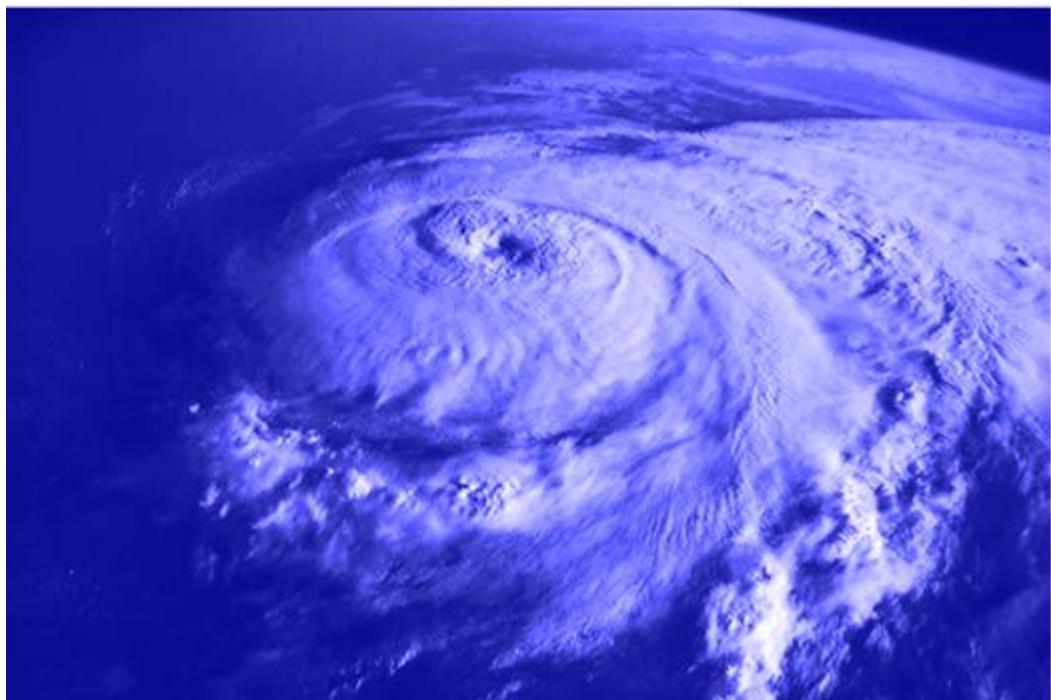


А.Б. Мазо, К.А. Поташев

ГИДРОДИНАМИКА



Казань – 2013

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.Б. Мазо, К.А. Поташев

ГИДРОДИНАМИКА

*Учебное пособие
для студентов нематематических факультетов*

Издание второе

**КАЗАНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
2013**

**УДК 532(075.8)
ББК 22.253.3я73
М13**

Печатается по рекомендации учебно-методической комиссии
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Казанского (Приволжского) федерального университета
Протокол № 1 от 10 октября 2013 года

Рецензент
член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук
Д. А. Губайдуллин.

М13 Мазо А.Б.

Гидродинамика: учеб. Пособие для студентов нематематических факультетов / А.Б. Мазо, К.А. Поташев. – Казань: Казан. ун-т, 2013. – 2-е изд. – 128 с.

Учебное пособие основано на специальном курсе лекций и практических занятий для студентов III курса института экологии и географии Казанского университета. Основной задачей авторов при написании данного учебного пособия было представление теоретических основ гидродинамики в форме, доступной студентам, для которых математика и механика не являются профильными дисциплинами. Особое внимание уделено практическим задачам, контрольным вопросам и упражнениям, которые сопровождают почти каждую лекцию; они призваны привлечь внимание студентов и обеспечить более предметное изучение теоретических положений. Для наиболее показательных задач приведены решения.

Пособие может быть полезно также аспирантам, научными работникам и инженерам соответствующих специальностей.

Во второе издание вошли некоторые доработки теоретического материала, а также дополнительные практические задания и их решения.

**УДК 532(075.8)
ББК 22.253.3я73**

**© Мазо А.Б., Поташев К.А., 2013
© Казанский университет, 2013**

Оглавление

Лекция 1. Введение	- 6 -
Лекция 2. Краткие сведения из математики и механики	- 10 -
Лекция 3. Основные уравнения гидродинамики	- 21 -
Лекция 4. Замкнутые системы уравнений гидродинамики	- 29 -
Лекция 5. Альтернативные формулировки уравнений гидродинамики	- 43 -
Лекция 6. Частные формулировки уравнений термогидродинамики ...	- 54 -
Лекция 7. Установившиеся течения. Интеграл Бернулли	- 65 -
Лекция 8. Потенциальные течения. Интеграл Коши-Лагранжа.....	- 74 -
Лекция 9. Ползучие вязкие течения	- 86 -
Лекция 10. Уравнения пограничного слоя	- 96 -
Лекция 11. Математическое описание турбулентных течений.....	- 103 -
Решения задач.....	- 115 -
Контрольные задания.....	- 123 -
Литература	- 126 -

Лекция 1. ВВЕДЕНИЕ

Гидродинамика – это наука о движении жидкости (или газа). С точки зрения математического описания движения текущих сред, нет разницы между жидкостью и газом. Иногда жидкостью называют несжимаемую среду, а газом называют среду, у которой плотность существенно меняется.

Жидкость – такое состояние физической среды, при котором она легко деформируется под действием внешних и внутренних сил. При описании движения элементарных объемов жидкости в гидромеханике не рассматривается движение молекул¹. В связи с этим истинное молекулярное строение жидкости в гидромеханике заменено упрощенной схемой. В 1753 г. Эйлер в качестве модели жидкости предложил принять *сплошную жидкую среду*. Таким образом, считается, что жидкость сплошь заполняет занимаемое пространство без образования каких бы то ни было пустот.

В отличие от твердого (упругого) тела жидкость не оказывает сопротивления статическим сдвиговым нагрузкам, и поэтому объему жидкости легко придать любую форму (например, налить в сосуд произвольной формы). В то же время жидкость способна сопротивляться нормальным напряжениям растяжения или сжатия, иногда даже в большей степени, чем твердые тела. Данное свойство жидкости широко используется в разнообразных гидравлических устройствах, например в гидравлических прессах и домкратах.

Жидкость характеризуется несколькими физическими параметрами. Это плотность ρ , динамическая вязкость μ , теплоемкость c , теплопроводность λ . Дадим краткое неформальное описание этих свойств и укажем их размерности.

¹ Легко оценить, что при нормальных условиях уже в 1мм^3 содержится $2.7 \cdot 10^{16}$ молекул.

Плотность жидкости определяется как предел отношения массы жидкости к ее объему:

$$\rho = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{dm}{dV}, \frac{\kappa \sigma}{m^3}.$$

Вязкость жидкости характеризует ее способность сопротивляться сдвиговым деформациям. Поясним это на примере простого сдвигового течения около твердой стенки (см. рис. 1.1). Продольная скорость линейно меняется от нуля на стенке до величины u на расстоянии y от стенки. При этом скорость деформации (скорость сдвига) равна $e = du/dy$, с^{-1} , а для реализации такого течения необходимо приложить напряжение τ , $\text{Па} = \text{Н/м}^2$.

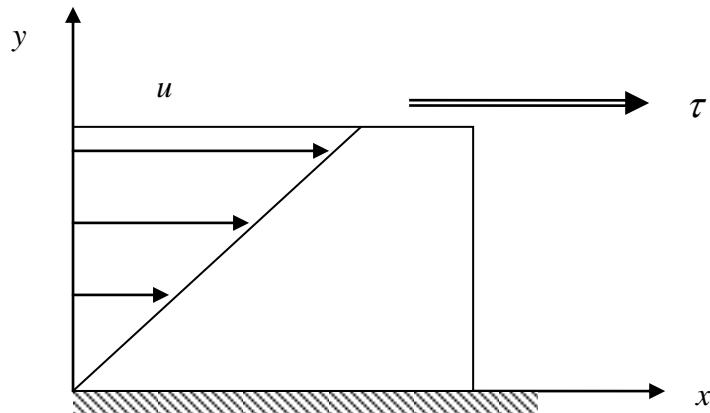


Рис. 1.1. К определению сдвиговой вязкости жидкости

Закон трения Стокса выражает линейную связь между напряжением и скоростью деформации,

$$\tau = \mu e = \mu \frac{du}{dy},$$

причем коэффициент пропорциональности – вязкость μ , $\text{Па} \cdot \text{с}$ - очевидно, различен для различных жидкостей. По опыту мы знаем, что вязкость масла больше, чем вязкость воды. Вязкость жидкости обычно зависит от ее температуры T ; обычно μ убывает с ростом T .

Теплоемкость c , Дж/(кг · К) показывает, насколько изменится энергия (теплосодержание, энталпия) килограмма жидкости при изменении его температуры на 1 градус.

Теплопроводность λ , Вт/(м · К) характеризует способность жидкости проводить тепло. Математически это свойство представлено коэффициентом пропорциональности между плотностью теплового потока q , Вт / м² и перепадом температуры $dT / dx = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} (T_2 - T_1) / (x_2 - x_1)$ в линейном за- коне Фурье

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}.$$

Знак минус указывает на то, что тепловой поток направлен от горячего к холодному: если температура возрастает с ростом x , то $dT / dx > 0$, а $q < 0$, т.е. тепло течет в противоположном направлении от направления роста температуры.

При теоретическом изучении течений жидкости в каждой точке пространства x, y, z в каждый момент времени t рассчитывают следующие величины: скорость $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (v_1, v_2, v_3) = (u, v, w)$, температуру T , давление p и внутренние напряжения σ . По этим характеристикам определяют гидродинамическое взаимодействие потока жидкости с границами потока и обтекаемыми телами. Например, сопротивление труб, подъемная сила крыла самолета, плавучесть корабля и его сопротивление при движении. В применении к расчетам природных процессов данные характеристики позволяют определить, например, разрушительное действие потоков на поверхности (подвижки ледников, сели, прибой морских волн, цунами, ветровая эрозия и пр.)

В гидродинамике рассматриваются математические модели течений жидкости и газа в различных условиях. Эти модели, как правило, представляют собой системы дифференциальных уравнений в частных произ-

водных и краевые (начальные и граничные) условия. Чтобы с помощью модели предсказать, как будет проходить (или как проходило ранее) течение жидкости, надо решить эти уравнения, а точнее, краевые задачи. В некоторых простейших частных случаях решение этих задач получается в аналитической форме (т.е. в виде формул), однако большинство реальных течений моделируется на основе численного решения задач на компьютерах.

Задачи к лекции 1

Задача 1.1. Над твердой поверхностью протекает слой воды толщиной $h = 10\text{ см}$. Определите величину сдвигового напряжения в жидкости, если известно, что через поперечное сечение шириной $a = 10\text{ см}$ жидкость протекает с объемным расходом $Q = 200\text{ мл/с}$. Вязкость воды равна $\mu = 1.5 \cdot 10^{-3}\text{ Па} \cdot \text{с}$. Профиль продольной скорости считать линейным по высоте (рис. 1).

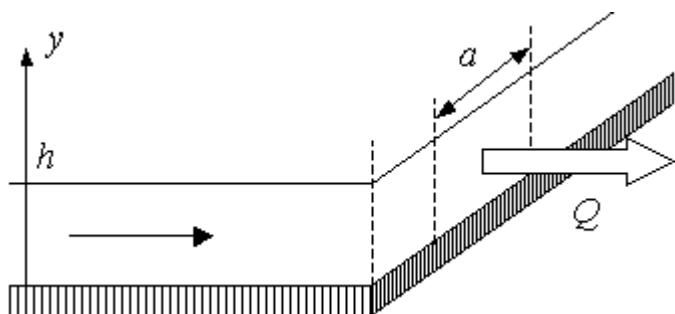


Рис. 1.2. Схема к постановке задачи 1.1

Задача 1.2. Зависимость вязкости воды от температуры может быть приближенно описана уравнением $\mu(\text{Па} \cdot \text{с}) \approx \frac{2}{3}e^{-0.022T(\text{К})}$ в температурном диапазоне от 5°C до 50°C . Определить, как изменится величина напряжения в условиях задачи 1.1 при температуре воды $T = 20^\circ\text{C}$.

Задача 1.3. Записать уравнение для определения полного теплового потока вдоль отрезка, соединяющего точки с температурой T_0 и T_1 .

Лекция 2.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

В данном разделе мы приведем некоторые базовые понятия математики и механики, необходимые для изложения основ гидромеханики и теплообмена. При этом мы не претендуем на полноту и математическую строгость определений, акцент делается на содержательной стороне формулировок.

Скаляр – это величина, значением которой является число.

Функция $f(x)$ – отображает числовой аргумент x в числовое значение функции $y = f(x)$. Функцию представляют в виде графиков и таблиц (в одной колонке аргумент, в другой – значение функции). Наряду с функцией одной переменной, рассматривают функции нескольких переменных $y = f(x_1, x_1, \dots, x_n)$. Функция многих переменных отображает набор числовых аргументов x_1, x_1, \dots, x_n в одно числовое значение функции $y = f(x_1, x_1, \dots, x_n)$. Например, уравнение состояния газа задает давление как функцию плотности и температуры: $p = F(\rho, T)$. Функция двух переменных обычно изображается в виде карты изолиний (линий уровня) функции. Например, функция $T(x, y)$, задающая температуру на поверхности в декартовых координатах x, y обычно представляется картой изотерм $T(x, y) = \text{const}$, см. рис. 2.1.

В случае одной или нескольких переменных мы имеем распределение значений функции над областью изменения аргументов. Совокупность значений скалярной функции называется полем этой функции (поле температур, поле давления).

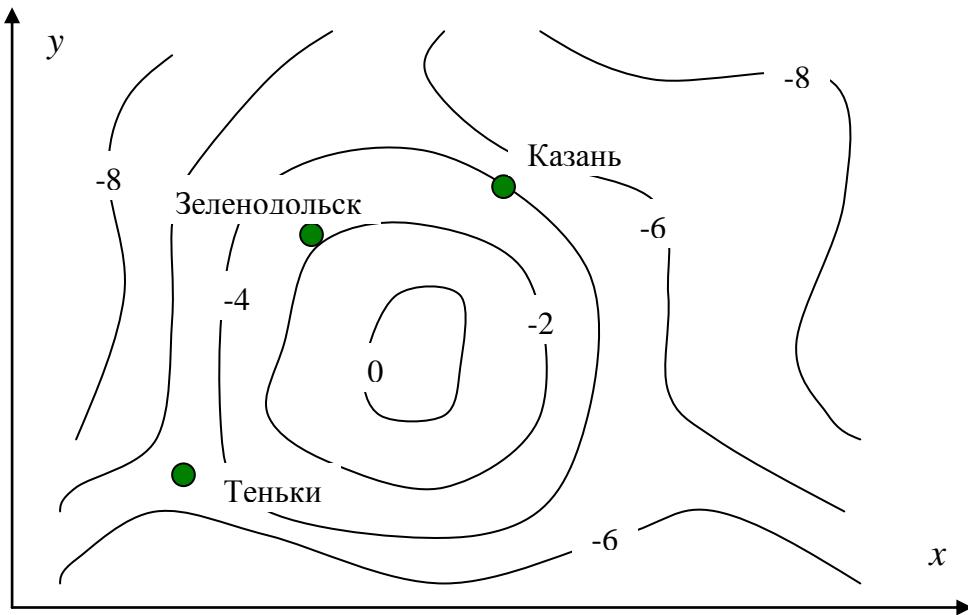


Рис. 2.1. Поле температуры как карта изотерм

Вектор \vec{v} - это объект, который характеризуется абсолютной величиной $|v|$ и ориентацией в пространстве (направлением). Сам вектор не зависит от системы координат, однако если какая-либо система координат выбрана, то можно определить проекции вектора на три координатные оси, и это будут компоненты вектора в данной системе координат. В прямоугольной декартовой системе координат x, y, z с ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ компоненты вектора $(v_1, v_2, v_3) = (v_x, v_y, v_z)$ - это скалярные функции, которые однозначно задают вектор

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k},$$

а его модуль (длина) $|v|$ вычисляется по формуле

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Поле векторной величины – распределение вектора над областью изменения аргумента. Для определения векторного поля \vec{v} достаточно задать систему координат и скалярные поля компонент вектора. В случае плоских течений это два скалярных поля (v_x, v_y) , а в случае объемных течений - три скалярных поля (v_x, v_y, v_z) его компонентов.

Операции над векторами

Возьмем три вектора \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} .

1. Умножение на скаляр: $\vec{w} = a \cdot \vec{v}$, где a – число или скалярная величина. Каждая компонента \vec{w} есть каждая компонента \vec{v} , умноженная на a : $w_i = av_i$, $i = 1, 2, 3$.

2. Сложение двух векторов. $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ означает $u_i = v_i + w_i$.

3. Скалярное произведение векторов определяется формулами

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i=1}^3 u_i v_i = |u||v| \cos(u, v),$$

Очевидно, скалярное произведение ортогональных векторов равно нулю, а скалярное произведение коллинеарных (параллельных) векторов равно произведению их длин.

4. Квадрат вектора есть скалярное произведение его на себя:

$$\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

5. Векторное произведение $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$ есть вектор, определяемый как определитель

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = w_1 \vec{i} + w_2 \vec{j} + w_3 \vec{k},$$

$$w_1 = u_2 v_3 - v_2 u_3; \quad w_2 = u_3 v_1 - v_3 u_1; \quad w_3 = u_1 v_2 - v_1 u_2.$$

Вектор \vec{w} направлен ортогонально к плоскости, натянутой на вектора \vec{u} , \vec{v} , а его длина равна $|w| = |u||v|\sin(u, v)$. Очевидно, векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю.

Векторное поле изображают разными способами: 1) стрелками; 2) линиями тока; 3) эпюрами в проекциях.

Оператор действует на скалярную функцию или вектор, в результате получается новая функция или вектор. Например, оператор дифференци-

рования $\frac{d}{dx}$, действуя на функцию $f(x)$ дает новую функцию – ее производную $g(x) = f'(x)$.

Пример 1. $f(x) = \sin x$. $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$.

Пример 2. Оператор Лапласа $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Пусть

$$f(x, y, z) = 1 + 2x^3 + e^y - 2.5z^2.$$

Тогда

$$Lf = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6x + e^y - 5.$$

Оператор может применяться к функциям как одной, так и нескольких переменных.

