Построение, описанное ниже, является всего лишь подходящей модификацией построения из доказательства теоремы 10.1. В частности, выполнение всех I_e-требований будет теперь очевидным.

Построение.

Шаг $s = 0$. Полагаем $n(e)$ не определенным ни для какого $e \in \omega$. Функции β_0 и ψ_0^e, $e \in \omega$, пусты (нигде не определены).

Шаг $s + 1 = 2e + 1$. (Выполнение требований I_i, $i \leq e$).

Пусть k — достаточно большое число такое, что значение $\beta_s(\langle k, y\rangle)$ не определено ни для одного $y \in \omega$. Определим $n(e) = k$. Для каждого $i \leq e$ найдем наименьшее число w_i такое, что $w_i \in W_e^A - \mathrm{rng}\ (\psi_s^i)$. Если такого w_i не существует, то w_i не определено. Если w_i определено, фиксируем такое число b_i, что $\beta_s(\langle n(i), b_i\rangle)$ не определено, и R-изоморфизм $\psi_s^i : \mathcal{S}(\beta_s)^{(n(i))} \to \mathrm{rng}\ (\psi_s^i)$ можно продолжить до изоморфизма между $\langle \{b_i\} \cup \mathcal{S}(\beta_s)^{(n(i))}, R\rangle$ и $\langle \{w_i\} \cup \mathrm{rng}\ (\psi_s^i), R\rangle$ (такое b_i найдется, поскольку $\langle \omega, R\rangle$ — случайный граф). Полагаем

$$\beta_{s+1} = \beta_s \cup \{\langle\langle n(i), b_i\rangle, 1\rangle : i \leq e \text{ и } w_i \text{ определено}\},$$

$$\psi_{s+1}^i = \psi_s^i \cup \{\langle b_i, w_i\rangle\}, \text{ если } i \leq e \text{ и } w_i \text{ определено, и}$$
$$\psi_{s+1}^i = \psi_s^i \text{ в противном случае.}$$

Stage $s + 1 = 2e + 2$. (Выполнение N_e).

Случай 1. Существует такая строка σ, что $\beta_s \cup \sigma$ существует и является подходящим расширением на шаге $s + 1$, и $\Phi_e^\sigma(x) \downarrow\neq \chi_{A_j}(x)$ для некоторого x. Фиксируем такую строку σ. Тогда для каждого $i \leq \langle e, j\rangle$ существует вложение φ_s^i из $\langle \mathcal{S}(\beta_s \cup \sigma)^{(n(i))}, R\rangle$ в $\langle W_i^A, R\rangle$, продолжающее вложение ψ_s^i. Определим $\beta_{s+1} = \beta_s \cup \sigma$, $\psi_{s+1}^i = \varphi_s^i$ для $i \leq \langle e, j\rangle$. Оставляем ψ_{s+1}^i пустыми при $i > \langle e, j\rangle$.

Случай 2. В противном случае. Полагаем $\beta_{s+1} = \beta_s$ и $\psi_{s+1}^i = \psi_s^i$ для всех $i \in \omega$.

Описание построения завершено.

Теперь мы докажем, что каждое $N_{e,j}$-требование действительно выполнено. Если на шаге $s + 1 = 2\langle e, j\rangle + 2$ имеет место случай 1, то $N_{e,j}$, очевидно, выполнено. Предположим, что на шаге

$s+1 = 2\langle e,j\rangle+2$ имеет место случай 2 и $\chi_{A_j} = \Phi^B_e$. Тогда для каждого $x\in\omega$ выполнено $\chi_{A_j}(x) = \Phi^\sigma_e(x)$, где σ — произвольная строка такая, что $\Phi^\sigma_e(x)\downarrow$ и $\beta_s\cup\sigma$ является подходящим раширением на шаге $s+1$. Поскольку последнее условие вычислимо перечислимо относительно любого элемента $\mathbf{A}$, степень $\mathbf{a}_j = \deg(A_j)$ является наименьшим элементом $\mathbf{A}$, в противоречии с условиями теоремы. □

Замечание. Пусть совокупность $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\dots\}$ удовлетворяет условиям теоремы 11.1, причем для степени $\mathbf{m} = \deg(M)$ существует вычислимая функция f такая, что $\Phi^M_{f(i)}\in\mathbf{a}_i$ для всех i (другими словами, $\mathbf{A}$ равномерно вычислимо относительно $\mathbf{m}$). Заметим, что доказательство теоремы остается корректным, если семейство $\mathcal{V} = \{V_e\}_{e\in\omega}$ заменить на более широкое семейство $\widehat{\mathcal{V}}$, состоящее из всех $\mathbf{a}_0$-в.п. множеств $\widehat{V}$, таких что любой экзистенциональный тип графа $\langle\widehat{V},R\rangle$ является в.п. относительно каждого $\mathbf{a}_i$, $i>0$. Нетрудно показать, что имеется равномерное $\mathbf{m}'''$-вычислимое перечисление $\{\widehat{V}_e\}_{e\in\omega}$ семейства $\widehat{\mathcal{V}}$. Тогда в теореме 11.1 можно указать оценку $\mathbf{b}\le\mathbf{m}^{(4)}$ и, следовательно, оценку $\mathbf{b}\le\mathbf{0}^{(4)}$ в следствии 11.2. В следующем параграфе последняя оценка будет улучшена до $\mathbf{b}\le\mathbf{0}''$.