Например, оператор набла (∇) в декартовой системе трех координат можно представить как вектор, компонентами которого являются операторы дифференцирования по координатам,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Если функция $f(x, y, z)$ – скалярная, то применяя этот оператор, получаем вектор

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Градиентом скалярной функции f называется вектор

$$\nabla f = \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}.$$

Вектор-градиент в произвольной точке направлен в сторону наискорейшего роста функции.

Производной функции f по направлению \vec{n} называется величина

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}.$$

Если оператор набла применяется к вектору, то результат равен скалярному произведению оператора-вектора $\vec{\nabla}$ на вектор $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$:

$$\nabla \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{v}$$

Дивергенция вектора в точке указывает на потоки векторного поля, протекающие через элементарный (бесконечно малый) объем, окружающий точку сплошной среды. Если в объем втекает столько же, сколько вытекает, то дивергенция равна нулю; в противном случае в точке есть источники или стоки.

Функционал. Функционал $y = F(f)$ действует на функцию, в результате получается скаляр (число). Таким образом, с помощью функционала каждой функции ставится в соответствие число.

Пример 1. Норма функции $y = \|f\|_C = \max_{a < x < b} |f(x)|$; площадь, отсекаемая графиком функции на отрезке $S = \int_a^b f(x) dx$.

Пример 2. Метеостанция измеряет температуру в интервале с 1813 по 2006 год. Получается функция $T(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, $t_1 = 1913$, $t_2 = 2006$.

Практический интерес представляют следующие функционалы.

Средняя температура за период наблюдений $\bar{T} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} T(t) dt$.

Максимальная $T_{\max} = \max_{t_1 < t < t_2} T(t)$ и минимальная $T_{\min} = \min_{t_1 < t < t_2} T(t)$ температура.

Естественно возникают и другие функционалы от функции $T(t)$, например средняя зимняя, минимальная 14 февраля, максимальная дисперсия (отклонение от средней) и т.д.

Тензор

В механике тензор – это сложный объект, содержащий комплект скалярных функций и не зависящий от системы координат (инвариантность

относительно преобразования координат). Выше мы рассматривали простейшие тензоры: скаляр и вектор. Тензор характеризуется рангом, который можно определить как количество индексов, используемых для перечисления входящих в него скалярных функций. Так, скаляр – это тензор нулевого ранга, а вектор – это тензор первого ранга. Оказывается, не все свойства сплошной среды можно описать с помощью этих простейших тензоров; в частности широко используются тензоры второго ранга с двухиндексными компонентами σ_{ij} , каждая из которых является, вообще говоря, скалярной функцией точки пространства. В трехмерном пространстве индексы i, j изменяются от 1 до 3, так что тензор второго ранга T содержит 9 компонент. Эти компоненты удобно представить в виде матрицы

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Математические действия с тензорами производятся по тем же правилам, что и с матрицами. Среди тензорных операций, помимо тривиальных операций сложения тензоров и умножения тензора на число, выделим операции умножения тензора второго ранга на вектор

$$\vec{v} = T\vec{u}; \quad v_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} u_j,$$

результатом которого является новый вектор, и произведение тензоров

$$C = AB, \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^3 A_{ik} B_{kj},$$

результатом которого является новый тензор. По существу, в этом определении выражается главное математическое свойство тензора: его действие на инвариантный объект приводит к инвариантному объекту. Это свойство позволяет сформулировать общие уравнения гидромеханики в универсальном тензорном виде, справедливом в любой системе координат.

Механический смысл тензора

Первоначально тензор был введен для описания внутренних напряжений в жидкости. В произвольной точке x, y, z жидкости мысленно выбирается бесконечно малый (элементарный) объем $dV = dx dy dz$ и рассматриваются силы (напряжения), действующие на поверхность этого объема со стороны окружающей объем жидкости. Эти напряжения обусловлены, во-первых, статическим давлением p , которое действует по нормали к любой поверхности, а во-вторых – передачей импульса (количества движения) от окружающей жидкости благодаря вязкости. Важно понимать, что вязкие напряжения в жидкости возникают только из-за её деформаций, а давление есть и при полном отсутствии течения. Элементарный объем образован шестью гранями – элементарным площадками, ориентированным по координатным осям (см. рис. 2.2).

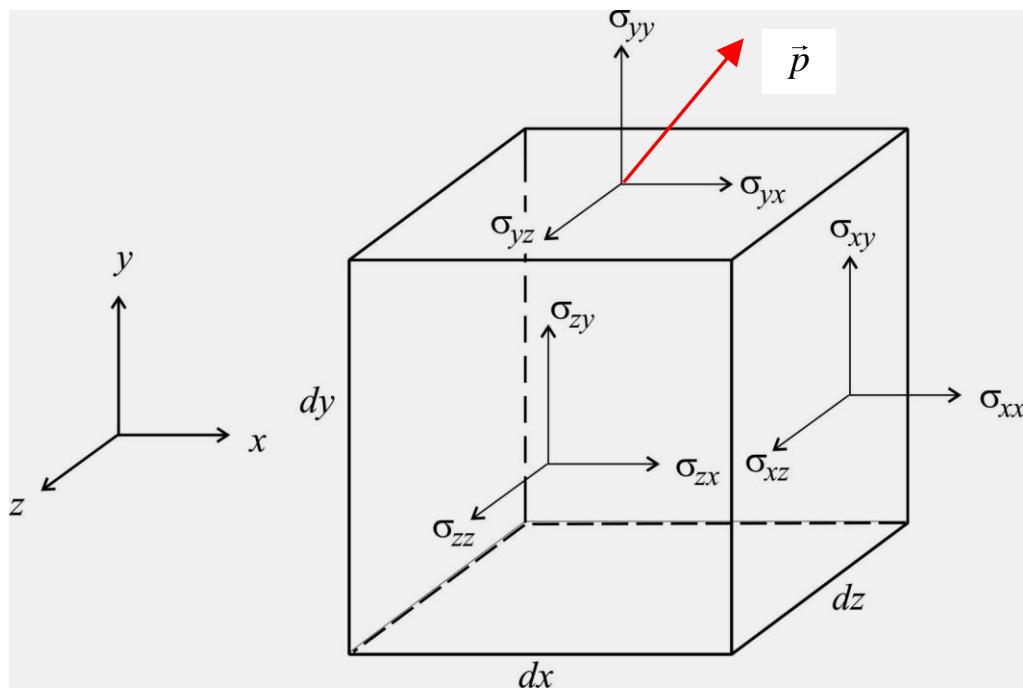


Рис. 2.2. Элементарный объем в жидкости и структура напряжений на его поверхности

Ориентация каждой площадки в пространстве определяется нормалью \vec{n} . Вектор напряжения \vec{p} , действующий на площадку, можно разло-

жить на три компоненты: нормальную и две касательных к данной площадке. Так, вектор, показанный на рисунке, характеризуется нормальным напряжением σ_{yy} и касательными напряжениями σ_{yz} , σ_{yx} . Первый индекс указывает направление нормали к площадке, а второй – направление действия поверхностной силы. Полная система внутренних напряжений в жидкости может быть представлена тензором напряжений, действующих на грани элементарного кубика.

Таблица 1. Структура напряжений на поверхности элементарного объема

Грань и её площадь	Напряжение	Тип
$x; x + dx$ $dydz$	$-p + \sigma_{xx}$	нормальный
	σ_{xy}, σ_{xz}	касательный
$y; y + dy$ $dxdz$	$-p + \sigma_{yy}$	нормальный
	σ_{yx}, σ_{yz}	касательный
$z; z + dz$ $dxdy$	$-p + \sigma_{zz}$	нормальный
	σ_{zx}, σ_{zy}	касательный

Различают симметричные, несимметричные и антисимметричные тензоры. Если $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, то тензор симметричный; а если $\sigma_{ij} = -\sigma_{ji}$, то тензор антисимметричный. Оказывается, что для большинства течений тензор напряжений симметричен.

Диагональная матрица – единичный тензор - символ Кронекера определяется как

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

С помощью этого символа удобно представить тензор полных внутренних напряжений, который включает и давление: $p_{ij} = -p\delta_i^j + \sigma_{ij}$.

Точки зрения Лагранжа и Эйлера на движение сплошной среды

Способ Эйлера. Наблюдатель (система координат) неподвижен и фиксирует изменение свойств движущейся среды в каждой точке пространства.

Например, в качестве изучаемой характеристики среды выбрана температура $T(x, y, z, t)$ потока жидкости. По способу Эйлера следует закрепить термометр в конкретной точке пространства x, y, z и записывать его показания в разные моменты времени t . Заметим, что через пункт измерения протекает жидкость, и в каждый момент измеряется температура разных материальных точек среды. Меняя точки наблюдения, получаем полную информацию об изменении сплошной среды во всем пространстве, а именно функцию $T(x, y, z, t)$.

Способ Лагранжа. В момент времени $t = 0$ выбирается фиксированная материальная частица в жидкости, туда помещается наблюдатель и связанная с ним система координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 . С течением времени, при $t > 0$, наблюдатель перемещается вместе с выбранной частицей, при этом координатные линии ξ_1, ξ_2, ξ_3 , проведенные по материальным частицам среды, могут растягиваться и искривляться (в способе Лагранжа говорят о вмороженной системе координат). Например, при изучении температуры потока по способу Лагранжа следует прикрепить термометр к дрейфующему бую, который свободно плывет вместе с потоком. Снимая показания термометра в различные моменты времени, получаем температуру одной и той же материальной точки. Выбирая множество таких точек ξ_1, ξ_2, ξ_3 , получим полную информацию об изменении всех материальных точек сплошной среды во времени, а именно функцию $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$.

Обратим внимание, что в способе Лагранжа во вмороженной (сопутствующей) системе координат скорость жидкости всегда равна нулю.

Существует переход между описанием свойств среды этими двумя способами.

Если в среде выделить контрольный материальный объем V_L и совпадающий с ним в начальный момент эйлеров объем V_E , то при $t > 0$ объем V_L будет деформироваться вместе со средой, хотя в лагранжевых координатах останется неподвижным. Выберем некоторое свойство f среды и проинтегрируем его по элементарному лагранжеву объему V_L . Будем изучать его изменение во времени. Справедлива формула

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_L} f \, dL = \int_{V_E} \frac{\partial f}{\partial t} \, df + \int_S f \, v_n \, dS, \quad (2.1)$$

которая связывает изменение свойств в объемах Лагранжа и Эйлера. Здесь v_n - скорость потока по нормали к поверхности S объема V_E . Второе слагаемое в правой части равенства (2.1) выражает поток f через границу эйлерова объема, а первый член характеризует изменение изучаемого свойства внутри V_E .

В математическом смысле формула (2.1) связывает интегрирование по объему и интегрирование по поверхности. Еще одну важную формулу, которая устанавливает связь между потоком вектора через замкнутую поверхность S и его дивергенцией в объеме V , ограниченном данной поверхностью, дает *теорема Остроградского-Гаусса*:

$$\int_S v_n \, dS = \int_V \operatorname{div} \vec{v} \, dV \quad (2.2)$$

Задачи к лекции 2

Задача 2.1. В ортогональной декартовой системе координат определить:

- единичный вектор, параллельный вектору \vec{v} с компонентами $(2;3;-6)$;
- единичный вектор прямой, соединяющей точки $P(1;0;3)$ и $Q(0;2;1)$.

Задача 2.2. Для векторов $\vec{a} = (3;0;4)$, $\vec{b} = (0;2;-6)$ и тензора

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$
 вычислить произведения $\vec{a} \cdot \vec{D}$, $\vec{D} \cdot \vec{b}$ и $\vec{a} \cdot \vec{D} \cdot \vec{b}$.

Задача 2.3. Для заданного поля скоростей сплошной среды

$$v_x = x^2, \quad v_y = -3y, \quad v_z = 0$$

- вычислить изменение содержания данного вещества за единицу времени в объеме $V = L_x \times L_y \times L_z = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [z_1, z_2]$;
- определить условия, при которых масса вещества в ненулевом объеме V будет оставаться неизменной;
- построить линии тока.

Задача 2.4. Найти производную функции $\lambda = x^2 + 2xy - z^2$ по направлению, заданному единичным вектором $\vec{n} = (2/7; -3/7; -6/7)$.

Задача 2.5. Найти градиент функции $f(x, y, z) = (x-1)^2 + \sin xz - \exp(-4y)$. Вычислить $\text{grad } f$ в точке $(0,0,0)$.

Задача 2.6. Найти дивергенцию вектора $\vec{v} = ((x-1)^2, \sin xz, \exp(-4y))$. Вычислить $\text{div } \vec{v}$ в точке $(0,0,0)$.

Задача 2.7. Вычислить среднее значение функции $f(x) = (x-1)^2$ на отрезке $1 \leq x \leq 2$.

Лекция 3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

Уравнение неразрывности (закон сохранения массы)

В жидкости выделяем объем V . Первоначально это может быть кубик, а затем, по мере движения жидкости, он деформируется. В любой момент времени этот объем содержит одни и те же материальные частицы. В нем находится вещество, которое обладает плотностью ρ . Тогда масса вещества вычисляется по формуле

$$m = \int_{V_L} \rho \, dV, \text{ кг.} \quad (3.1)$$

Закон сохранения массы выражается формулой

$$\frac{\partial m}{\partial t} = 0. \quad (3.2)$$

Подставим (3.1) в (3.2) и обратимся к формуле (2.1), которая выражает производную от деформируемого объема. Получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_L} \rho \, dV = \int_{V_E} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV + \int_S \rho v_n \, dS = 0. \quad (3.3)$$

Перепишем (3.3) с учетом теоремы Остроградского-Гаусса (2.2) и получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_L} \rho \, dV = \int_{V_E} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV + \int_{V_E} \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \, dV = 0 \quad (3.4)$$

Т.к. объем V_E выбран произвольно, и интеграл от некоторой величины по этому объему равен нулю, то, следовательно, сама эта величина тождественно равна нулю. Поэтому из (3.4) следует

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (3.5)$$

Это и есть уравнение неразрывности.

Варианты уравнения (3.5) таковы: если жидкость несжимаема, то ее плотность постоянна, $\rho=\text{const}$, следовательно, $\partial\rho/\partial t=0$ и ρ можно вынести из-под оператора дивергенции и сократить. Получим

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \text{ или } \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.6)$$

Здесь применено соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющимся индексам. В раскрытой форме это означает

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \text{ или } \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Субстанциональная производная (полная или индивидуальная производная).

Пусть $f(x, y, z, t)$ – скалярная функция, описывающая некоторое свойство жидкости. Тогда ее субстанциональная производная определяется равенством

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f \quad (3.7)$$

Субстанциональная производная выражает изменение свойств материальной точки по Лагранжу, т.е. в фиксированной материальной точке среды $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \text{const}$. При этом сама точка перемещается. Первое слагаемое справа выражает частную производную по времени, т.е. изменение свойства f в фиксированной точке пространства x, y, z - по Эйлеру. Последнее слагаемое означает конвективную производную, которая описывает изменение свойств в фиксированной точке пространства из-за того, что через эту точку протекает сплошная среда со скоростью \vec{v} . Конвективная производная равна нулю в случае, когда либо $v=0$ (нет течения), либо когда функция f не зависит от координат.

С учетом выражения материальной производной по времени уравнение неразрывности (3.5) можно записать в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Для описания течения сплошной среды, т.е. ее гидродинамики, нам надо знать скорость (3 компоненты), плотность, давление и температуру. Итого, 6 неизвестных скалярных функций. Замкнутая система уравнений гидродинамики должна содержать столько же уравнений, сколько и неизвестных. Пока получено только одно уравнение – это уравнение неразрывности.

Уравнения движения (импульса)

Это три уравнения для компонент вектора скорости, которые являются конкретизацией второго закона Ньютона ($\vec{a} = \vec{F} / m$) для эйлерового контрольного объема $V = dx dy dz$, в котором происходит изменение количества движения $\rho \vec{v}$. В механике эту величину называют *удельным импульсом*, он измеряется в $\frac{\kappa \sigma \cdot M}{m^3 \cdot c} = \frac{\kappa \sigma}{m^2 \cdot c}$. Импульс объема V определяется как интеграл

$$\int_V (\rho \vec{v}) dV, \quad \frac{\kappa \sigma \cdot M^3}{m^2 \cdot c} = \frac{\kappa \sigma \cdot M}{c} = H \cdot c$$

Выделим в движении жидкости объем V и посмотрим, как изменится его импульс со временем. Уравнение баланса сил выражает изменение количества движения материального объема под действием массовых и поверхностных сил, действующих на этот объем. Математически это записывается в виде векторного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_L} (\rho \vec{v}) dV = \int_{V_E} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) dV + \int_{S_E} (\rho \vec{v}) v_n dV = \int_{V_E} \rho \vec{g} dV + \int_{S_E} \vec{p} dS. \quad (3.7)$$

Все члены этого уравнения имеют размерность силы. В (3.7) \vec{g} – это ускорение массовых сил (например, ускорение гравитации), а \vec{p} – вектор внутренних напряжений, рассмотренный в Лекции 2.

Рассмотрим проекцию векторного уравнения (3.7) на ось x .

$$\begin{aligned}
& \int_V \frac{\partial \rho v_x}{\partial t} dV + \int_S (\rho v_x) v_n dS = \\
& = \int_V \frac{\partial \rho v_x}{\partial t} dV + \int_V \operatorname{div}(\rho v_x \vec{v}) dV = \int_V \rho g_x dV + \int_S p_x dS
\end{aligned}
\tag{3.8}$$

Интеграл с дивергенцией можно представить в виде

$$\int_V \operatorname{div}(\rho v_x \vec{v}) dV = \int_V \rho \vec{v} \cdot \operatorname{grad}(v_x) dV + \int_V v_x \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV,$$

а интеграл с производной по времени преобразуется следующим образом:

$$\int_V \frac{\partial \rho v_x}{\partial t} dV = \int_V \left(v_x \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} \right) dV.$$

Таким образом, в левой части уравнения (3.8) получаем

$$\begin{aligned}
& \int_V \left(v_x \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \operatorname{grad}(v_x) + v_x \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) dV = \\
& = \int_V \left[v_x \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} v_x \right) \right] dV
\end{aligned}$$

Но первый член представляет собой уравнение неразрывности (3.5), и поэтому равен нулю. Окончательно в левой части (8) получаем интеграл

$$\int_V \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} v_x \right) dV. \tag{3.9}$$

Вычислим теперь правую часть, а точнее, интеграл по поверхности S элементарного объема V (см. рис. 2.2).

$$\int_S p_x dS = \sum_{i=1}^6 \int_{S_i} p_x dS. \tag{3.10}$$

Действие вектора напряжений \vec{P} на элементарную площадку с нормалью \vec{n} определяется как вектор \overrightarrow{Pn} . Компонента i этого вектора равна

$$P_i = (\overrightarrow{Pn})_i = \sum_{j=1}^3 p_{ij} n_j \equiv p_{ij} n_j.$$

Здесь p_{ij} - компоненты тензора полных напряжений, а $n_j = \cos(n, j)$ - косинус между нормалью к площадке и осью j . В частности, для компоненты p_x на каждой площадке имеем

$$P_x = p_{xx}n_x + p_{xy}n_y + p_{xz}n_z.$$

Рассмотрим входящие в (3.10) x -составляющие поверхностных сил, действующие на разные грани (их 6 штук) выделенного объема. Для этого надо умножить напряжение на площадь соответствующей грани на косинус между нормалью к ней и осью x (см. табл. 2.1).

Таблица 3.1. Поверхностные силы в направлении x

Грань	Силы	Тип
x	$(p - \sigma_{xx})dydz$	нормальный
$x+dx$	$(-p + \sigma_{xx})dydz$	нормальный
y	$-\sigma_{xy}dxdz$	касательный
$y+dy$	$\sigma_{xy}dxdz$	касательный
z	$-\sigma_{xz}dydx$	касательный
$z+dz$	$\sigma_{xz}dydx$	касательный

Мы выписали все силы, которые действуют на грани элементарного объема V в направлении оси x . Чтобы получить полную силу (интеграл по поверхности S) надо их сложить.

$$\begin{aligned} \int_S p_x dS &= \left\{ (-p + \sigma_{xx}) \Big|_{x+dx} - (-p + \sigma_{xx}) \Big|_x \right\} dydz + \\ &+ \left\{ (\sigma_{xy}) \Big|_{y+dy} - (\sigma_{xy}) \Big|_y \right\} dxdz + \left\{ (\sigma_{xz}) \Big|_{z+dz} - (\sigma_{xz}) \Big|_z \right\} dydx \end{aligned} \quad (3.11)$$

Интегралы по объему от массовых сил и интеграл (9) при $V = dxdydz \rightarrow 0$ представим в виде произведения V на подынтегральную функцию (т.н. теорема о среднем значении). Получим

$$\int_V \rho g_x dV \approx dx dy dz \rho g_x,$$

$$\int_V \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} v_x \right) dV \approx dx dy dz \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} v_x \right)$$

Объединим эти равенства с (3.11) и разделим на $V = dx dy dz \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} v_x \right) &= \rho g_x + \frac{(-p + \sigma_{xx})|_{x+dx} - (-p + \sigma_{xx})|_x}{dx} + \\ &+ \frac{(\sigma_{xz})|_{y+dy} - (\sigma_{xz})|_y}{dy} + \frac{(\sigma_{xy})|_{z+dz} - (\sigma_{xy})|_z}{dz}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что в пределе при $dx, dy, dz \rightarrow 0$ справа записаны частные производные по координатам. Окончательно получаем уравнение импульса в направлении x в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} v_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right\} + g_x \quad (3.12)$$

Уравнения импульсов в направлении y и z аналогичны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} v_y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right\} + g_y, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} v_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right\} + g_z \end{aligned} \quad (3.13)$$

Уравнения движения (3.11) – (3.13) удобно записывать в индексной форме (уравнения Навье):

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + g_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.14)$$

Здесь j - индекс суммирования, который еще называют немым индексом. Слева стоит субстанциональная производная i -й компоненты скорости.

Насколько мы продвинулись к замкнутой системе гидродинамических уравнений, записав три уравнения Навье (3.14) и одно уравнение неразрывности (3.5)? У нас 4 уравнения и 11 неизвестных: 3 скорости, p , ρ

и 6 компонент симметричного тензора напряжений σ_{ij} . Для замыкания системы уравнений требуется выразить σ_{ij} через другие характеристики движения жидкости. Обычно компоненты σ_{ij} связывают со скоростью \vec{v} с помощью эмпирических законов, а они, в свою очередь, определяют модель жидкости.

В последнее время общепризнанной научной гипотезой является линейная модель трения Стокса, которая пригодна для описания самых сложных ламинарных и турбулентных течений и для несжимаемой жидкости выглядят так:

$$\sigma_{ij} = \mu e_{ij}, \quad e_{ij} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.15)$$

где e_{ij} , с^{-1} - тензор скоростей деформации; μ , $\text{Па} \cdot \text{с}$ – динамическая вязкость. Она является свойством жидкости, которая характеризует величину напряжений в жидкости при ее деформации. Наряду с динамической вязкостью часто используют кинематическую вязкость $\eta = \mu / \rho$, $\text{м}^2/\text{с}$.

Закон трения (3.15) – это 6 уравнений, поэтому в случае несжимаемой жидкости ($\rho=\text{const}$) система уравнений (3.5), (3.14), (3.15) становится замкнутой (получается 10 уравнений). В случае сжимаемой жидкости требуется дополнительный закон для определения плотности. Например, уравнение состояния для идеального газа

$$p = \rho RT. \quad (3.16)$$

Но это уравнение требует еще знания температурного поля T .

Задачи к лекции 3

Задача 3.1. Проверить, удовлетворяет ли поле скоростей несжимаемой жидкости с компонентами вектора скорости $v_x = 2x$, $v_y = -2y$, $v_z = x + y$ уравнению неразрывности.

Задача 3.2. Напряженное состояние в любой точке сплошной среды в декартовой системе координат задано тензором

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить вектор напряжения в точке $P(2; 1; \sqrt{3})$ на площадке, касательной в этой точке к цилиндрической поверхности $y^2 + z^2 = 4$.

Задача 3.3. Дан закон движения сплошной среды

$$\begin{aligned} x &= \xi_1, \\ y &= e^t (\xi_2 + \xi_3)/2 + e^{-t} (\xi_2 - \xi_3)/2, \\ z &= e^t (\xi_2 + \xi_3)/2 - e^{-t} (\xi_2 - \xi_3)/2. \end{aligned}$$

Определить компоненты скорости в эйлеровой и лагранжевой форме.

Задача 3.4. Задано поле скоростей

$$v_x = x/(1+t), \quad v_y = 2y/(1+t), \quad v_z = 3z/(1+t).$$

Найти компоненты вектора ускорения среды в эйлеровой точке $\vec{a}_E = \partial \vec{v} / \partial t$ и ускорения материальной частицы $\vec{a} = d\vec{v} / dt$ в лагранжевой и эйлеровой форме.

Лекция 4.

ЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

Плотность несжимаемой жидкости постоянна, в математической модели она выступает как заданный параметр. Уравнение неразрывности при этом имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4.1)$$

Уравнения Навье, или уравнения движения в напряжениях (3.14), после подстановки в них закона трения Стокса (3.15) преобразуются к виду

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu e_{ij}}{\partial x_j} + g_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

Если вязкость постоянна, то член, выражающий дивергенцию вязких напряжений можно записать так:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu e_{ij}}{\partial x_j} = \eta \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \eta \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \eta \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \eta \Delta v_i + \eta \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}.$$

Но последнее слагаемое равно нулю из-за уравнения неразрывности (4.1), поэтому из (4.2) получаем уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \Delta v_i + g_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.3)$$

Здесь

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

- оператор Лапласа.

Система уравнений (4.1), (4.3) замкнута, т.к. она содержит 4 уравнения для трёх компонент скорости и давления.

В развернутой форме для компонент вектора скорости $\vec{v} = (u, v, w)$ в декартовой системе координат x, y, z уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta u + g_x, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \Delta v + g_y, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta w + g_z. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Слева в уравнениях импульса (4.5) стоят ускорения dv_i / dt , а справа – плотности поверхностных сил давления $\partial p / \partial x_i$, вязких сил $\eta \Delta v_i$, и массовых сил g_i .

Напомним, что при выводе уравнений Навье-Стокса были сделаны следующие предположения:

- 1) жидкость несжимаема,
- 2) напряжения и скорости деформации связаны законом Стокса,
- 3) вязкость жидкости постоянна.

Уравнение теплопроводности (конвективного теплопереноса)

Взгляд на температуру как меру внутренней энергии, связанную со скоростью движения молекул, используется в физике, а в гидромеханике принят феноменологический подход, при котором изучают макроскопические свойства переноса тепла. В частности, вводится понятие теплового потока между по-разному нагретыми частями сплошной среды.

Тепловой поток Q – это количество тепла, которое переносится в единицу времени:

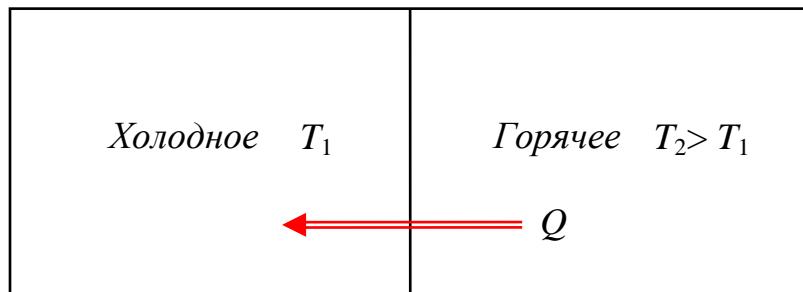
$$[Q] = \text{Дж/с} = \text{Вт}.$$

Плотность теплового потока $q = Q/S$ - это тепловой поток, протекающий через единицу площади.

$$[q] = \text{Вт}/\text{м}^2.$$

Тепло переносится разными механизмами:

1. Молекулярная *теплопроводность* или термодиффузия. В горячей части среды молекулы более подвижны, они возбуждают соседние, и там повышается температура. Процесс теплопроводности продолжается, пока температура во всех частях тела не сравняется. Тепловой поток всегда направлен от горячего к холодному.



2. *Конвекция*. Вызвана движением жидкости. Поток жидкости непосредственно переносит свою температуру из одной части пространства в другую. Если среда нагрета равномерно, конвективного потока тепла не будет даже при наличии движения. Конвективный поток тепла равен нулю и в том случае, если тепло нагрето неравномерно, но течение отсутствует.
3. *Излучение*. Это передача тепла в виде электромагнитных волн. Например, солнечная энергия или тепло от раскаленной печки.

При выводе уравнения энергии ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда

- а) Диссипация (нагрев из-за внутреннего трения) отсутствует.

- b) Работа сил давления не учитывается.
- c) Удельная энталпия (теплосодержание) h , Дж/кг определяется как cT , где c , Дж/(кг·К) – теплоемкость.

Выделим, как и раньше, контрольный объем V и рассмотрим закон изменения его полной энталпии

$$H = \int_V \rho h dV = \int_V \rho c T dV, \text{ Дж}$$

Если \vec{q} , Вт/м² – плотность теплового потока, а f , Вт/м³ – удельная мощность внутренних источников тепла, то баланс энергии выразится уравнением

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \underbrace{\int_V \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} dV}_{\substack{\text{изменение энталпии} \\ \text{в объеме}}} + \underbrace{\int_S \rho h v_n dS}_{\substack{\text{поток энталпии} \\ \text{через поверхность}}} = -\underbrace{\int_S q_n dS}_{\substack{\text{приток тепла} \\ \text{через поверхность}}} + \underbrace{\int_V f dV}_{\substack{\text{внутренние} \\ \text{источники}}}.$$

Знак минус в правой части появился потому, что положительным, т.е. направленным на повышение энергии объема, считается поток тепла через границу S внутрь тела, т.е. противоположно внешней к поверхности S нормали n . Используя теорему Остроградского-Гаусса, преобразуем поверхностные интегралы в объемные,

$$\int_S \rho h v_n dS = \int_V \nabla(\rho h \vec{v}) dV; \quad \int_S q_n dS = \int_V \nabla \vec{q} dV$$

и, учитывая произвольность контрольного объема V , запишем уравнение энталпии

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla(\rho h \vec{v}) = -\nabla \vec{q} + f, \quad h = cT. \quad (4.6)$$

Как и для уравнения импульсов, уравнение неразрывности позволяет записать левую часть уравнения (4.6) в виде субстанциональной производной удельной энталпии h . Заметим, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} &= \rho \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial \rho}{\partial t}; \quad \nabla(\rho h \vec{v}) = h \operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \cdot \operatorname{grad} h \Rightarrow \\ \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla(\rho h \vec{v}) &= \rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \operatorname{grad} h + h \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right\}.\end{aligned}$$

Для определения потока \vec{q} привлечем линейный закон *теплопроводности Фурье*

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T = -\lambda \nabla T, \quad (4.7)$$

в котором λ , Вт/(м·К) – коэффициент теплопроводности среды. В общем случае λ – это тензор теплопроводности

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}, \quad \lambda_{ij} = \lambda_{ji}.$$

Поясним природу этого тензора на примере теплопроводности композитных (составленных из частей с разными теплофизическими свойствами) твердых тел. Если однородные компоненты композита имеют разную теплопроводность и входят в состав тела с определенным геометрическим «рисунком», то средние теплофизические свойства такого композитного тела не удается задать одной скалярной функцией, необходимо использовать тензор. Компонента λ_{ij} означает теплопроводность через площадку с нормалью i при тепловом потоке в направлении j . Пример – слоистые композиты. Если направления слоев совпадают с направлением осей координат, то тензор будет диагональным.

Заметим, что последнее выражение в фигурных скобках – это уравнение неразрывности, оно равно нулю. Поэтому при $h = cT$ с учетом (4.7) получаем

$$\rho \left\{ \frac{\partial(cT)}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) cT \right\} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + f \quad (4.8)$$

Если теплофизические свойства среды постоянны ($\rho, c, \lambda = \text{const}$), то из (4.8) получаем *уравнение конвективной теплопроводности*

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = a\Delta T + \phi \quad (4.9)$$

где $a = \lambda/(c\rho)$, $\text{м}^2/\text{с}$ – коэффициент температуропроводности, $\phi = f/c\rho$.

Уравнение (4.9) вместе с тремя уравнениями Навье-Стокса (4.5), уравнением неразрывности (4.4) образуют замкнутую систему уравнений для математического описания нестационарных трехмерных течений и тепловых полей вязкой жидкости с постоянными свойствами. Эта система получена с использованием двух упрощенных линейных законов: вязкого трения Стокса и молекулярной теплопроводности Фурье. История математического моделирования показывает, что эти законы имеют достаточно широкую область применения в практических задачах.

В твердых телах $\vec{v} = 0$ и данное уравнение переходит в уравнение теплопроводности, а в жидкостях и газах при наличии движения конвекции, как правило, играет определяющую роль в переносе тепла.

Начальные и граничные условия для уравнений термогидродинамики вязкой несжимаемой жидкости

Дифференциальные уравнения, описывающие динамику жидкости, определяют решение с точностью до произвольных постоянных. Единственное решение можно выбрать, если задать дополнительно начальные и граничные условия – это краевые условия. Начальное условие задает исходные поля в момент $t = 0$, т.е. в момент начала моделирования процесса. Граничные условия определяют взаимодействие скоростного потока или потока тепла с границами и находящимися в потоке телами. Дифференциальные уравнения в совокупности с краевыми условиями формируют краевую задачу для конкретного гидродинамического процесса.

Пример 1. Постановка краевых задач для уравнений Навье – Стокса. Изучение обтекания тела плоским потоком несжимаемой вязкой жидкости в канале.

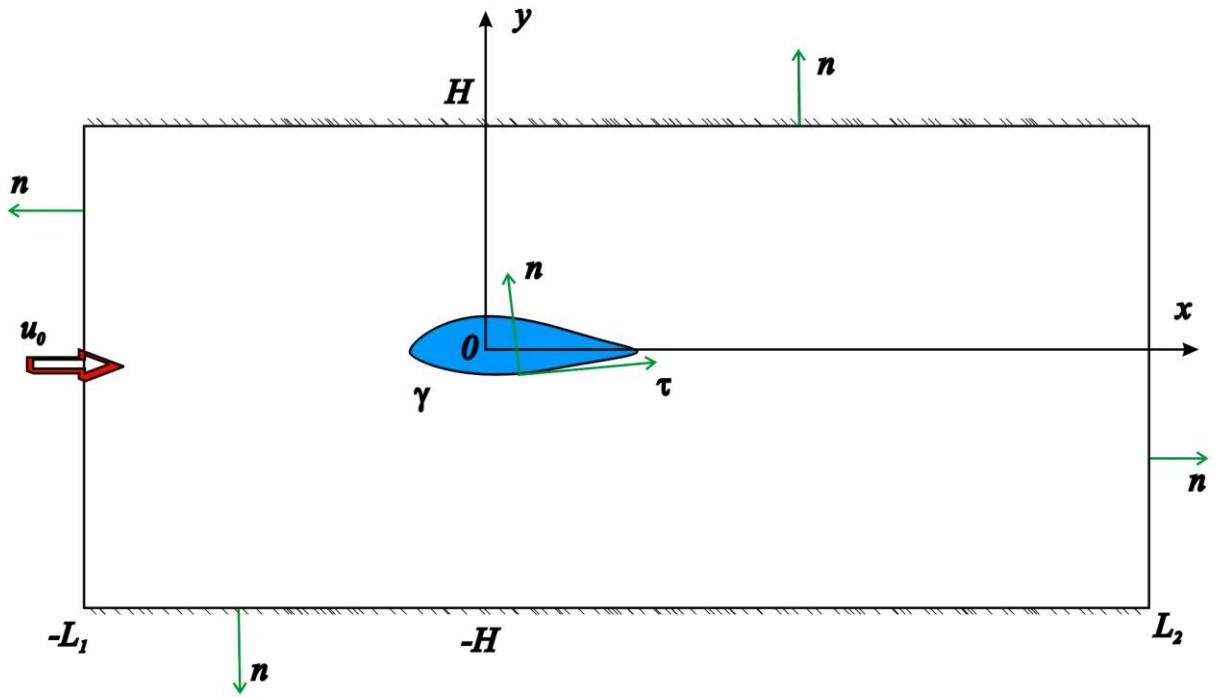


Рис. 4.1. К постановке задачи об обтекании тела в канале потоком вязкой жидкости

Двумерные уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью, при отсутствии массовых сил, можно получить из трехмерной системы (4.4), (4.5), положив $w = 0$, $g_i = 0$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta u, \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \Delta v, \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Эта система замкнута: 3 уравнения для 3-х неизвестных u, v, p . Чтобы математическая модель течения была полностью определена, следует задать краевые условия. Начальное условие

$$t = 0: u = 0, v = 0, \tag{4.11}$$

означает, что движение начинается из состояния покоя.