12 Построение степени $\mathbf{b}\le\mathbf{0}''$ для которой совокупность $\{\mathbf{x}\mid\mathbf{x}\not\le\mathbf{b}\}$ не является спектром

Докажем теперь следующую теорему, являющейся более слабым утверждением, чем теорема 11.1, если не обращать внимание на имеющуюся оценку степени $\mathbf{b}$ сверху.

Теорема 12.1. *Для любой степени $\mathbf{a}>\mathbf{0}$ существует степени $\mathbf{b}\le\mathbf{a}''$ и $\mathbf{c}\le\mathbf{a}''$, такие, что $\mathbf{a}\not\le\mathbf{b}$, $\mathbf{c}\not\le\mathbf{b}$, и для любой алгебраической структуры $\mathfrak{A}$*

$$\{\mathbf{a},\mathbf{c}\}\subseteq\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A}) \implies \mathbf{b}\in\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A}).$$

Следствие 12.2. *Существует такая степень $\mathbf{b}\le\mathbf{0}''$, что*

$$\mathbf{Sp}\,(\mathfrak{A})\ne\{\mathbf{x}\mid\mathbf{x}\not\le\mathbf{b}\}$$

для всех алгебраических структур $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Фиксируем произвольную степень $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ такую, что $\mathbf{a}' = \mathbf{0}'$, и применяем теорему 12.1. $\square$

Доказательство теоремы 12.1. Пусть $A \in \mathbf{a} > \mathbf{0}$. В качестве степени $\mathbf{c}$ возьмем произвольную ненулевую степень $\mathbf{c} = \deg(C) \leq \mathbf{a}''$, такую, что для всех множеств $W \subseteq \omega$ имеет место

$$W \text{ в.п.} \iff W \text{ в.п. относительно } A \text{ и } W \text{ в.п. относительно } C.$$

Известно (см. [13], [21] и теорему 12.3), что такие степени $\mathbf{c} = \deg(C) \leq \mathbf{a}''$ существуют. Тогда индексное множество

$$\{e : W_e^A \text{ в.п. относительно } C\} = \{e \mid W_e^A \text{ в.п.}\} = \{e \mid (\exists j)[W_e^A = W_j]\}$$

принадлежит классу $\Sigma_3^A = \Sigma_1^{A''}$ и, следовательно, существует частично A''-вычислимая функция θ, такая, что для всех $e \in \omega$

$$W_e^A \text{ в.п. относительно } C \iff \theta(e)\downarrow \iff W_e^A = W_{\theta(e)}.$$

Фиксируем некоторое A''-вычисление θ, т.е. $\theta = \cup_s \theta_s$, $\theta_s \subseteq \theta_{s+1}$ для всех s, причем предикаты $\theta_s(x)\downarrow$ и $\theta_s(x)\downarrow= y$ являются A''-вычислимыми равномерно по s.

Заметим также, что из выбора степени $\mathbf{c}$ в частности следует, что $\mathbf{a} \cap \mathbf{c} = \mathbf{0}$, и, поэтому, степени множеств A и C несравнимы. Для доказательства теоремы достаточно построить множество $B \leq_T A''$, выполняя требования для всех $e \in \omega$:

$I_e : \deg(C) \in \mathbf{Sp}\,(\langle W_e^A, R\rangle) \Longrightarrow (\exists n)[\langle B^{(n)}, R\rangle \cong \langle W_e^A, R\rangle]$,

$R_e : \chi_C \neq \Phi_e^B$,

$N_e : \chi_A \neq \Phi_e^B$.

Здесь отношение R такое же, как и при доказательстве теоремы 11.1.

Для выполнения требования I_0 необходимо фиксировать некоторое n_0 (например, равное нулю) и построить изоморфизм $g_0 = \cup_s \psi_s^0$ между графами $\langle B^{(n_0)}, R\rangle$ и $\langle W_0^A, R\rangle$ тем же способом, что и в теоремах 10.1 и 11.1.

По аналогии, для того, чтобы выполнить R_0 на шаге $s+1$, рассмотрим все *подходящие расширения* β *на шаге* $s+1$, т.е. такие β, что $\beta_s \subseteq \beta$ и вложение $\psi^0_s : \langle \mathcal{S}(\beta_s)^{(n_0)}, R\rangle \to \langle W^A_0, R\rangle$ можно продолжить до вложения $\varphi^0_s : \langle \mathcal{S}(\beta)^{(n_0)}, R\rangle \to \langle W^A_0, R\rangle$. Множество таких подходящих расширений вычислимо перечислимо относительно A. Более того, если шаг s и конечная частичная функция β_s известны, то можем эффективно указать такой индекс $a(s)$, что $W^A_{a(s)}$ является множеством всех подходящих расширений на шаге $s+1$. Отметим также, что если $s < t$ и $\mathcal{S}(\beta_s) = \mathcal{S}(\beta_t)$, то