Границные условия для скорости могут выглядеть так.

На стенках канала $y = \pm H$ ставится условие *прилипания*, согласно которому нормальная и касательная скорости на стенках равны нулю:

$$y = \pm H : u = 0, v = 0. \quad (4.12)$$

При этом равенство $u = 0$ означает отсутствие скольжения, а условие $v = 0$ отражает тот факт, что стенка канала непроницаема для жидкости.

На входе в канал задается профиль скорости, т.е. эпюра.

$$x = -L_1 : u = u_0(y); v = 0. \quad (4.13)$$

На выходе из канала ставятся т.н. «мягкие» условия

$$x = L_2 : \partial u / \partial x = 0, v = 0, \quad (4.14)$$

которое означает, что в выходном сечении за телом течение близко к плоско-параллельному ($v = 0$), и его характеристики не меняются $\partial u / \partial x = 0$.

На поверхности тела обычно тоже задают условия прилипания

$$(x, y) \in \gamma : v_n = u \cos(n, x) + v \cos(n, y) = 0, v_\tau = 0. \quad (4.15)$$

Кроме условий для скорости на всех границах, требуется и одно условие для давления. Можно, например, задать постоянное давление на входе в канал

$$x = -L_1 : P = p_0. \quad (4.16)$$

Пример 2. Постановка краевых задач для уравнения конвективной теплопроводности.

Пусть теплофизические свойства жидкости постоянны ($\rho, c, \lambda = \text{const}$), тогда теплоперенос описывается уравнением конвективной теплопроводности (4.9)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \Delta T + f, \quad (4.17)$$

где a – температуропроводность, u, v – компоненты вектора скорости, которые определяются, например, как решение задачи Навье-Стокса (4.10) – (4.16), f – интенсивность внутренних источников тепла.

Сформулируем краевые условия для уравнения (4.17), моделирующие неизотермическое обтекание тела в канале, см. рис. 4.1.

Температурное поле жидкости в момент $t = 0$ задается начальным условием

$$t = 0 : T = T_0(x, y). \quad (4.18)$$

Если на входе в канал жидкость имеет ту же температуру, стенки канала теплоизолированы, а обтекаемое тело нагрето до температуры T_1 , которая поддерживается постоянной, то граничные условия будут следующими:

$$x = -L_1 : T = T_0.$$

$$y = \pm H : \frac{\partial T}{\partial n} = 0. \quad (4.19)$$

$$(x, y) \in \gamma : T = T_1.$$

$$x = L_2 : \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

На выходе из канала вновь поставлены т.н. «мягкие» граничные условия.

Поскольку краевые условия и коэффициенты уравнений в поставленных задачах стационарны (на зависят от времени), то и решения этих краевых задач при $t \rightarrow \infty$ могут быть либо установившимися, либо периодическими.

Примеры численного решения задач показаны на следующих картинах.



Рис. 4.2. Периодическое (автоколебательное) решение задачи Навье-Стокса: вихревая дорожка Кармана в следе за обтекаемым цилиндром

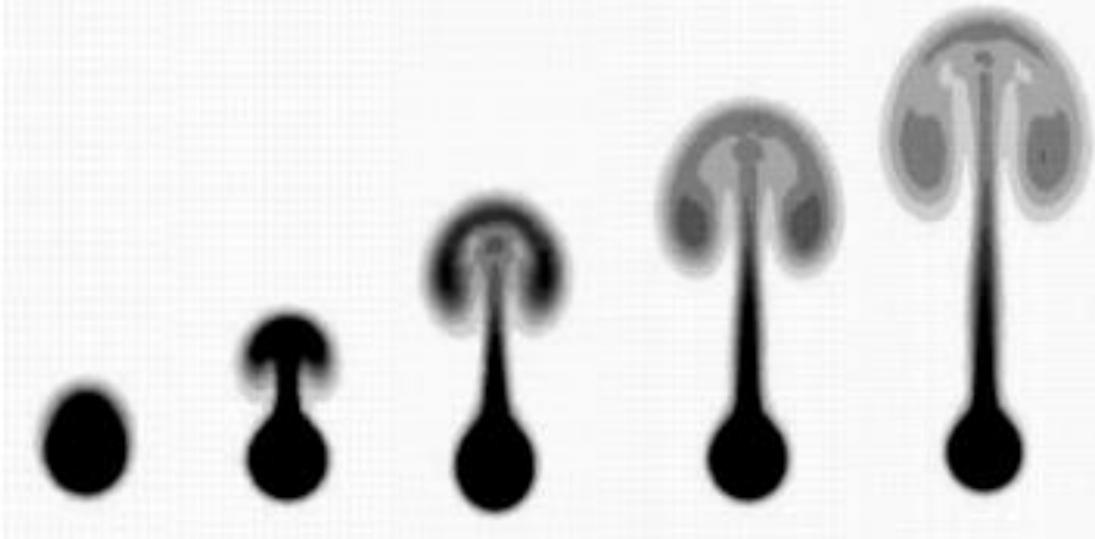


Рис. 4.3. Развитие температурного поля при свободной конвекции вязкой жидкости около нагретого кругового цилиндра в канале. Поле скорости получено как решение задачи (4.10) с правой частью $g_y = g\beta(T - T_0)$, которое в рамках приближения Буссинеска моделирует термическое расширение жидкости

Простейшие аналитические решения краевых задач гидродинамики и теплообмена

1. Плоское установившееся течение в канале.

Предположим, что течение установившееся, поперечная компонента скорости отсутствует, $v = 0$. Тогда уравнения (4.10) принимают вид

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta u, \\
-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Из уравнения неразрывности следует, что скорость не зависит от x , конвективный член равен нулю, а оператор Лапласа превращается в $\eta \partial^2 u / \partial y^2$. В результате получаем уравнение

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{4.21}$$

Левая часть уравнения (4.21) не зависит от x , значит и правая часть тоже не зависит от x . Более того, из второго уравнения (4.20) следует, что давление не зависит и от y , т.е. $\partial p / \partial x$ - это константа. Обозначим

$$-C = \frac{1}{\nu \rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \tag{4.22}$$

и запишем уравнение (4.21) в виде

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -C.$$

Общее решение этого дифференциального уравнения – это парабола

$$u(y) = -0.5Cy^2 + ay + b. \tag{4.23}$$

Произвольные постоянные a, b определим с помощью граничных условий прилипания (4.12) на стенках канала

$$y = \pm H : u = 0;$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} u(H) = -0.5CH^2 + aH + b = 0 \\ u(-H) = -0.5CH^2 - aH + b = 0 \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение из первого, находим $a = 0$, поэтому $b = 0.5CH^2$.

Подставим эти коэффициенты в (4.23) и найдем эпюру продольной скорости жидкости в канале

$$u(y) = 0.5C(H^2 - y^2), \quad y \in [-H, H]. \quad (4.24)$$

Заметим, что коэффициент C , определенный в (4.22), имеет размерность $(\text{м} \cdot \text{с})^{-1}$ и положителен, когда давление падает слева-направо, т.е. с ростом x . При этом и скорость $u \geq 0$. Вычислить коэффициент C легко: для этого достаточно замерить давление в произвольной точке x и на расстоянии $x + L$. После этого можно вычислить производную

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p(x+L) - p(L)}{L},$$

а затем и коэффициент C по формуле (4.22).

С помощью решения (4.24) можно определить некоторые важные функционалы.

1) *Максимальная скорость*, очевидно, наблюдается на оси канала и равна

$$u_{\max} = u(0) = 0.5CH^2 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2) *Расход* жидкости на 1 метр ширины канала равен

$$Q = 2 \int_0^H u(y) dy = C \left(H^3 - \frac{H^3}{3} \right) = \frac{2}{3} CH^3 \frac{\text{м}^3}{\text{с}} / \text{м}.$$

3) *Средняя скорость* равна

$$\bar{v} = \frac{Q}{2H} = \frac{1}{3} CH^2 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

4) *Напряжение сдвига* (касательное напряжение) на стенке канала равно

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy}(-H) = \mu CH = \frac{p(x+L) - p(L)}{L} H \text{ Па.}$$

Если в последней формуле выбрать $L = H$, получим простую формулу измерения напряжения трения на стенке: $\tau_w = p(x+H) - p(H)$.

2. Температурное поле

Предположим, что в том же бесконечно длинном канале нижняя стенка поддерживается при температуре T_0 , а верхняя – при температуре T_1 . При установившемся течении из уравнения (4.17) получаем задачу

$$\frac{d^2T}{dy^2} = 0, \quad T(-H) = T_0, \quad T(H) = T_1.$$

Ее решение дает линейное распределение температуры поперек канала

$$T(y) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{2H} (y + H).$$

Задачи к лекции 4

Задача 4.1. Определить функцию давления $p(x, y)$ для плоского течения несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью в отсутствии массовых сил по заданному полю скоростей $u = 2x$, $v = -2y$.

Задача 4.2. Жидкость вытекает из бака при температуре $T_0 = 1$ и течёт по тонкой трубе со скоростью $V = 1$. Температура окружающей среды $T_s = 0$, коэффициент теплообмена равен $\alpha = 1$. Найти температуру жидкости на расстоянии $x = 1$ от бака.

Указание. Распределение температуры $T(x)$ описывается уравнением конвективной теплопроводности

$$V \frac{dT}{dx} = \frac{d^2T}{dx^2} - \alpha(T - T_s), \quad x > 0, \quad T(0) = T_0, \quad T(\infty) = T_s.$$

Лекция 5. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИ- НАМИКИ

Завихренность

Описание течений с помощью уравнений Навье-Стокса и конвективной теплопроводности подразумевало постановку краевых задач, в которых искомыми функциями были скорость $\vec{V} = (u, v, w)$; давление p ; температура T ; плотность ρ . В случае изотермических течений несжимаемой жидкости с постоянными свойствами задача для скорости и давления отделяется от тепловой задачи, т.е. может быть решена независимо. Число неизвестных сокращается до четырех: u, v, w, p . Такие уравнения и задачи называются задачами Навье-Стокса *в естественных переменных*.

Оказывается, что можно сформулировать математические задачи в других переменных, которые также полно описывают течение жидкости. В частности, широко используется такая важная характеристика течения жидкости, как *завихренность*. Она, как правило, обозначается буквой ω . В трехмерном течении это вектор с компонентами $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, который определяется как векторное произведение оператора $\vec{\nabla}$ на вектор скорости $\vec{V} = (u, v, w)$:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V}. \quad (5.1)$$

Напомним, что векторное произведение двух векторов $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ вычисляется следующим образом:

$$c_x = a_y b_z - b_y a_z, \quad c_y = a_z b_x - b_z a_x, \quad c_z = a_x b_y - b_x a_y. \quad (5.2)$$

При этом вектор \vec{c} направлен ортогонально плоскости, натянутой на вектора \vec{a} и \vec{b} .

Применив формулу (5.2) для векторного произведения векторов $\vec{\nabla} = (\partial / \partial x, \partial / \partial y, \partial / \partial z)$ и $\vec{v} = (u, v, w)$, получим компоненты вектора вихря:

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (5.3)$$

Другим способом вычисления векторного произведения является определитель

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w \end{pmatrix} = \vec{i} \frac{\partial w}{\partial y} + \vec{j} \frac{\partial u}{\partial z} + \vec{k} \frac{\partial v}{\partial x} - \vec{i} \frac{\partial v}{\partial z} - \vec{j} \frac{\partial w}{\partial x} - \vec{k} \frac{\partial u}{\partial y} = \\ &= \vec{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты (векторы единичной длины), направленные вдоль координатных осей x, y, z .

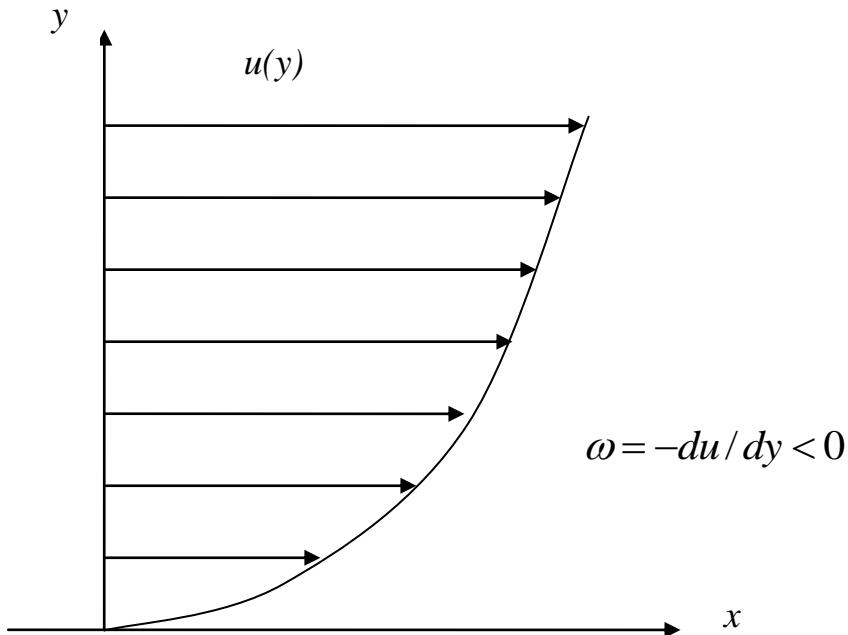


Рис. 5.1. Эпюра скорости в сдвиговом течении и знак завихренности

Пример: плоское течение $u, v \neq 0; w = 0$. Из всех компонент завихренности остается одна

$$\omega = \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Рассмотрим сдвиговое течение над горизонтальной стенкой при $v = 0$, см. рис. 5.1. Получаем $\omega_z = -\frac{\partial u}{\partial y}$. Поскольку $\frac{\partial u}{\partial y} > 0$ (см. рисунок), то $\omega < 0$.

Вообще, направление вращения жидкости по часовой стрелке дает отрицательную завихренность, а против часовой – положительную.

Уравнения движения в форме Громеки - Ламба

Запишем уравнение Навье-Стокса для x -компоненты скорости.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta u + g_x.$$

Левая часть представляет собой субстанциональную производную. Формулировка Громеки-Ламба основана на том, чтобы выразить субстанциональную производную скорости через кинетическую энергию $V^2/2$ и завихренность ω .

Поскольку $V^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = u^2 + v^2 + w^2$, то

$$\frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - v \frac{\partial v}{\partial x} - w \frac{\partial w}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) + v \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_{-\omega_z} + w \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)}_{\omega_y} \end{aligned}$$

Последние два слагаемых можно записать в виде

$$-v\omega_z + w\omega_y \equiv -\left(u_y \omega_z - u_z \omega_y \right) = -\left(\vec{V} \times \vec{\omega} \right)_x = \left(\vec{\omega} \times \vec{V} \right)_x,$$

и окончательно получаем уравнение движения в форме Громеки-Ламба для x -составляющей вектора скорости

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) + (\vec{\omega} \times \vec{V})_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta u + g_x. \quad (5.5)$$

Остальные два уравнения для v и w получаются аналогично и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} \right) + (\vec{\omega} \times \vec{V})_y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \Delta v + g_y, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) + (\vec{\omega} \times \vec{V})_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta w + g_z. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Удобно записать все три уравнения движения в индексной форме:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{V^2}{2} \right) + (\vec{\omega} \times \vec{V})_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \Delta u_i + g_i, \quad i=1,2,3 \quad (5.7)$$

Замечание. В научной литературе можно встретить формулировку, при которой используется $2(\vec{v} \times \vec{w})_x$. Это связано с тем, что раньше завихренность находили как $\frac{1}{2}$ от того, что используем мы.

Уравнения в форме Громеки-Ламба удобны при рассмотрении невязких течений, когда член $\eta \Delta u_i$ исчезает. Как увидим позднее, из этой формы получается интеграл Бернулли.

Уравнение движения в форме переноса завихренности

Эта форма особенно удобна и применяется для описания плоских течений несжимаемой жидкости ($w=0, \rho=\text{const}$). Основная идея введения новых преобразованных переменных состоит в том, чтобы вместо трех уравнений в естественных переменных (двух уравнений Навье-Стокса и уравнения неразрывности) получить 2 уравнения для завихренности

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \text{ и функции тока } \psi.$$

Функция тока определяется следующими равенствами:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.8)$$

Из этого определения следует, что функция ψ может быть задана с точностью до произвольной постоянной. В самом деле,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial(\psi + C)}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial(\psi + C)}{\partial x}.$$

Такие функции, непосредственные значения которых не важны (именно поэтому они определяются с точностью до произвольной постоянной), а важны лишь их производные, называются *потенциалами*.

Физически ψ задает расход жидкости. Изолинии функции тока $\psi = \text{const}$ являются линиями тока, т.е. такими линиями, касательные к которым в каждой точке совпадают по направлению с вектором скорости. Чем чаще линии тока, тем больше расход в данном сечении.