$$W^A_{a(t)} = \{\beta \in W^A_{a(s)} \mid \beta_t \subseteq \beta\}.$$

Поскольку множество подходящих расширений вычислимо перечислимо относительно A, нет никаких препятствий в выполнении требования R_0: достаточно попытаться найти два подходящих расширения $\gamma_0 \in 2^{<\omega}$ и $\gamma_1 \in 2^{<\omega}$ на шаге $s+1$ (используя лишь A'-оракул), такие, что $\Phi^{\gamma_0}_0(x)\downarrow \neq \Phi^{\gamma_1}_0(x)\downarrow$ для некоторого x. Если такие расширения найдутся, мы просто определяем $\beta_{s+1} = \gamma_i$ при таком $i \in \{0,1\}$, что $\Phi^{\gamma_i}_0(x) \neq \chi_C(x)$. В противном случае, то есть если таких γ_0 and γ_1 не существует, предположение $\chi_C = \Phi^B_0$ влечет равенство $\chi_C(x) = \Phi^{\gamma}_0(x)$ для любого подходящего расширения γ на шаге $s+1$, для которого имеет место $\Phi^{\gamma}_0(x)\downarrow$. Отсюда немедленно следует $C \leq_T A$, что противоречит выбору C.

Таким простым способом, однако, невозможно выполнить требование N_0, поскольку здесь мы можем получить заведомо верную сводимость $A \leq_T A$ вместо заведомо ложной сводимости $C \leq_T A$. Теперь нам необходимо воспользоваться функцией θ. Если предположение $\deg(C) \in \mathbf{Sp}\left(\langle W^A_0, R\rangle\right)$ из требования I_0 имеет место, то значение $\theta(a(s))$ должно быть определено и $W^A_{a(s)} = W_{\theta(a(s))}$, где $W^A_{a(s)} = W_{\theta(a(s))}$ — множество всех подходящих расширений на шаге $s+1$. Если мы можем удостовериться в этом на том же шаге $s+1$ (т.е. если $\theta_{s+1}(a(s))$ определено), то можем выполнить требование R_0 немедленно, поскольку мы уверены в том, что множество подходящих расширений на шаге $s+1$ вычислимо перечислимо, а сводимость $A \leq_T \emptyset$ не имеет места.

Если $\theta_{s+1}(a(s))$ неопределено, то на следующих шагах $t > s+1$ мы не будем увеличивать множество $\mathcal{S}(\beta_t)^{(n_0)}$ до тех пор, пока не получим $\theta_t(a)\downarrow$ (в это время мы будем определять лишь нулевые новые значения для β_t на числах вида $\langle n_0, y\rangle$). Кроме того, пока $\theta_t(a(s))$

не определено, мы пытаемся удовлетворить N_0 альтернативной стратегией, для которой множество возможных («подходящих») расширений есть просто множество всех расширений $\beta \supseteq \beta_s$, таких, что $\mathcal{S}(\beta) = \mathcal{S}(\beta_s)$.

Тогда, в случае неопределеннности $\theta(a(s))$ требование I_0 выполнено (поскольку его левая часть не имеет места), а требование N_0 выполнено посредством альтернативной стратегии.

Если же $\theta_t(a)$ определено на некотором шаге $t > s$, то альтернативная N_0-стратегия может не привести к успеху (поскольку она работает со слишком узким классом «подходящих» раширений), но исходная N_0-стратегия теперь обязана быть успешной на шаге t, поскольку мы точно знаем, что множество $W^A_{a(s)}$ и, следовательно, множество

$$W^A_{a(t-1)} = \{\beta \in W^A_{a(s)} \mid \beta_{t-1} \subseteq \beta\}$$

вычислимо перечислимы. Отметим, что исходная N_0-стратегия может увеличить множество $\mathcal{S}(\beta_t)$ (т.е. $\mathcal{S}(\beta_t) - \mathcal{S}(\beta_s) \neq \emptyset$). По этой причине для удовлетворения N_1 мы должны начать вычисление $\theta(a(t))$ для множества $W^A_{a(t)}$ подходящих расширений на шаге $t+1$. Пока $\theta(a(t))$ не определено, мы опять пытаемся выполнить $N_0, N_1, N_2, \ldots$ альтернативными стратегиями, предполагающими, что в множество $\mathcal{S}(\beta_t)$ новые элементы никогда больше не попадут.

Таким образом, можем выделить два *выхода* для I_0-стратегии. Первый выход (обозначим его через 0) соответствует случаю, когда для каждого расширения β_s (сделанного либо некоторой N-стратегией, либо самой I_0-стратегией в целях сюрьективности g_0) значение $\theta(a(s))$ определено. Второй выход (выход 1) имеет место, когда $\theta(a(s))$ не определено для некоторого s.

Второй выход конечен (начиная с некоторого шага певый выход не будет нам казаться вероятным), причем множество $B^{(n_0)}$ будет конечным. Этот выход обеспечивает выполнение требования I_0 за счет ложности его левой части.

Первый выход бесконечен (мы будем вынуждены инициализировать бесконечно часто N-стратегии, предполагающие конечный выход). В этом случае мы сможем выполнить требование I_0 и все N-требования тем же способом, что и при доказательстве теоремы 11.1 (но используя лишь A''-оракул).

Теперь совместная работа всех I-, R-, и N-требований может быть формализована A''-вычислимым построением, использующим бинарное приоритетное дерево стратегий T. А именно, в качестве T возьмем множество $2^{<\omega}$ всех строк конечной длины, состоящих из символов 0 и 1. Длину строки $\sigma \in T$ будем обозначать через $|\sigma|$. Кроме того, будут использоваться следующие стандартные упорядочения на T:

$$\sigma <_L \tau \stackrel{def}{\iff} (\exists \rho \in T)[\rho 0 \subseteq \sigma \text{ и } \rho 1 \subseteq \tau],$$

$$\sigma < \tau \stackrel{def}{\iff} \sigma <_L \tau \text{ или } \sigma \subset \tau.$$

Каждую строку $\sigma \in T$ свяжем с некоторой стратегией выполнения требований $I_{|\sigma|}$, $R_{|\sigma|}$ и $N_{|\sigma|}$.

Для выполнения I-стратегии строки σ на каждом шаге s построения будет определено значение $n_s(\sigma)$, причем данная стратегия будет пытаться установить изоморфизм $\psi^\sigma : \langle B^{(n(\sigma))}, R\rangle \cong \langle W^A_{|\sigma|}, R\rangle$, где $n(\sigma) = \lim_s n_s(\sigma)$.

По s-m-n теореме можем фиксировать вычислимую функцию $\widehat{a}(\psi, n, e)$, такую, что для всех $n, e \in \omega$ и конечной функциии ψ (заданной своим каноническим номером) множество $W^A_{\widehat{a}(\psi,n,e)}$ состоит в точности из (канонических номеров) конечных $\{0, 1\}$-значных функций β, таких, что

$$(\exists \varphi \supseteq \psi)[\varphi \text{ — изоморфное вложение из } \langle \mathcal{S}(\beta)^{(n)}, R\rangle \text{ в } \langle W^A_e, R\rangle].$$

Для строки $\sigma \in T$ и шага $s \in \omega$ определим

$$a(\sigma, s) = \widehat{a}(\psi^\sigma_s, n_s(\sigma), |\sigma|),$$

где ψ^σ_s — конечная часть ψ^σ, построенная на шаге s. Отметим, что если $n_s(\sigma) = n_t(\sigma)$ и $\psi^\sigma_s = \psi^\sigma_t$, то, очевидно, $a(\sigma, s) = a(\sigma, t)$.

Кроме того, в процессе построения для каждой строки $\sigma \in T$ будут определены $\{0, 1\}$-значные параметры $R_s(\sigma), N_s(\sigma)$, показывающие степень выполнения соответственно R- и N-стратегии строки σ на шаге s (0 — выполнено, 1 — не выполнено).

Параметр $\delta_s \in T$ будет аппроксимировать истинный путь построения, проходящий через истинные выходы I-стратегий. Для шага s параметр $\zeta_s \in T$, $\zeta_s \subseteq \delta_s$ отмечает строку, для которой либо определяется новое значение $n_s(\zeta_s)$, либо выполняются R- или N-стратегии строки ζ_s. Наконец параметр β_s аппроксимирует множество B, т.е. $\cup_s \beta_s = \chi_B$.

Построение.

Инициализация строки σ на шаге s означает, что значение $n_s(\sigma)$ становится неопределенным, функция $\psi_s(\sigma)$ становится нигде не определенной (пустой), параметры $R_s(\sigma)$ и $N_s(\sigma)$ устанавливаются нулевыми.

Шаг $s = 0$. Полагаем β_0 равной пустой функции. Строки δ_0 и ζ_0 также пусты. Все строки инициализированы на этом шаге.

Шаг $s + 1 = 3s' + 1$. Строка $\delta_{s+1} \in T$ однозначно определяется из условий:

1) Для всех $\sigma \subset \delta_{s+1}$ значение $n_s(\sigma)$ определено, причем соотношение $\sigma 0 \subseteq \delta_{s+1}$ имеет место тогда и только тогда, когда определено значение $\theta_s(a(\sigma, s))$ (в противном случае $\sigma 1 \subseteq \delta_{s+1}$).

2) $n_s(\delta_{s+1})$ не определено.

Пусть $\zeta_{s+1} \subseteq \delta_{s+1}$ — строка из T наименьшей длины, такая, что либо $n_s(\zeta_{s+1})$ не определено, либо $R_s(\zeta_{s+1}) = 0$, либо $N_s(\zeta_{s+1}) = 0$.

Инициализируем на шаге $s + 1$ все строки σ такие, что $\zeta_{s+1} < \sigma$.

Если $n_s(\zeta_{s+1})$ не определено (то есть $\zeta_{s+1} = \delta_{s+1}$), то полагаем $n_{s+1}(\zeta_{s+1})$ равным наименьшему $y \in \omega$, для которого $\mathcal{S}(\beta_s)^{(y)} = \emptyset$. Остальные (еще не упомянутые) параметры β_{s+1}, $n_{s+1}(\sigma)$, ψ^σ_{s+1}, $R_{s+1}(\sigma)$ и $N_{s+1}(\sigma)$, где $\sigma \leq \zeta_{s+1}$, оставляем такими же, как на шаге s.