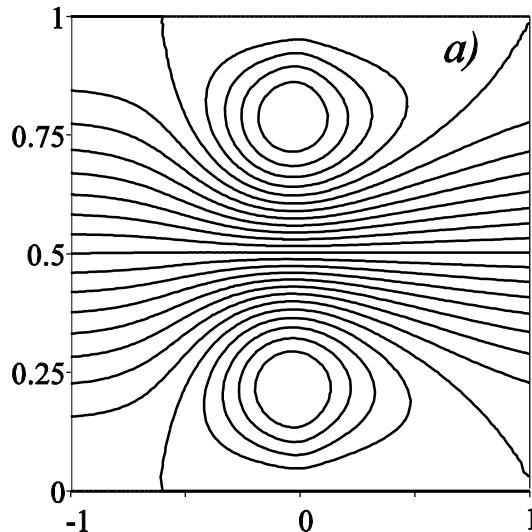


Рис. 5.2. Пример линий тока в термоконвективных течениях

Функция тока замечательна тем, что определенные по формуле (5.7) компоненты скорости автоматически удовлетворяют уравнению неразрывности. В самом деле,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \equiv 0.$$

Для функции тока получается простое уравнение. Продифференцируем $u = \partial\psi/\partial y$ по y , а $v = -\partial\psi/\partial x$ по x и вычтем второе из первого. Получим уравнение Пуассона с вихрем в правой части,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x},$$

или

$$-\Delta\psi \equiv \omega. \quad (5.9)$$

Осталось вывести уравнение для завихренности ω . Используем для этого уравнения Навье-Стокса

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta u + g_x \quad (5.10)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \Delta v + g_y \quad (5.11)$$

Продифференцируем (5.10) по y , а (5.11) – по x и вычтем из второго первое. Получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \eta \Delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} = \\ &= \frac{d\omega}{dt} = \eta \Delta \omega + f, \quad f \equiv \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Итак, вместо трех уравнений Навье-Стокса (2 уравнения для u, v и уравнение неразрывности для p) получились два уравнения для *преобразованных переменных* – завихренности ω (5.12) и функции тока ψ (5.9):

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \eta \Delta \omega + f, \\ -\Delta \psi = \omega \end{cases} \quad (5.13)$$

При этом давление не входит в постановку задачи. Если требуется найти u, v, p , то в рамках модели переноса завихренности поступают так: вначале для всех t решается система (5.13), находят функции ω, ψ , а заодно по

формулам (5.8) и скорости u, v . После того, как задача решена, для отдельных моментов времени решается самостоятельная задача для давления. Уравнение для p получают из уравнений импульсов (5.10), (5.11). Первое дифференцируют по x , второе по y и складывают. В результате получается *уравнение Пуассона* для давления

$$-\Delta p = 2\rho \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Краевые задачи для уравнений в преобразованных переменных

В параграфе 4.3 мы формулировали начальные и граничные условия для уравнений Навье-Стокса в естественных переменных для задачи обтекания тела в канале. Ниже будет дана постановка краевых условий для той же задачи в преобразованных переменных $\psi - \omega$.

Начальные условия. Поскольку уравнение для ψ стационарно, начальное условие нужно лишь для ω . Если в начальный момент жидкость покоится, то и вихрей нет,

$$t = 0 : \omega = 0.$$

Граничные условия на твердых стенках. Это верхняя и нижняя стеки канала, $y = \pm H$, а также поверхность тела γ . Задается условие прилипания, то есть нормальная и касательная компоненты скорости равны нулю. В терминах функции тока, согласно определению (5.7), эти компоненты запишутся так:

$$v_n = -\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0, \quad v_\tau = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0. \quad (5.14)$$

Здесь, как и раньше, n и τ - нормаль и касательная к границе. Из первого условия (5.14) следует, что функция тока ψ не меняется вдоль границы, то есть любая твердая стенка является линией тока для течения вязкой жидкости. Следовательно, на трех обтекаемых поверхностях имеем

$$x, y \in \Gamma_i : \psi = \psi_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.15)$$

Значения констант ψ_i можно задать следующим образом:

$$y = -H/2 : \psi = 0; \quad (5.16)$$

$$y = +H/2 : \psi = Q; \quad (5.17)$$

$$x, y \in \gamma : \psi = \psi_\gamma = Q/2; \quad (5.18)$$

Здесь Q - полный расход жидкости в канале.

Границное условие (5.18) справедливо лишь для случая, когда тело симметрично относительно оси канала, и режим его обтекания стационарен. В общем случае определение значения ψ_γ функции тока на контуре γ представляет собой отдельную проблему. Вообще говоря, математическое решение сформулированной задачи существует при любом заданном значении ψ_γ , поэтому для однозначного выбора этой константы необходимо дополнительное условие. Данное условие сводится к требованию непрерывности давления p на обтекаемом контуре. Поскольку давление было исключено при выводе уравнений в преобразованных переменных, воспользуемся исходными уравнениями Навье-Стокса (5.10), (5.11), записав их в непосредственной близости к контуру γ и выбрав в качестве пространственных координат длину дуги s и нормаль n вместо x и y . Поскольку на контуре из-за прилипания скорость обращается в ноль, получим

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \eta \Delta u_s, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \eta \Delta u_n. \quad (5.19)$$

Здесь для простоты мы отбросили массовые силы. В выбранной локальной системе координат s, n с началом в точке контура оператор Лапласа от компонент скорости будет содержать лишь производные по нормали:

$$\Delta u_s = \frac{\partial^2 u_s}{\partial n^2}, \quad \Delta u_n = \frac{\partial^2 u_n}{\partial n^2}.$$

Кроме того, завихренность вблизи стенки будет равна

$$\omega = \frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{\partial u_s}{\partial n} = \frac{\partial u_s}{\partial n},$$

а из уравнения неразрывности получим

$$\frac{\partial u_n}{\partial n} = -\frac{\partial u_s}{\partial s}.$$

В результате имеем

$$\Delta u_s = -\frac{\partial \omega}{\partial n}, \quad \Delta u_n = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_n}{\partial n} \right) = \frac{\partial}{\partial n} \left(-\frac{\partial u_s}{\partial s} \right) = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u_s}{\partial n} \right) = -\frac{\partial \omega}{\partial s}.$$

Подставив эти выражения в (5.19), получим так называемые *граничные условия Пирсона*

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\mu \frac{\partial \omega}{\partial n}, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = -\mu \frac{\partial \omega}{\partial s}. \quad (5.20)$$

Если взять какую-либо точку A на контуре γ и проинтегрировать первое из условий (5.20) по всему замкнутому контуру, то слева получим скачок давления в точке A : $[p(A)] \equiv p(A+0) - p(A-0)$. Требование непрерывности давления выражается равенством $[p(A)] \equiv 0$ для любой точки контура.

При этом из (5.20) получим нелокальное (т.е. записанное не для одной точки, а для всего контура) условие

$$\int_{\gamma} \frac{\partial \omega}{\partial n} d\gamma = 0, \quad (5.21)$$

которое следует использовать для определения константы ψ_{γ} .

Условия (5.16) – (5.18), когда на границе задана искомая функция, называются граничными условиями 1-го рода, или главными граничными условиями, или условиями Дирихле. Все эти граничные условия относятся к уравнению для функции тока, в то время как для вихря нет физически содержательных граничных условий на стенках. Вместо них имеются «лишние» граничные условия Неймана для ψ , выраженные вторым равенством (5.14), а именно

$$x, y \in \Gamma_i : \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.19)$$

Границные условия на входе и выходе канала.

На входе $x = -L_1$ задан профиль продольной скорости $u_0(y)$, причем такой, что расход равен Q . Это значит, что

$$\int_{-H}^H u_0(y) dy = Q.$$

Согласно определениям функции тока и завихренности на входе имеем

$$u_0 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \omega = -\frac{\partial u_0}{\partial y},$$

поэтому граничные условия для входного сечения канала можно записать так:

$$x = -L_1 : \psi(y) = \int_{-H}^y u_0(\tau) d\tau, \quad \omega(y) = -\frac{\partial u_0(y)}{\partial y} \quad (5.20)$$

В частности, если поток однороден, то $u_0 = Q/(2H)$, и условия (5.20) принимают вид

$$x = -L_1 : \psi(y) = \frac{Q}{2H}(y + H), \quad \omega = 0. \quad (5.21)$$

На выходе обычно задают «мягкие» граничные условия вида

$$x = L_2 : \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0. \quad (5.22)$$

Либо, если заранее известно, что течение там установилось, используют аналитические решения для ψ и ω .

Задачи к лекции 5

Задача 5.1. Дано плоское течение несжимаемой жидкости:

$$u = A(x^2 - y^2)/r^4, \quad v = A(2xy)/r^4, \quad w = 0, \quad \text{где } r^2 = x^2 + y^2.$$

Доказать, что такое поле скоростей удовлетворяет уравнению неразрывности и является безвихревым.

Задача 5.2. Записать уравнения движения в форме Громеки-Ламба

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\vec{\omega} \times \vec{v})_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \Delta v_i + g_i, \quad i = 1, 2, 3$$

для случая плоского течения жидкости $u, v \neq 0, w = 0$ и удостовериться в том, что все слагаемые имеют одинаковую размерность

Задача 5.3. Доказать, что при установившемся движении среды $\partial u_i / \partial t = 0$ линии тока и траектории совпадают.

Задача 5.4. Определить и отобразить на графике линии тока плоского течения и описать движение среды по полю скоростей $u = Kx, v = -Ky$.

Задача 5.5. Имеется плоский поток несжимаемой жидкости, в котором $u = -A y / r^2$, где $r^2 = x^2 + y^2$. Найти во всем потоке компоненту v , если $v(x=0, y) = 0$, при всех значениях y . Показать, что движение безвихревое, а линии тока – окружности.

Задача 5.6. Приведите пример поля скоростей (v_x, v_z) в вертикальной плоскости, описывающего перемещение более холодных слоев воды с поверхности в глубину.

Лекция 6. ВАЖНЫЕ ЧАСТНЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ УРАВНЕНИЙ ТЕРМО- ГИДРОДИНАМИКИ

В общем случае неизотермическое движение вязкой сжимаемой жидкости описывается следующими уравнениями.

1. Уравнения Навье-Стокса (3 уравнения для компонент вектора скорости u, v, w).
2. Уравнение неразрывности (для давления p).
3. Уравнение конвективной теплопроводности (для расчета температуры T).
4. Уравнение состояния, которое связывает p, ρ, T (для идеальных газов это уравнение имеет вид $p = \rho RT$).

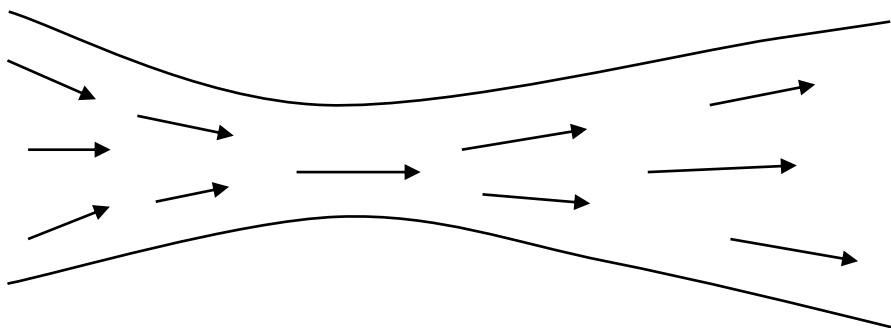
Имеем 6 уравнений и 6 неизвестных (u, v, w, ρ, T, p).

Эта система чрезвычайно сложна и в общем виде с трудом поддается решению даже современными численными методами на мощных ПК. Поэтому часто рассматривают различные упрощения этой системы, которые, тем не менее, в ряде случаев адекватно моделируют течение жидкости.

Установившееся (квазистационарное) движение

Движение называется установившимся, если в каждой точке пространства (x, y, z) его параметры (u, v, w, ρ, T, p) не меняются со временем.

Рассмотрим пример течения жидкости в криволинейном канале.



С точки зрения Эйлера, в каждой фиксированной точке пространства никаких изменений параметров течения со временем не происходит. В математике это означает, что во всех уравнениях частные производные по времени равны нулю:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

Для трехмерных задач Навье – Стокса в естественных переменных это приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta u + g_x, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \Delta v + g_y, \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta w + g_z, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0; \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} &= a \Delta T + f. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Важное свойство установившихся течений состоит в том, что линии тока неизменны и совпадают с траекториями движения частиц. Частным случаем установившегося течения является равновесие жидкости. Это происходит, когда течения нет, т.е. $\vec{v} \equiv 0$.

Гидростатика

Раздел гидродинамики, который изучает равновесие жидкости, называется *гидростатикой*. Уравнения гидростатики получаются из общих уравнений (6.1), если в них формально положить $\vec{v} \equiv 0$. При этом из (6.1) получаем 4 уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \text{grad } p &= \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{g}, \\ a \Delta T &= -f, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= g_x, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = g_y; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = g_z; \\ -a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) &= f. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь g_x, g_y, g_z – компоненты вектора ускорения массовой силы.

Закон Паскаля

В случае, когда массовые силы отсутствуют, т.е. $g=0$, из этих уравнений получается, что

$$\operatorname{grad} p = 0 \quad (6.3)$$

откуда следует, что $p = \text{const}$. Это решение носит название **закона Паскаля**, который гласит, что в покоящейся жидкости (газе) при отсутствии массовых сил давление постоянно.

Гидростатическое давление у поверхности Земли

Пусть массовая сила представляет собой гравитационное поле Земли, тогда ускорение равно

$$\vec{g} = (0, 0, -g), \quad g = 9.81 \text{ м/с}^2.$$

Ось z направлена вверх, а ускорение вниз, поэтому знак минус. Из (6.2) получаем

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (6.4)$$

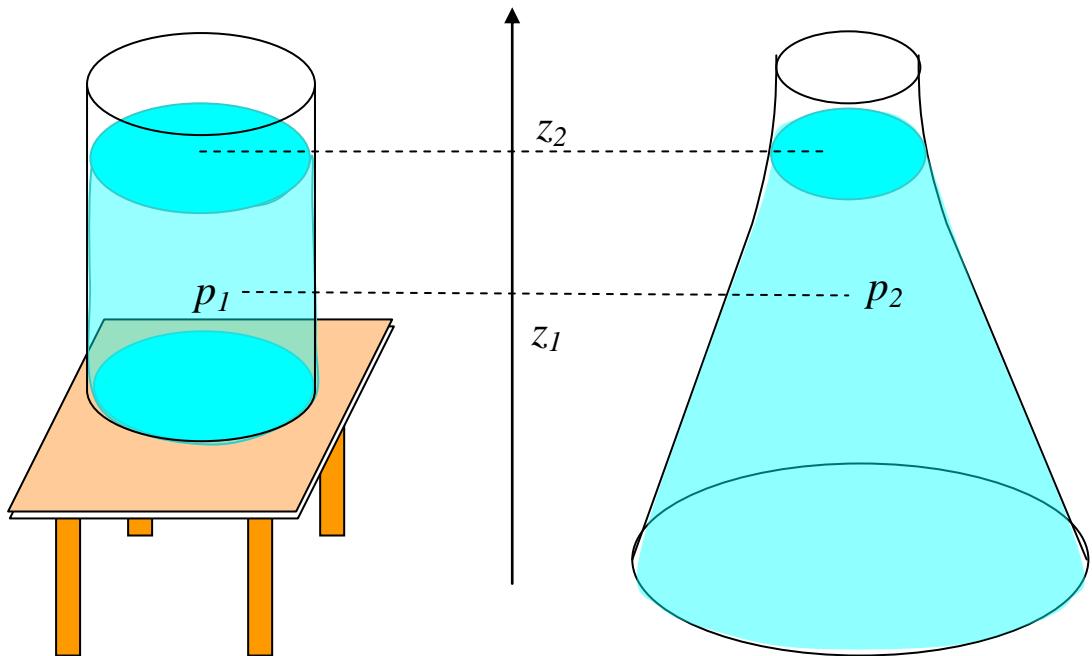
Первые два уравнения констатируют, что давление не зависит от плановых координат x, y , а изменяется только с высотой z . Если проинтегрировать третье уравнение (6.4) от 0 до h , где ноль совпадает с поверхностью земли, а через p_0 обозначить давление на этой поверхности, то получим

$$p(h) = p_0 - g \int_0^h \rho(z) dz \quad (6.5)$$

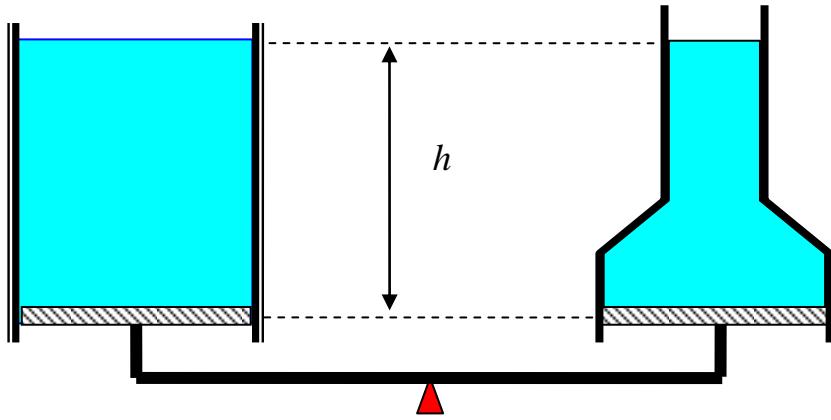
Так как $g > 0$ и $\rho > 0$, то давление убывает с ростом высоты. Более того, интеграл в правой части выражения (6.5) представляет собой вес столба жидкости высотой h на основании 1 м^2 . Из (6.5) мы видим, что давление жидкости в сосудах не зависит от их формы, а определяется только высотой. Данный факт иллюстрируют следующие примеры.

1) Давление в жидкости на одном уровне одинаково,

$$p_1 = p_2 = p_{atm} + (z_2 - z_1)\rho.$$



2) На чашки весов, выполненные в виде свободно скользящих по стенкам поршней, давят одинаковые силы ρgh . Весы будут в равновесии.



Равновесие идеального газа в поле силы тяжести.

Барометрическая формула

Уравнение состояния идеального газа $p = \rho RT$, отсюда находим плотность газа в зависимости от температуры

$$\rho = \frac{p}{RT}. \quad (6.6)$$

Подставим (6.6) в (6.4) и получим

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{p g}{R T}, \quad p(0) = p_0. \quad (6.7)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для давления $p(z)$. Оно решается методом разделения переменных:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dz}{RT} g, \quad \ln\left(\frac{p(z)}{p_0}\right) = -\frac{g}{R} \int_0^z \frac{dh}{T(h)}.$$

Отсюда получаем *барометрическую формулу*

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{g}{R} \int_0^z \frac{dh}{T(h)}\right) \quad (6.8)$$

Она даёт закон изменения давления с высотой, если известно распределение температуры по высоте. В частном случае, если считать атмосферу *изотермической*, когда $T=\text{const}$, из формулы (6.8) получаем

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{g z}{R T}\right) \quad (6.9)$$

Эта формула показывает, что давление в изотермической атмосфере убывает с высотой по экспоненциальному закону.

Стандартная атмосфера

Если атмосфера неизотермична, источников тепла нет ($f = 0$), а коэффициент температуропроводности постоянен ($a = \text{const}$), то уравнение для температуры (6.2) будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$T(z) = T_0 - k z, \quad (6.10)$$

где T_0 - температура на поверхности Земли, k - коэффициент, который определяется на основе измерений. Для атмосферы $k = 0.65^0/100 \text{ м}$.