Предположим теперь, что $n_s(\zeta_{s+1})$ определено (то есть $\zeta_{s+1} \subset \delta_{s+1}$) Назовем конечную $\{0, 1\}$-значную функцию β *подходящим расширением на шаге* $s+1$, если $\beta_s \subseteq \beta$ и для всех $\sigma \subseteq \zeta_{s+1}$ имеет место либо $\sigma 0 \subseteq \delta_{s+1}$ и $\beta \in W^A_{a(\sigma,s)}$, либо $\sigma 1 \subseteq \delta_{s+1}$ и $\mathcal{S}(\beta)^{(n_s(\sigma))} = \mathcal{S}(\beta_s)^{(n_s(\sigma))}$.

Выясним, существуют ли два подходящих расширения $\gamma_0 \in 2^{<\omega}$ и $\gamma_1 \in 2^{<\omega}$ на шаге $s + 1$, такие, что $\Phi^{\gamma_0}_{|\zeta_{s+1}|}(x) \downarrow \neq \Phi^{\gamma_1}_{|\zeta_{s+1}|}(x) \downarrow$ для некоторого x. Если таких расширений нет, то полагаем $\beta_{s+1} = \beta_s$ и $\psi^\sigma_{s+1} = \psi^\sigma_s$ для всех $\sigma \leq \zeta_{s+1}$.

Если такие расширения найдутся, то определяем $\beta_{s+1} = \gamma_i$ при таком выборе $i \in \{0, 1\}$, что $\Phi^{\gamma_i}_{|\zeta_{s+1}|}(x) \neq \chi_C(x)$, если $R_s(\zeta_{s+1}) = 0$, и $\Phi^{\gamma_i}_{|\zeta_{s+1}|}(x) \neq \chi_A(x)$, если $R_s(\zeta_{s+1}) = 1$ и $N_{s+1}(\zeta_{s+1}) = 0$. При этом

$\psi^\sigma_{s+1} = \psi^\sigma_s$, если $\sigma \le \zeta_{s+1}$ и $\sigma 0 \not\subseteq \delta_{s+1}$. Если же $\sigma \le \zeta_{s+1}$ и $\sigma 0 \subseteq \delta_{s+1}$, то полагаем ψ^σ_{s+1} равным некоторому расширению ψ^σ_s, являющимся изоморфным вложением из $\langle \mathcal{S}(\beta_{s+1})^{(n_s(\sigma))}, R\rangle$ в $\langle W^A_{|\sigma|}, R\rangle$ (такое расширение существует, поскольку $\beta_{s+1} \in W^A_{a(\sigma,s)}$).

Кроме того, $R_{s+1}(\zeta_{s+1}) = 1$ и $N_{s+1}(\zeta_{s+1}) = 0$, если $R_s(\zeta_{s+1}) = 0$, и $R_{s+1}(\zeta_{s+1}) = 1$ и $N_{s+1}(\zeta_{s+1}) = 1$, если $R_s(\zeta_{s+1}) = 1$ и $N_s(\zeta_{s+1}) = 0$.

Остальные (не упомянутые) параметры $n_{s+1}(\sigma)$, $R_{s+1}(\sigma)$ и $N_{s+1}(\sigma)$, где $\sigma \le \zeta_{s+1}$, оставляем такими же, как на шаге s.

Шаг $s+1 = 3s'+2$. Для каждого $\sigma \in T$, такого, что $\sigma 0 \subseteq \delta_s$, найдем наименьшее число w_σ, такое, что $w_\sigma \in W^A_{|\sigma|} - \mathrm{rng}\,(\psi^\sigma_s)$. Если такого w_σ не существует или $\sigma 0 \not\subseteq \delta_s$, то считаем, что w_σ не определено. Если w_σ определено, фиксируем такое число b_σ, что $\beta_s(\langle n_s(\sigma), b_\sigma\rangle)$ не определено, и R-изоморфизм $\psi^\sigma_s : \mathcal{S}(\beta_s)^{(n_s(\sigma))} \to \mathrm{rng}\,(\psi^\sigma_s)$ можно продолжить до изоморфизма между $\langle \{b_\sigma\} \cup \mathcal{S}(\beta_s)^{(n(\sigma))}, R\rangle$ и $\langle \{w_\sigma\} \cup \mathrm{rng}\,(\psi^\sigma_s), R\rangle$ (такое b_σ найдется, поскольку $\langle \omega, R\rangle$ — случайный граф). Полагаем

$$\beta_{s+1} = \beta_s \cup \{\langle\langle n(\sigma), b_\sigma\rangle, 1\rangle \mid \sigma \in T \text{ и } w_\sigma \text{ определено}\},$$

$$\psi^\sigma_{s+1} = \psi^\sigma_s \cup \{\langle b_\sigma, w_\sigma\rangle\}, \text{ если } \sigma \in T \text{ и } w_\sigma \text{ определено, и}$$

$$\psi^\sigma_{s+1} = \psi^\sigma_s \text{ в противном случае.}$$

Значения параметров $\delta_{s+1}, \zeta_{s+1}, n_{s+1}(\sigma), R_{s+1}(\sigma)$ и $N_{s+1}(\sigma)$, где $\sigma \in T$, оставляем такими же, как на шаге s.

Шаг $s+1 = 3s'+3$. Пусть z — наименьшее число, для которого $z \notin \mathrm{rng}\,\beta_s$. Полагаем $\beta_{s+1} = \beta_s \cup \{\langle z, 0\rangle\}$. Значения параметров δ_{s+1}, ζ_{s+1}, $n_{s+1}(\sigma)$, ψ^σ_s, $R_{s+1}(\sigma)$ и $N_{s+1}(\sigma)$, где $\sigma \in T$, оставляем такими же, как на шаге s.

Описание построения завершено.

По построению на шагах вида $3s'+3$ частичная функция $\cup_s \beta_s$ будет всюду определенной, и, значит для некоторого множества B выполняется $\chi_B = \cup_s \beta_s$. Поскольку построение является A''-вычислимым, имеем $B \le_T A''$.

Докажем, что множество B удовлетворяет всем I-, R- и N-требованиям. Для этого определим по индукции строку $\delta(e) \in T$

для каждого $e \in \omega$ следующим образом:

$$\delta(0) \text{ — пустая строка,}$$

$$\delta(e+1) = \begin{cases} \delta(e)0, & \text{если } (\forall t)(\exists s > t)[\delta(e)0 \subseteq \delta_s], \\ \delta(e)1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда для любого e множество шагов s таких, что $\delta_s <_L \delta(e)$, конечно.

Докажем по индукции, что для каждого e строка $\delta(e)$ инициализируется в ходе построения конечное число раз (что эквивалентно конечности множества шагов s, для которых $\zeta_s < \delta(e)$). Предположим, что это утверждение верно для всех $\delta(i)$, $i < e$. Тогда найдется шаг s_0, такой, что для всех $s > s_0$ строки $\delta(i)$, $i < e$, не инициализируется на шаге s, и $\delta_s \not<_L \delta(e)$. Тогда необходимо найдется шаг $s_1 > s_0$, такой, что для всех $s > s_0$ и $i < e$ значение $n_s(\delta(i))$ определено, и $R_s(\delta(i)) = N_s(\delta(i)) = 1$. Ясно, что строка $\delta(e)$ не может инициализироваться на шагах $s > s_1$.

Отсюда следует также, что для каждого e существуют предел $n(\delta(i)) = \lim_s n_s(\delta(i))$, и $\lim_s R_s(\delta(e)) = \lim_s N_s(\delta(e)) = 1$. Кроме того, для каждого e множество шагов s, для которых $\delta(e) \subseteq \delta_s$, бесконечно.

Теперь осталось доказать, что для каждого $e \in \omega$ работа I-, R- и N-стратегий строки $\delta(e)$ приводят к выполнению, требований I_e, R_e и N_e, соответственно.

Начнем с произвольного требования $I_e, e \in \omega$. Фиксируем шаг t_0, такой, что $\delta(e)$ не инициализируется на шагах $s \geq t_0$, и $n(\delta(e)) = n_s(\delta(e))$ для всех $s \geq t_0$. Заметим, что если $\delta(e+1) = \delta(e)0$, то за счет шагов вида $s = 3s'+2$, $s' \in \omega$, таких, что $\delta(n)0 \subseteq \delta_s$, изоморфное вложение $\psi^{\delta(e)} = \bigcup\limits_{s=t_0}^{\infty} \psi_s^{\delta(e)}$ графа $\langle B^{(n(\delta(e)))}, R\rangle$ в граф $\langle W_e^A, R\rangle$ будет сюръективным, то есть требования I_e выполнено при $n = n(\delta(e))$.

Предположим теперь, что $\delta(e+1) = \delta(e)1$. Значит, существует шаг $t_1 = 3s'_1 + 1 > t_0$ такой, что $\delta(e)1 \subseteq \delta_{t_1}$, и $\delta(e)0 \not\subseteq \delta_s$ для всех $s \geq t_1$. Тогда $\delta(e)1 \subseteq \delta_s$, если $s \geq t_1$ и $\delta(e) \subseteq \delta_s$. Это значит, что для любого s из бесконечного множества $\{s = 3s'+1 \mid s \geq t_1 \,\&\, \delta(e) \subseteq \delta_s\}$ значение $\theta_s(a(\sigma, s))$ не определено. Но по построению $\psi_s^{\delta(e)} = \psi_{t_1}^{\delta(e)}$ для всех $s \geq t_1$. Значит $a(\delta(e), s) = a(\delta(e), t_1)$ для всех $s \geq t_1$, и, следовательно, значение $\theta(a(\delta(e), t_1))$ не определено. Из выбора частичной функции

θ следует, что множество $W^A_{a(\delta(e),t_1)}$, состоящее из конечных $\{0,1\}$-значных функций β, таких, что

$$(\exists\varphi \supseteq \psi^{\delta(e)}_{t_1})[\varphi - \text{изоморфное вложение из } \langle \mathcal{S}(\beta)^{(n(\delta(e)))}, R\rangle \text{ в } \langle W^A_e, R\rangle],$$

не является вычислимо перечислимым относительно C. Поэтому, $\deg(C) \notin \mathbf{Sp}\,(\langle W^A_e, R\rangle)$, что также говорит о выполнении требования I_e.