Эту формулу можно применять до высоты 11 км (тропосфера), а выше ее полагают $T = \text{const} = -56^0\text{C}$ (стратосфера). Описанную модель называют *стандартной атмосферой*, ее используют для имитации высотных полетов. Но процессы в атмосфере всегда нестационарные, на распределение давления и температуры влияют излучение Солнца, геотермический поток, изменение состава воздуха при ионизации. Перемены давления и температуры неизбежно приводят к конвективным течениям, поэтому стандартная гидростатическая модель атмосферы является весьма грубою.

Несжимаемая атмосфера

Пусть плотность атмосферы постоянна, $\rho = \text{const}$. Интегрируем уравнение (6.4)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad p(0) = p_0$$

по z и получаем линейное убывание давления с высотой:

$$p = p_0 - \rho g h \quad (6.11)$$

С помощью формулы (6.11) легко вычислить точку, в которой давление равно нулю:

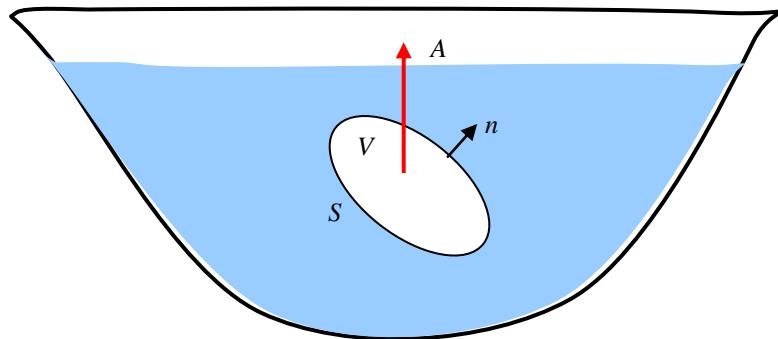
$$h = p_0 / \rho g. \quad (6.12)$$

Это грубая оценка для толщины атмосферы.

$$p_0 = 1 \text{ атм} = 10^5 \text{ Па} = 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 10^5 \frac{\text{КГ М}}{\text{с}^2 \text{ м}^2} = 10^5 \frac{\text{КГ}}{\text{с}^2 \text{ м}}$$

$$\rho = 1 \frac{\text{КГ}}{\text{м}^3}, \quad g \approx 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \Rightarrow h = 10^4 \frac{\text{КГ}}{\text{с}^2 \text{ м}} \frac{\text{м}^3}{\text{КГ}} \frac{\text{с}^2}{\text{м}} = 10^4 \text{ м} = 10 \text{ км}$$

Закон Архимеда



Рассмотрим сосуд, заполненный жидкостью. Поместим в него тело объемом V , с поверхностью S , внешнюю нормаль к S обозначим через \vec{n} . Считаем, что жидкость покойится, поэтому сила \vec{A} , действующая на тело, сводится к давлению:

$$\vec{A} = \int_S \vec{p}_n dz = \int_V \nabla p dz = \int_V \rho \vec{g} dV \quad (6.13)$$

Здесь применена формула Остроградского-Гаусса. Учтем, что у поверхности Земли при гидростатике $\nabla p = \rho \vec{g} = \rho(0, 0, -g)$. Получим выражения для компонент вектора силы Архимеда

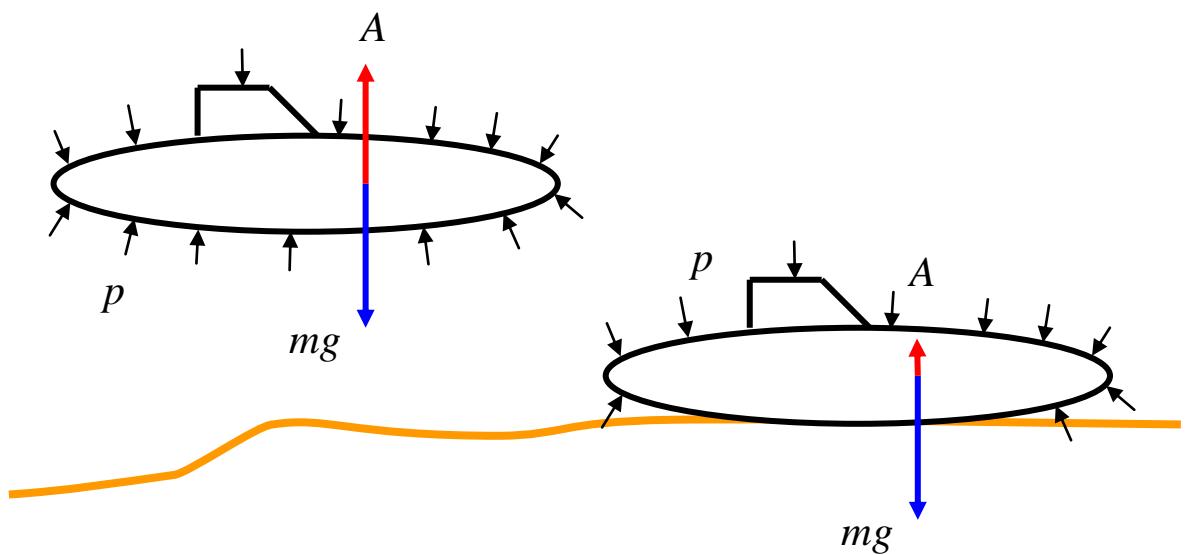
$$\vec{A} = (0, 0, A_z), \quad A_z = -g \int_V \rho dV = -m g \quad (6.14)$$

Таким образом, сила Архимеда равна весу жидкости, заключенной в объеме тела и действует вверх. Точнее говоря, сила Архимеда направлена в сторону, противоположную вектору массовых сил. В случае, когда в качестве такой силы выступает инерция (например, при стационарном вращении жидкости в центрифуге), сила Архимеда будет направлена к оси вращения. На этом основаны сепараторы, предназначенные для быстрого извлечения примесей из жидкости.

Эта формула справедлива только для гидростатики. Кроме того, для применения формулы (6.14) необходимо, чтобы поверхность тела S была замкнута.

Пример 1. Подводная лодка.

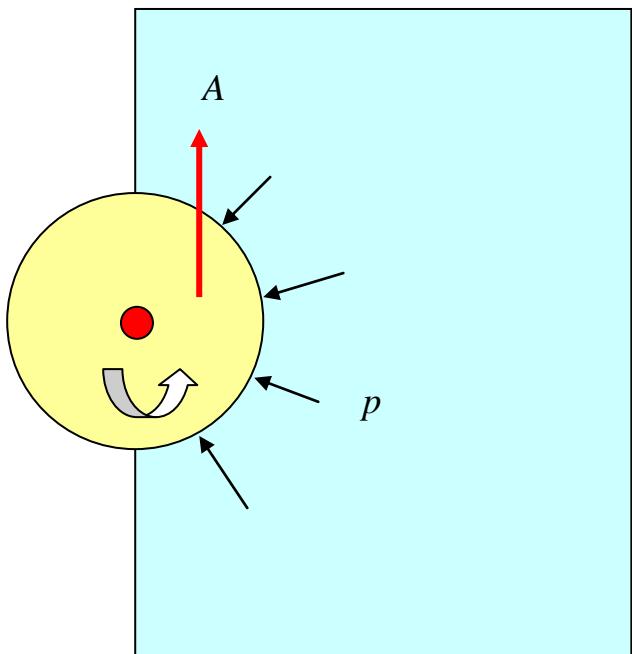
Подводная лодка плавает, потому что ее вес уравновешивается выталкивающей силой Архимеда. Но стоит ей коснуться дна, как сама она больше не всплынет. Это связано с тем, что на часть ее поверхности, лежащую на дне, не действует давление. Чтобы поднять лодку, нужно подвести жидкость под ее дно. В принципе, если дно пористое (песок), то в порах почти то же давление воды, что и в окружающей воде. Однако площадь пор составляет обычно не более половины площади касания, поэтому давление снизу на лодку всегда будет меньше, и Архимедова сила не вытолкнет лодку.



Пример 2. «Вечный двигатель».

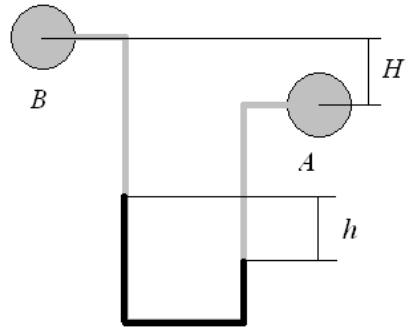
В боковую стенку сосуда с водой вмонтирован цилиндр с закрепленной осью, способный вращаться вокруг оси без трения; при том зазор между ним и стенкой устроен так, что жидкость не выливается.

Кажется, что за счет силы Архимеда шарик, сделанный из легкого (плавучего) материала, будет вращаться, т.к. его левая часть «захочет» всплыть. Но на самом деле он не вращается, так как равнодействующая сил давления направлена через центр шарика, и поэтому крутящий момент равен нулю. Это явление называется парадоксом Жуковского.



Задачи к лекции 6

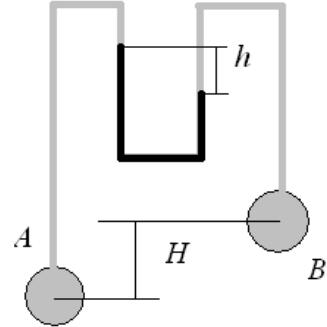
Задача 6.1. Определить разность давлений в точках, находящихся на осях труб А и В (рис 1), заполненных водой, если разность уровней ртути $h = 30 \text{ см}$. Разность уровней осей труб $H = 100 \text{ см}$, $\rho_{pm} = 13600 \text{ кг/м}^3$.



Ответ: 46844 Па.

Задача 6.2. Высота столба ртути, измеренная по дифференциальному манометру (рис. 2), равна $h = 50 \text{ см}$. Определить разность давлений в точках А и В, если $H = 30 \text{ см}$. Трубы заполнены водой.

Ответ: 58800 Па.



Задача 6.3. Определить глубину погружения h плавающего в воде деревянного ($\rho_{д} = 800 \text{ кг/м}^3$) конуса, если его высота равна 3 м.

Ответ: 2.785 м (по закону Архимеда вес вытесненной воды равен весу конуса).

Задача 6.4. Определить равнодействующую величину давления

$$P = \int_{\Sigma} p d\sigma, \quad (\Sigma - \text{поверхность})$$

и положение центра давления

$$x_c = \frac{1}{P} \int_{\Sigma} x p d\sigma, \quad y_c = \frac{1}{P} \int_{\Sigma} y p d\sigma$$

воды на вертикальную пластину высотой h и шириной b , верхняя граница которой совпадает с поверхностью воды.

Ответ: $x=0$, $y=2h/3$.

Задача 6.5. Известно, что плотность среды зависит от температуры. При этом коэффициент теплового расширения определяется следующим образом

$$\beta_t = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p,$$

откуда $\rho_1 = \rho_0 e^{-\beta_t \Delta T}$ или $\rho_1 = \rho_0 (1 - \beta_t \Delta T) \Big|_{\Delta \rho - \text{мало}}$ при малых изменениях плотности.

Определить плотность воды в открытой емкости при температуре окружающей среды $t = 30^\circ\text{C}$, если $\beta_{\text{воды}} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$.

Задача 6.6. Известно, что плотность жидкости зависит от давления. При этом коэффициент объемного сжатия записывается в виде

$$\beta_p = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_t = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_t,$$

откуда $\rho_1 = \rho_0 e^{\beta_p \Delta p}$ или $\rho_1 = \rho_0 (1 + \beta_p \Delta p) \Big|_{\Delta \rho - \text{мало}}$.

Давление в самой глубокой точке океана составляет приблизительно 1100 атм. Определить плотность морской воды при таком давлении. Плотность морской воды на поверхности $\rho_0 = 1030 \text{ кг/m}^3$, $\beta_{\text{воды}} = 0.45 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$.

Ответ: ($\rho / \rho_0 = 1.046$, $1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}$).

Задача 6.7. Какова будет плотность воды в паровом котле при температуре $t_1 = 152^\circ\text{C}$ и давлении $p_1 = 5 \text{ бар}$?

Ответ: $\rho = 909 \div 916 \text{ кг/m}^3$.

Задача 6.8. В нерастяжимой оболочке воздушного шара объемом 525 м^3 , имеющей в нижней части небольшое отверстие, содержится воздух. На сколько градусов надо нагреть воздух внутри шара, чтобы шар взлетел? Температура атмосферы 300°K , давление 10^5 Па , масса оболочки 10 кг, $R_{\text{возд}} = 287.14 \text{ Дж/(кг}^\circ\text{К)}$.

Лекция 7.

УСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ. ИНТЕГРАЛ БЕРНУЛЛИ

Установившиеся течения – это такие течения, в которых характеристики не меняются со временем. Математически это выражается в том, что частные производные по времени равны нулю, $\partial\theta/\partial t=0$, где θ – разные гидродинамические величины (скорость, давление и т.д.).

Жидкость называется *идеальной*, если ее вязкость настолько мала, что соответствующие напряжения в уравнениях движения можно не учитывать.

Запишем уравнения движения в форме Громеки-Ламба

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\vec{v} \times \vec{\omega}) = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \eta \Delta \vec{v} + \vec{F}. \quad (7.1)$$

Для установившегося течения $\partial \vec{v} / \partial t = 0$. Для идеальной жидкости $\eta \Delta \vec{v} = 0$, т.к. вязкие напряжения в идеальной жидкости отсутствуют.

Выделим в жидкости линию тока ℓ . Вектор скорости направлен по касательной к этой линии.

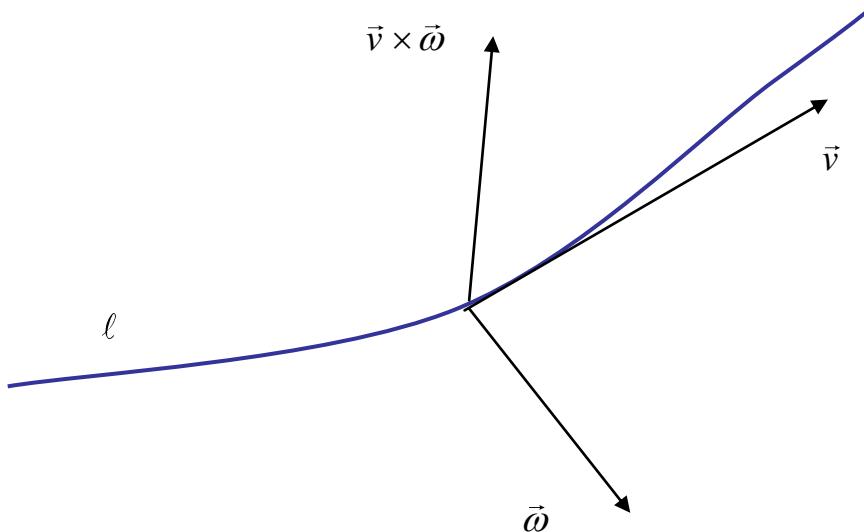


Рис. 7.1. Ориентация векторов скорости \vec{v} , завихренности $\vec{\omega}$ и их векторного произведения на линии тока ℓ

Запишем проекцию уравнения движения (7.1) на выделенную линию тока ℓ . Оператор градиента перейдет в производную по направлению:

$\text{grad} = \nabla \rightarrow \frac{\partial}{\partial l}$. Будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\vec{v} \times \vec{\omega})_l = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} + F_l \quad (7.2)$$

Нетрудно видеть, что проекция векторного произведения на линию тока равна нулю. В самом деле, вектор $\vec{v} \times \vec{\omega}$ ортогонален как завихренности, так и скорости, а направление ℓ коллинеарно скорости. Поэтому векторное произведение $\vec{v} \times \vec{\omega}$ ортогонально ℓ , а проекция представляет собой произведение модулей векторов на косинус угла между ними. Этот косинус равен нулю из-за ортогональности соответствующих векторов.

Дальнейшее упрощение уравнения (7.2) основано на двух допущениях.

1) Массовые силы потенциальны, т.е. существует такая функция G , что $\vec{F} = \text{grad } G$, следовательно

$$F_l = \frac{\partial G}{\partial l}. \quad (7.3)$$

2) Можно ввести функцию давления P , такую, что

$$\text{grad } P = \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \quad \frac{\partial P}{\partial l} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} \quad (7.4)$$

Подставив (7.3) и (7.4) в (7.2), получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial l} \left\{ \frac{v^2}{2} + P - G \right\} = 0.$$

Раз производная вдоль линии тока ℓ равна нулю, значит, выражение в фигурных скобках постоянно вдоль этой линии,

$$\frac{v^2}{2} + P - G = i(\ell). \quad (7.5)$$

Здесь i – постоянная Бернулли. В общем случае эта постоянная интегрирования зависит от выбранной линии ℓ . Равенство (7.5) называют первым интегралом уравнения движения или интегралом Бернулли.

Примеры функции давления P .

1. Несжимаемая жидкость, $\rho = \text{const}$. Очевидно, что $P = p/\rho$, и

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - G = i$$

2. Совершенный (идеальный) газ, $p = \rho RT$, $\rho = p/RT$. Подставив это

выражение в определение функции давления $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial P}{\partial l}$, получим

$$\frac{RT}{p} \frac{\partial p}{\partial l} = RT \frac{\partial}{\partial l} (\ln p) = \frac{\partial P}{\partial l}.$$

В изотермическом случае, когда $T = \text{const}$ (не зависит от давления), имеем

$$P = RT \ln p.$$

Пример потенциала массовых сил G .