Для того, чтобы установить выполнение произвольного требования R_e, $e \in \omega$, фиксируем шаг $u+1 = 3s'+1$ такой, что $\delta(e) \subset \delta_{u+1}$, $R_u(\delta(e)) = 0$, и $\delta(e+1)$ не инициализируется на шагах $s > u$. Тогда по построению будем иметь $\zeta_{u+1} = \delta(e)$ и $R_{u+1}(\delta(e)) = 1$. При этом является очевидным выполнение требования R_e, если существуют два подходящих расширения $\gamma_0 \in 2^{<\omega}$ и $\gamma_1 \in 2^{<\omega}$ на шаге $u+1$, такие, что $\Phi^{\gamma_0}_e(x)\downarrow \neq \Phi^{\gamma_1}_e(x)\downarrow$ для некоторого x. Остается привести к противоречию случай, когда $\chi_C = \Phi^B_e$ и не существует строк $\gamma_0 \supseteq \beta_u$ и $\gamma_1 \supseteq \beta_u$, таких, что

$$(\exists x)[\Phi^{\gamma_0}_e(x)\downarrow \neq \Phi^{\gamma_1}_e(x)\downarrow],$$

$$(\forall i \leq e)[\delta(i+1) = \delta(i)0 \implies \gamma_0 \in W^A_{a(\delta(i),u)} \text{ и } \gamma_1 \in W^A_{a(\delta(i),u)}],$$

$$(\forall i \leq e)[\delta(i{+}1) = \delta(i)1 \implies \mathcal{S}(\gamma_0)^{(n(\delta(i)))} = \mathcal{S}(\gamma_1)^{(n(\delta(i)))} = \mathcal{S}(\beta_u)^{(n(\delta(i)))}]$$

(последние два условия означают, что γ_0 и γ_1 являются подходящими расширениями на шаге $u+1$). Для этого отметим, что по выбору шага u для каждого $i \leq e$ такого, что $\delta(i+1) = \delta(i)1$, и произвольного $s > u$ справедливо $\mathcal{S}(\beta_u)^{(n(\delta(i)))} = \mathcal{S}(\beta_s)^{(n(\delta(i)))}$. С другой стороны, если $i \leq e$ и $\delta(i+1) = \delta(i)0$, то имеет место $\beta_s \in W^A_{a(\delta(i),u)}$ для всех $s > u$ в силу существования изоморфного вложения $\psi^{\delta(i)}_s$, продолжающего вложение $\psi^{\delta(i)}_u$. Кроме того, если $i \leq e$ и $\delta(i+1) = \delta(i)0$, то по построению значение $\theta(a(\delta(i),u))$ определено, и, следовательно, множество $W^A_{a(\delta(i),u)} = W_{\theta(a(\delta(i),u))}$ вычислимо перечислимо. Таким образом, $\chi_C(x) = y$ тогда и только тогда, когда существует строка $\gamma \supseteq \beta_u$, такая, что $\Phi^\gamma_e(x)\downarrow= y$ и

$$(\forall i \leq e)[\delta(i+1) = \delta(i)0 \implies \gamma \in W_{\theta(a(\delta(i),u))}],$$

$$(\forall i \leq e)[\delta(i+1) = \delta(i)1 \implies \mathcal{S}(\gamma)^{(n(\delta(i)))} = \mathcal{S}(\beta_u)^{(n(\delta(i)))}].$$

Данное утверждение противоречит невычислимости множества C.

Теперь, чтобы убедиться в справедливости требования N_e, $e \in \omega$, достаточно фиксировать шаг $v + 1 = 3s' + 1$ такой, что $\delta(e) \subset \delta_{v+1}$, $R_v(\delta(e)) = 1$, $N_v(\delta(e)) = 0$, и $\delta(e+1)$ не инициализируется на шагах $s > v$, и провести в точности такие же рассуждения с заменой C на A, и u на v. $\square$

Дополнение. При доказательстве теоремы 12.1 был использован простой факт, заключающийся в том, что для каждого множества A существует невычислимое множество $C \leq_T A''$ такое, что для всех множеств $W \subseteq \omega$ имеет место

$$W \text{ в.п.} \iff W \text{ в.п. относительно } A \text{ и } W \text{ в.п. относительно } C.$$

На языке степеней по перечислимости, это эквивалентно тому, что для любой тотальной e-степени $\mathbf{a}_e$ существует тотальная e-степень $\mathbf{c}_e$, $\mathbf{0}_e < \mathbf{c}_e < \mathbf{a}_e''$, для которой выполнено $\mathbf{a}_e \cap \mathbf{c}_e = \mathbf{0}_e$. В справедливости последнего утверждения можно убедиться, анализируя доказательство теоремы 2 статьи [13] и учитывая замечание из [21] (утверждение 2.11). Поскольку интересующая нас оценка $\mathbf{c}_e \leq \mathbf{a}_e''$ в упомянутых источниках явно не указывается, мы, для полноты, приводим его доказательство.

Теорема 12.3. (МакЭвой, Купер [13], Сорби [21]). *Для каждого множества A существует невычислимое множество $C \leq_T A''$ такое, что для всех множеств $W \subseteq \omega$ имеет место*

$$W \textit{ в.п.} \iff W \textit{ в.п. относительно } A \textit{ и } W \textit{ в.п. относительно } C.$$

Доказательство. Будем строить χ_C посредством монотонной последовательности строк $\chi_C = \cup_s \sigma_s$. Наше алгоритмическое построение будет A''-вычислимым.

Построние.

Шаг $s = 0$. Строка σ_0 пустая.