Пусть массовая сила F – это сила тяжести, $-g$ – ее ускорение (ось z направлена вертикально вверх). Тогда

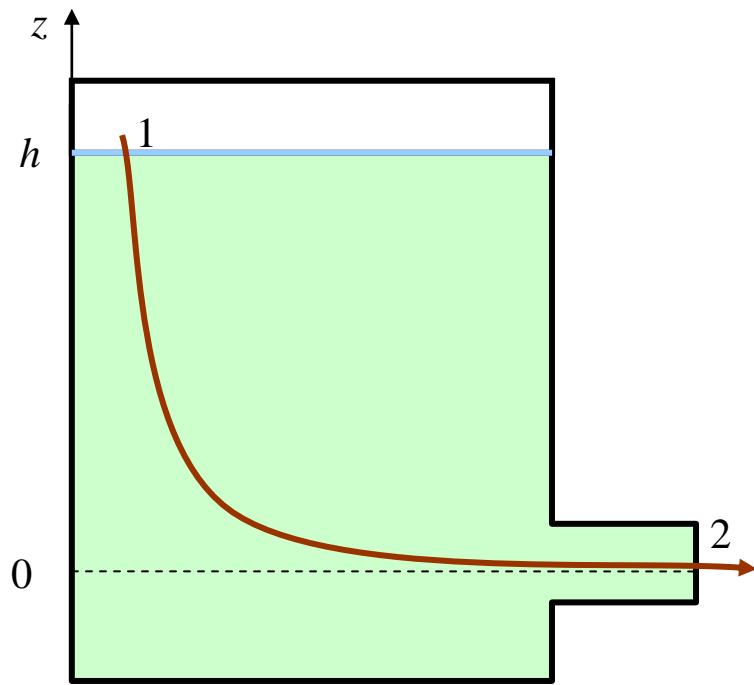
$$G = -gz, \quad F = -g = \frac{dG}{dz}.$$

Использование интеграла Бернулли при решении задач гидравлики

Интеграл Бернулли справедлив для любых течений, включая сильные разрывы в виде скачков уплотнения. Поэтому первый интеграл широко используется при решении самых разнообразных задач гидродинамики и гидравлики.

Если значение постоянной Бернулли известно в какой-либо точке потока, то уравнение (7.5) позволяет вычислить скорость и давление в любой другой точке на линии тока. Ниже представлены несколько примеров.

Пример 1. Истечение несжимаемой жидкости из бака.



Считаем, что $\rho=\text{const}$, следовательно, функция давления и потенциал массовых сил равны

$$P = \frac{p}{\rho}, \quad G = -g z.$$

В точке 1 на свободной поверхности воды давление равно атмосферному, а скорость жидкости близка к нулю: $p_1 = p_{atm}$, $v_1 = 0$. Вычисляем константу Бернулли (7.5) для произвольной линии тока, проходящей с поверхности до выходного отверстия (точка 2 на рисунке).

$$i = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gh = \frac{p_1}{\rho} + gh = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + 0$$

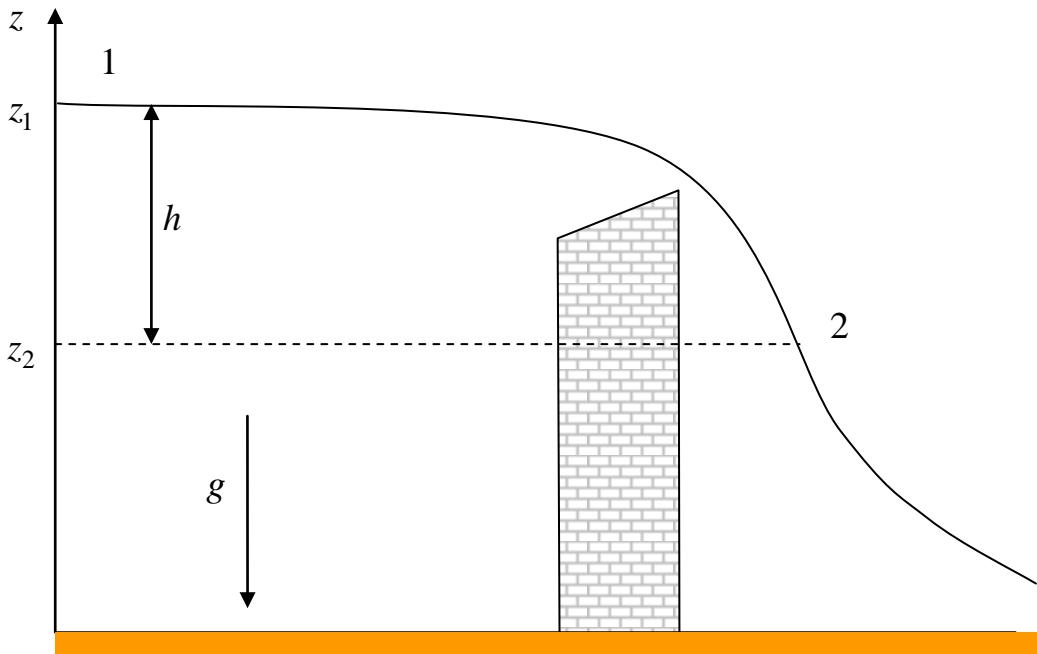
Но в точке 2 давление также равно атмосферному, поэтому $\frac{v_2^2}{2} = g h$, следовательно

$$v_2 = \sqrt{2gh}. \quad (7.6)$$

Если в двухметровой цистерне пробить снизу дырку, то вода будет вытекать из нее со скоростью

$$v_2 = \sqrt{2gh} \approx \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2} = \sqrt{40} = 7 \text{ м/с} = 25 \text{ км/ч.}$$

Пример 2. Водослив через плотину.



Требуется вычислить скорость воды в точке 2. Свободную поверхность потока принимаем за контрольную линию тока ℓ в интеграле Бернулли. Принимаем модель несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$ и потенциальность массовых сил. Вычислим постоянную Бернулли i для точек 1 и 2.

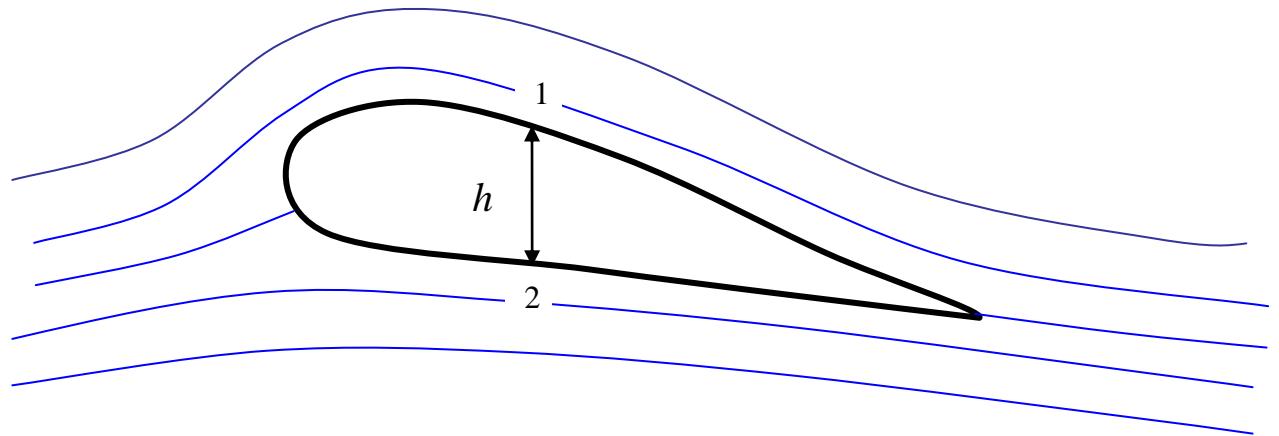
$$i = \frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2$$

Если точка 1 удалена от плотины достаточно далеко вверх по течению, то $v_1 \ll v_2$, так что можно считать, что $v_1 = 0$. Получаем

$$\frac{v_2^2}{2} = g(z_1 - z_2) = gh, \quad v_2 = \sqrt{2gh}.$$

Пример 3. Обтекание крылового профиля.

Рассмотрим движение крыла со скоростью $v_\infty = 100$ м/с в несжимаемой среде. Требуется оценить подъемную силу крыла, если известны оценки скорости на его верхней и нижней поверхностях.



Используем прием, который в гидромеханике называется обращением движения. Вместо того чтобы рассматривать движение тела со скоростью v_∞ в неподвижной жидкости, изучают неподвижное тело, на которое набегает равномерный поток со скоростью v_∞ вдали от тела.

Возьмем две точки – 1 и 2 на верхней и нижней поверхности крыла, пусть толщина профиля ≈ 1 м. Экспериментальные исследования показали, что $v_1 > v_\infty$, а $v_2 < v_\infty$. Предположим, что $v_1 = 105$ м/с, $v_2 = 95$ м/с. Определим перепад давления, который обеспечивает подъемную силу крыла. Воспользуемся интегралом Бернулли, умножив его на ρ :

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_2$$

Перепад давления, обеспечивающий подъемную силу крыла, равен

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho g h + \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2).$$

Видно, что $\Delta p > 0$, т.е. $p_2 > p_1$.

Перепад давления состоит из двух частей: гидростатический перепад $\Delta p_{гст} = \rho g h$; и динамический $\Delta p_{дин} = \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2)$. Оценим перепады

давления при $\rho=1 \text{ кг/м}^3$, $g = 10 \text{ м/с}^2$, $h = 1 \text{ м}$. Получаем гидростатический перепад $\Delta p_{\text{гст}} = 1 \cdot 10 \cdot 1 = 10 \text{ Па}$. При $v_1 = 105 \text{ м/с}$, $v_2 = 95 \text{ м/с}$ динамический перепад давления равен

$$\Delta p_{\text{дин}} = \frac{\rho}{2} (v_1 + v_2)(v_1 - v_2) = \frac{\rho}{2} \cdot 200 \cdot 10 = 1000 \text{ Па.}$$

В задачах обтекания тел динамический перепад давления обычно намного выше, чем гидростатический.

Чтобы вычислить подъемную силу F , надо умножить Δp на площадь крыла S . При $S = 10 \text{ м}^2$ получаем

$$F = \Delta p \cdot S = 10^4 \text{ Па} \cdot \text{м}^2 = 10^4 \text{ Н} = 10^4 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = 1000 \text{ кгс.}$$

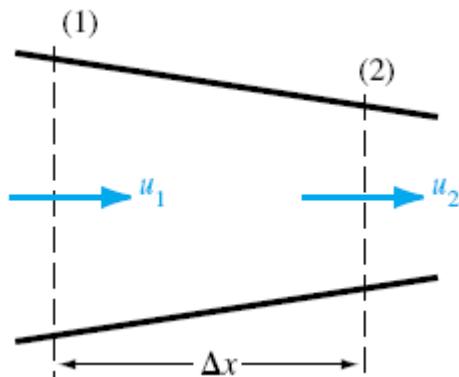
Задачи к лекции 7

Задача 7.1. Записать уравнение Бернулли и убедиться в том, что размерности всех его слагаемых совпадают.

$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho V^2 \pm \rho g Z \quad (Z - \text{алтитуда})$$

Задача 7.2. Жидкость протекает между двумя плоскостями. Датчик скорости в сечении (1) показывает значение $u_1=1$ м/с, датчик в сечении (2) показывает значение скорости $u_2=3$ м/с.

1. оценить среднюю величину ускорения на участке dx , если $dx=10$ см;
2. предполагая жидкость несжимаемой, определить расстояние между поверхностями в сечении (1), если в сечении (2) это расстояние составляет 5 см.



Задача 7.3. Вода бьет струей из фонтана на высоту 8 м. Фонтан имеет форму усеченного конуса высотой $h=0.5$ м (малое выходное сечение диаметром 10 мм, большее (входное) сечение диаметром 50 мм. Определить расход воды и давление у нижнего основания конуса.

Ответ: расход равен $0.98 \cdot 10^3$ м³/с, давление равно

$$p = p_a + 0.802 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$$

Задача 7.4. По горизонтальной трубе переменного сечения протекает жидкость плотностью 950 кг/м³ и расходом 10 л/с. Определить пьезометрические высоты $H = p/\rho g$ в сечениях 1-2-3, если $d_1 = d_2 = 100$ мм, $d_3 = 25$ мм, $p_1 = 0.3$ МПа. Трением пренебречь.

Ответ: $h_1 = h_3 = 32.2$ м, $h_2 = 11.12$ м.

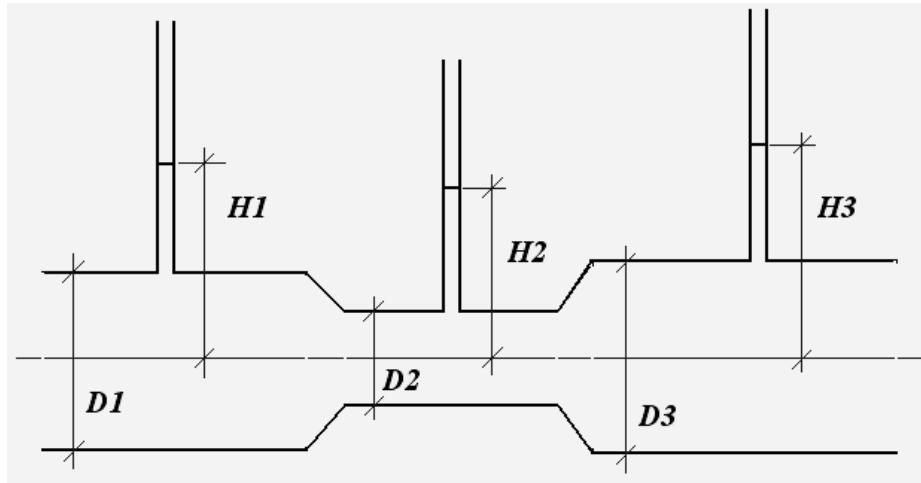


Рис. Схема к задаче 7.4.

Задача 7.5*. Определить форму осесимметричного сосуда, уровень жидкости в котором при ее истечении из дна опускается равномерно (водяные часы – клепсидра).

Задача 7.6. Жидкость с плотностью ρ вращается как твердое тело в вертикальном цилиндрическом круговом сосуде с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси цилиндра. В состоянии покоя жидкость имеет уровень h от дна сосуда и на свободной поверхности давление равно нулю. Радиус основания равен R .

- Вывести уравнение свободной поверхности вращающейся жидкости $\left(\frac{\partial P}{\partial x} = \rho \omega^2 x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho \omega^2 y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \right)$.
- Определить расстояние z_0 вдоль центральной оси сосуда от его дна до поверхности жидкости.
- С какой угловой скоростью надо вращать жидкость, чтобы обнаружился центр дна сосуда?
- Найти давление на дно сосуда.

Лекция 8.

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ. ИНТЕГРАЛ КОШИ-ЛАГРАНЖА

Рассмотрим уравнение Громеки-Ламба

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\vec{\omega} \times \vec{v}) = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(p) + \vec{F} \quad (8.1)$$

при следующих предположениях.

1. *Движение потенциально*, т.е. существует такая функция φ – потенциал течения, что вектор скорости $\vec{v} = (u, v, w)$ определяется как $\vec{v} = \text{grad} \varphi = \nabla \varphi$, или в декартовой системе координат

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (8.2)$$

Если движение потенциально, то в нем нет вихрей. В самом деле, вычислим одну компоненту вектора завихренности:

$$\omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = 0.$$

Аналогично получается, что $\omega_x = 0$ и $\omega_y = 0$, то есть $\vec{\omega} = 0$.

2. Для всего потока можно ввести *единую функцию давления* P , такую что

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla P. \quad (8.3)$$

Заметим, что ранее при рассмотрении интеграла Бернулли функция давления вводилась для каждой линии тока. Для несжимаемой жидкости $P = p/\rho$.

В общем случае ввести единую функцию давления можно для т.н. баротропных течений, когда давление зависит только от плотности, $p=p(\rho)$.

При сделанных предположениях из уравнений (8.1) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi) + \nabla\left(\frac{|\nabla\varphi|^2}{2}\right) = -\nabla P + \vec{F}. \quad (8.4)$$

Если массовые силы также потенциальны, т.е. $\vec{F} = \nabla G$, то из уравнения (8.4) получается равенство

$$\nabla\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{|\nabla\varphi|^2}{2} + P - G\right\} = 0.$$

Оно означает, что выражение в фигурных скобках не зависит от координат, но может зависеть от времени. Поэтому можно записать

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{|\nabla\varphi|^2}{2} + P - G = f(t). \quad (8.5)$$

Здесь f – произвольная функция времени. Уравнение (8.5) называют интегралом Коши – Лагранжа.

Легко заметить, что для установившихся течений, когда $\partial\varphi/\partial t=0$, а f не зависит от времени, интеграл Коши – Лагранжа совпадает с интегралом Бернулли. Использование интеграла Коши-Лагранжа преследует те же цели, что и интеграл Бернулли, а именно: если потенциал φ известен, то можно найти давление. Обычно правую часть f определяют по известным значениям скорости и давления на границе потока. Так как функция f одинакова для всех точек потока, достаточно знать ее значение хотя бы в одной точке. Таким образом, в задаче является неизвестным лишь одна функция – потенциал скорости φ . Чтобы его найти, используют уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (8.6)$$

и определение скорости через потенциал (8.2):

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi. \quad (8.7)$$

Подставив (8.7) в (8.6), получаем классическое уравнение Лапласа для потенциала

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta\varphi = 0. \quad (9.8)$$

В декартовой системе координат оно имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Это уравнение стационарно, т.е. φ не зависит от времени. Потенциальное течение представляет важный класс физически содержательных потоков. Например: волновые движения воды; движения воздуха при распространении в нем акустических волн; непрерывное движение жидкости при обтекании твердых тел; струйные течения. Потенциальное течение является идеализацией реальных течений и в реальной жизни встречается крайне редко. Потенциальность нарушается из-за вязкости, которая провоцирует появление вихрей.

Тем не менее, во многих случаях решение, полученное на основе потенциальных моделей, достаточно хорошо приближают действительность.

Рассмотрим пример потенциального течения.

Движение шара в идеальной жидкости

Будем изучать течение жидкости, вызванное движением шара радиуса a со скоростью V в декартовой системе координат x, y, z , причем шар движется в направлении оси x .