Шаг $s+1 = 2e+1$. Полагаем $\sigma_{s+1} = \sigma_s 0$, если $|\sigma_s| \in W_e$, и $\sigma_{s+1} = \sigma_s 1$ в противном случае (здесь используется лишь $\emptyset'$-оракул).

Шаг $s + 1 = 2\langle e, j\rangle + 2$. Используя A''-оракул, выясняем, будет ли выполняться равенство $W_e^A = \{x \mid (\exists \sigma \supseteq \sigma_s)[x \in W_j^{\sigma}]\}$ (здесь σ пробегает все строки из $2^{<\omega}$).

Случай 1. Равенство имеет место. Полагаем $\sigma_{s+1} = \sigma_s$.

Случай 2. Существует такое $x_s \in W_e^A$, что $x_s \notin W_j^\sigma$ для всех строк $\sigma \supseteq \sigma_s$. Тогда также полагаем $\sigma_{s+1} = \sigma_s$.

Случай 3. Существует такое $x_s \notin W_e^A$, что $x_s \in W_j^\sigma$ для некоторой строки $\sigma \supseteq \sigma_s$. Полагаем $\sigma_{s+1} = \sigma$.

Описание построения завершено.

По построению на нечетных шагах для множества C, $\chi_C = \cup_s \sigma_s$, и произвольного $e \in \omega$ имеем $|\sigma_{2e}| \in C$ тогда и только тогда, когда $|\sigma_{2e}| \notin W_e$. Следовательно C не вычислимо (даже не вычислимо перечислимо).

Предположим, теперь что некоторое множество W в.п. относительно A и в.п. относительно C. Тогда $W = W_e^A = W_j^C$ для некоторых $e, j \in \omega$. Рассмотрим шаг $s+1 = 2\langle e, j\rangle + 2$. Ясно, что случаи 2 и 3 не могут иметь места. Следовательно $W = \{x \mid (\exists \sigma \supseteq \sigma_s)[x \in W_j^\sigma]\}$ в.п. $\square$

Список литературы

[1] Е. З. Дымент; О некоторых свойствах решетки Медведева, Матем. сборник, 101 (1976), 360–379.

[2] Ю.Л. Ершов; Определимость и Вычислимость, Научная книга, Новосибирск, Экономика, Москва, 2000.

[3] Ю.Т. Медведев; Степени трудности массовых проблем, ДАН СССР, 104 (1955), 501-504.

[4] А.А. Мучник; О сильной и слабой сводимости алгоритмических про- блем, Сиб. матем. журнал, 4 (1963), 1328-1341.

[5] А.И. Стукачев; О степенях представимости моделей. I, Алгебра и логика, 6 (2007), 763–788

[6] H.G. Carstens; Δ_2^0-mengen, Arch.Math. Log. Grundlag., 18 (1978), 55 - 65.

[7] R. Downey; On presentations of algebraic structures, Complexity, Logic, and Recursion Theory, ed. A. Sorbi (New York: Dekker, 1997), 157-205.

[8] Richard J. Coles, R.G. Downey, T.A. Slaman; Every set has a least jump enumeration. J. London Math. Soc., 62(2000), 641–649.

[9] S.S. Goncharov, V.S. Harizanov, J.F. Knight, C. McCoy, R.G. Miller, R. Solomon; Enumerations in computable structure theory, Annals of Pure and Applied Logic, 136, 3 (2005), 219-246.

[10] V.S. Harizanov, R. Miller; Spectra of structures and relations, Journal of Symbolic Logic, 72 (2007), 324-348.

[11] D.R. Hirschfeldt, B. Khoussainov, R.A. Shore, A.M. Slinko; Degree spectra and computable dimensions in algebraic structures, Annals of Pure and Applied Logic, 115 (2002), 71-113.

[12] J.F. Knight; Degrees coded in jumps of orderings, J. Symbolic Logic, 51 (1986), 1034-1042.

[13] K. McEvoy, S.B. Cooper; On minimal pairs of enumeration degrees, J. Symbolic Logic, 50 (1985), 983-1001.

[14] R.G. Miller; The Δ_2^0-spectrum of a linear order, J. Symbolic Logic 66 (2001), 470-486.

[15] A. Nies; Lowness properties and randomness, Advances in Mathenatics, 197 (2005), 274-305.

[16] L.J. Richter; Degrees of structures, J. Symbolic Logic, 46 (1981), 723-731.

[17] H. Rogers, Jr.; Theory of Recursive Functions and Effective Computability, McGraw-Hill, New York, 1967.

[18] A.L. Selman; Arithmetical reducibilities. I. Z. Math. Logik Grundlag. Math., 17(1971), 335–350.

[19] T. Slaman; Relative to any nonrecursive set, Proc. Amer. Math. Soc., 126 (1998), 2117-2122.

[20] R.I. Soare; Recursively enumerable sets and degrees, Heidelberg: Springer-Verlag, 1987.

[21] A. Sorbi; The enumeration degrees of Σ_2^0 sets, Complexity, Logic, and Recursion Theory, ed. A. Sorbi (New York: Dekker, 1997), 303–330.

[22] I.N. Soskov; Degree spectra and co-spectra of structures, Ann. Univ. Sofia, 96 (2003), 45-68

[23] S. Wehner; Enumerations, countable structures, and Turing degrees, Proc. Amer. Math. Soc., 126 (1998), 2131-2139.