Выберем произвольную точку M на поверхности шара. Её скорость V можно разложить на две компоненты: нормальную $v_r = V \cos \theta$ и касательную $v_\tau = V \sin \theta$. Здесь θ - угол между радиус-вектором или нормалью в точке M и направлением движения (или осью x). Очевидно,

$$\frac{x}{r} = \frac{x}{a} = \cos \theta. \quad (8.9)$$

Требуется определить поле скоростей и давления в окружающей жидкости, вызванной этим движением. Воспользуемся уравнениями потенциального течения несжимаемой жидкости

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \varphi = 0. \quad (8.10)$$

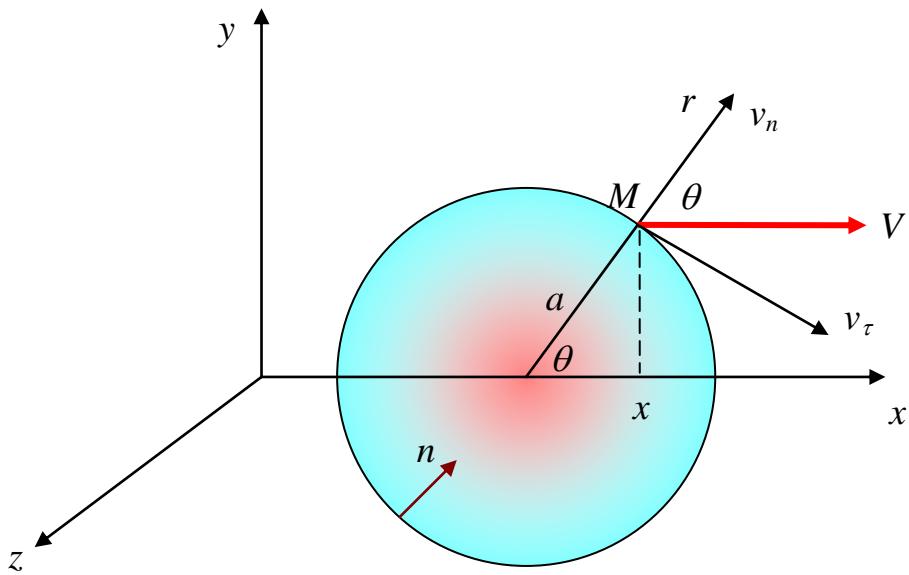


Рис. 8.1. К постановке задачи о движении шара в вязкой жидкости

Это дифференциальное уравнение 2-го порядка имеет бесконечно много решений, выбрать одно из них можно с помощью граничных условий. Вдали от тела возмущение, вносимое шаром в неподвижную жидкость, затухает. То есть в бесконечности можно поставить граничное условие $r = \infty : |\nu| = |\nabla \varphi| \rightarrow 0$. Бесконечность удобно представить как шар большого радиуса, и вместо градиента использовать производную по нормали:

$$r = \infty : \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (8.11)$$

Для того чтобы сформулировать граничные условия на поверхности (в произвольной ее точке M), разложим вектор скорости $\vec{v} = (V, 0, 0)$ на три компоненты (v_r, v_τ, v_z) . Как уже было показано, $v_r = V \cos \theta$, $v_z = 0$, $v_\tau = V \sin \theta$. Нас интересует лишь радиальная (она же нормальная) компонента скорости

$$r = a : v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} = V \cos \theta = V \frac{x}{a} \quad (8.12)$$

Т.о. для потенциала мы получили классическую задачу Неймана. Для того, чтобы найти решение задачи, изучим вначале некоторые *свойства гармонических функций* и частные решения уравнения Лапласа

1) Пусть φ_1 удовлетворяет уравнению (8.10). Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называют *гармоническими*. Так вот, если

φ_1 гармоническая функция, то $\varphi_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$ тоже гармоническая

функция. В самом деле,

$$\Delta \varphi_2 = \Delta \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1 = \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \varphi_1) = 0.$$

Аналогично, все производные от гармонических функций по координатам сами являются гармоническими.

2) Функция $\varphi_2 = C\varphi_1 + B$, где φ_1 удовлетворяет уравнению (8.10), а C и B – постоянные, удовлетворяет уравнению Лапласа, т.е. является гармонической функцией.

3) Функция $\frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, – это частное решение уравнения Лапласа (8.10). В самом деле,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{x}{r^3}$$

$$\text{Аналогично, } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{y}{r^3}; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{z}{r^3}.$$

Вычисляем вторые производные:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{r^3} \right) = -\left(\frac{1}{r^3} - 3 \frac{x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} \right) = -\left(\frac{1}{r^3} - 3 \frac{x^2}{r^5} \right) = \frac{1}{r^3} \left(3 \frac{x^2}{r^2} - 1 \right),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) &= -\left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{y^2}{r^5}\right) = \frac{1}{r^3}\left(3\frac{y^2}{r^2} - 1\right), \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) &= -\left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{z^2}{r^5}\right) = \frac{1}{r^3}\left(3\frac{z^2}{r^2} - 1\right);\end{aligned}$$

Сложив их, получим требуемое равенство

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^3}\left(3\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} - 3\right) = \frac{3}{r^3}\left(\frac{r^2}{r^2} - 1\right) = 0.$$

Итак, мы показали, что функция

$$\varphi = \frac{1}{r} \quad (8.13)$$

является решением уравнения Лапласа. Такое решение описывает течение жидкости от *точечного источника*. Согласно первому свойству гармонических функций производная

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x}{r^3} \quad (8.14)$$

также будет гармонической. Такое решение уравнения Лапласа описывает течение от *диполя* с осью в направлении x . По второму свойству функция Cx/r^3 также гармоническая. С ее помощью мы построим краевой задачи (8.10), (8.11), (9.12), удовлетворив граничные условия за счет выбора константы C . Итак, ищем решение задачи в виде

$$\varphi = \frac{Cx}{r^3} = \frac{C \cos \theta}{r^2} \quad (8.15)$$

Условию на бесконечности (9.11) функция удовлетворяет при любой константе C , поскольку

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{2C \cos \theta}{r^3} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (8.16)$$

Сможем ли мы с помощью выбора постоянной величины C удовлетворить условию (8.12) на поверхности движущегося шара? Для этого надо вычис-

лить производную (8.16) при $r = a$ и подставить её в граничное условие (8.12). Имеем

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{r=a} = - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{2C \cos \theta}{a^3} = -V \cos \theta,$$

откуда находим константу

$$C = -\frac{Va^3}{2}.$$

Подставив ее в формулу (8.15), окончательно получим потенциал течения

$$\varphi = -\frac{Va^3}{2} \frac{x}{r^3} = -\frac{Va^3 \cos \theta}{2r^2}. \quad (8.17)$$

Поле скорости легко найти, дифференцируя решение (8.17) по координатам.

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{Va^3}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) = -\frac{Va^3}{2} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} \right) = \\ &= -\frac{Va^3}{2} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4} \frac{x}{r} \right) = -\frac{Va^3}{2r^3} \left(1 - \frac{3x^2}{r^2} \right), \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{Va^3}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{r^3} \right) = -\frac{Va^3 x}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r^3} \right) = \frac{3Va^3 x}{2r^4} \frac{y}{r} = \frac{3Va^3 xy}{2r^5}, \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{3Va^3 xz}{2r^5}. \end{aligned} \quad (8.18)$$

В плоскости $z = 0$ формулы (8.18) дают картину течения, представленную на рис. 8.2. Такие линии тока течение имеет с точки зрения Эйлера, когда наблюдатель (кинокамера) фиксирован в пространстве, а мимо него проплывает шар. Если же наблюдатель (кинокамера) связан с движущейся сферой, то он будет видеть совершенно другую картину (точка зрения Лагранжа), которая получается с помощью суперпозиции (наложения) двух течений:

- 1) течения (8.17), (8.18) – с точки зрения Эйлера, и
- 2) поступательного движения со скоростью $(-V, 0, 0)$ и потенциалом $-Vx$.

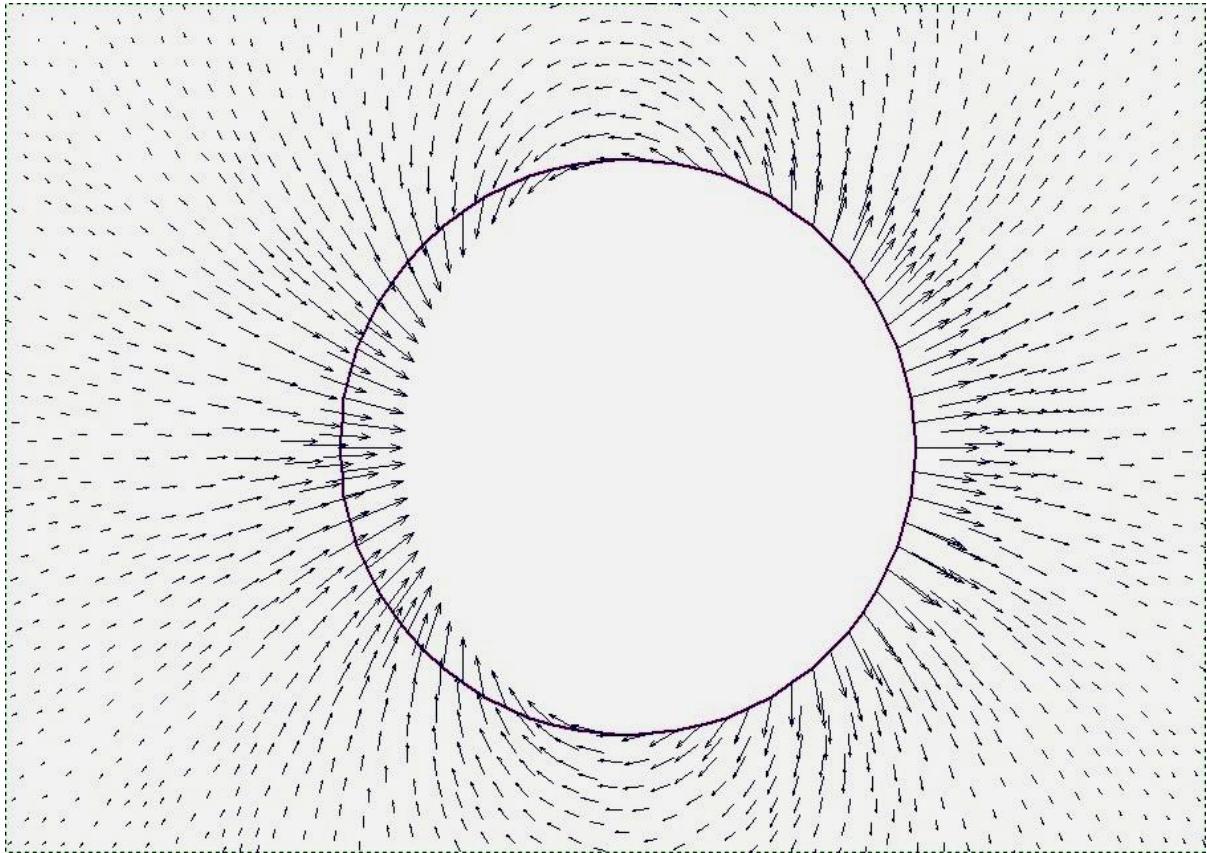


Рис. 8.2. Поле скорости при движении шара в идеальной жидкости.
Точка зрения Эйлера

Это значит, что обтекание сферы в системе координат, связанной с ее центром, будет описываться потенциалом

$$\varphi_L = \varphi - Vx = -Vx \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right), \quad u_L = u - V, \quad v_L = v, \quad w_L = w \quad (8.19)$$

Поле скоростей этого течения показано на рис. 8.3.

Чтобы найти давление используем интеграл Коши – Лагранжа (8.5) , который для несжимаемой жидкости без массовых сил примет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t). \quad (8.20)$$

Из условий на бесконечности ($v = 0, p = p_\infty$) находим $f = p_\infty / \rho$. Для простоты в дальнейшем положим $\rho = 1$.

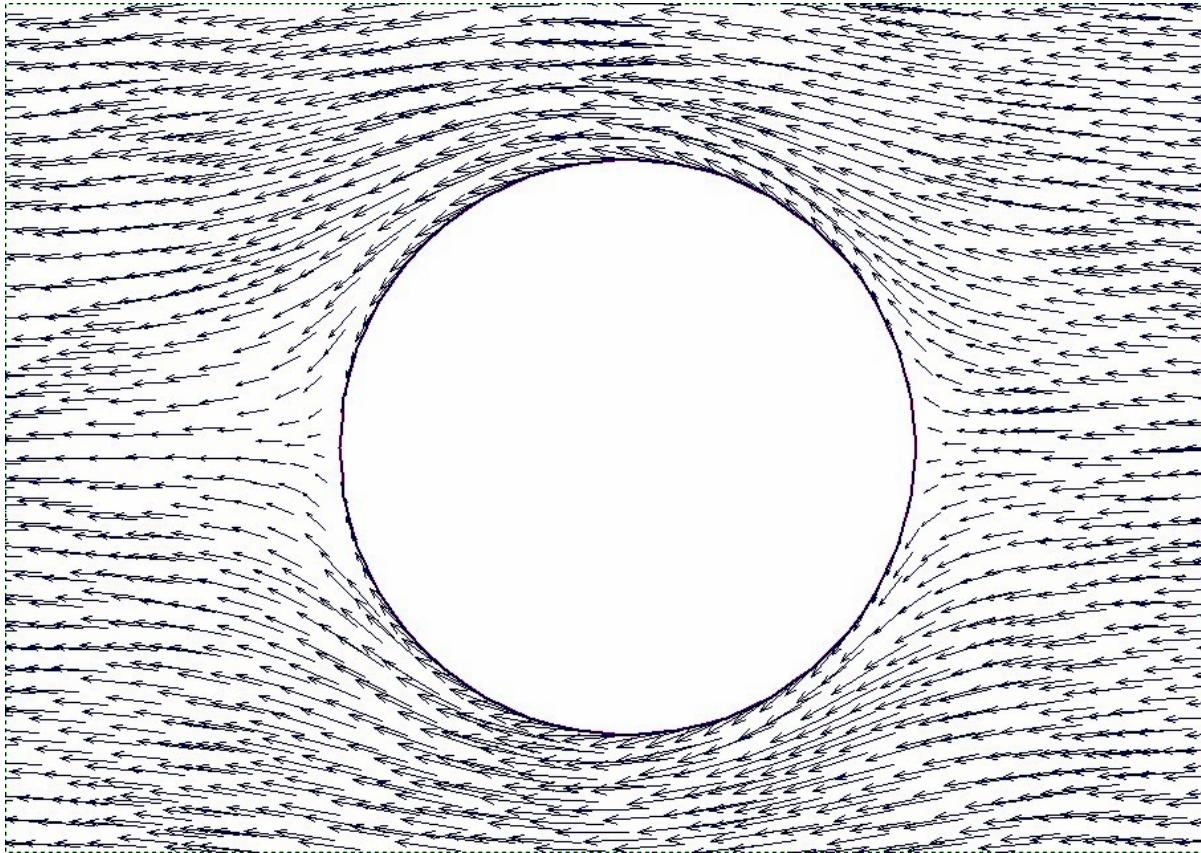


Рис. 8.3. Поле скорости при движении шара в идеальной жидкости.
Точка зрения Лагранжа

Уравнение (8.20) справедливо в системе координат, когда x, y, z отсчитываются от центра шара. Чтобы верно найти давление в жидкости, следует перейти к фиксированным в координатам. При постоянной скорости движения это достигается заменой

$$x \rightarrow x - Vt, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - V \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Тогда интеграл Коши-Лагранжа (8.20) при установившемся движении шара в несжимаемой жидкости принимает вид

$$-Vu + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho}.$$

Отсюда находим поле давления

$$p(x, y, z) = p_\infty + \rho \left(uV - \frac{v^2}{2} \right), \quad (8.21)$$

которое показано на рисунке 8.4.

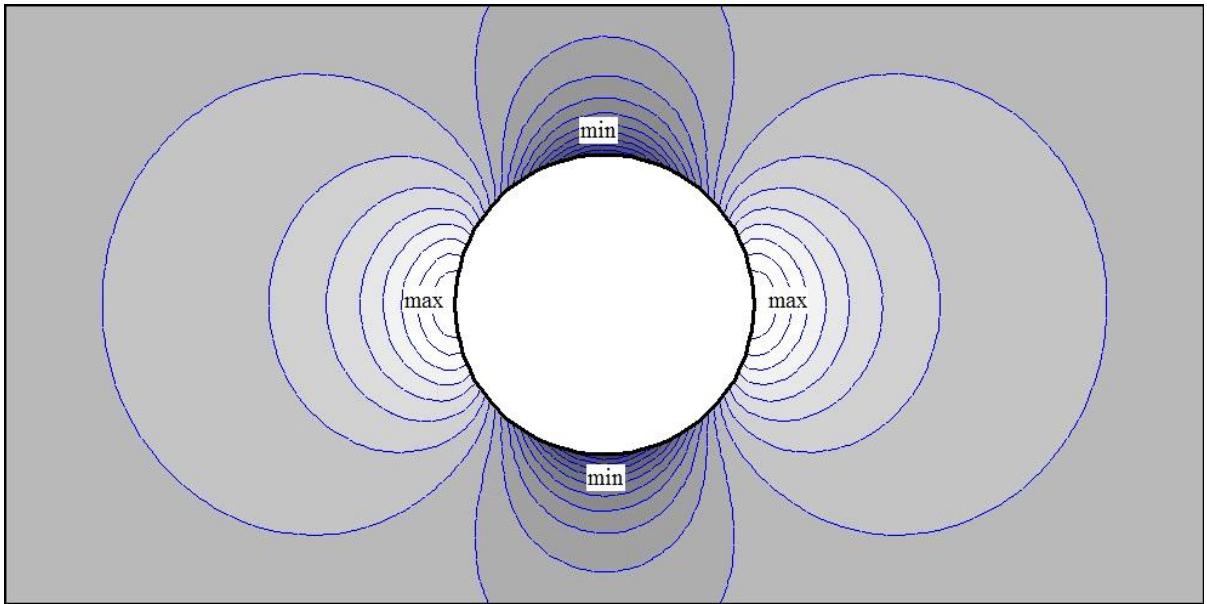


Рис. 8.4. Поле давления при движении шара в невязкой жидкости

Из формулы (8.21) и рис. 9.4 видно, что функция p симметрична относительно центра шара, а значит интеграл от давления по поверхности шара равен нулю. Это значит, что на шар, плывущий в идеальной жидкости, не действуют силы сопротивления. Такая не соответствующая жизненному опыту и научным измерениям ситуация является следствием модели идеальной жидкости и называется *парадоксом Даламбера*. Этот парадокс относится к движению любого тела в идеальной жидкости, а не только шара.

Обращение движения в задачах внешнего обтекания тел

Обращение движения – это прием, который используется в гидродинамике для решения задач о движении тел в жидкости. Суть состоит в следующем: вместо того, чтобы рассчитывать движение тела в покоящейся жидкости, рассматривают неподвижное тело, обтекаемое потоком.

Рассмотрим применение этого приёма на задаче о движении шара в идеальной жидкости. Будем считать, что шар неподвижен, из бесконечности на него набегает поток со скоростью $u = -V$, $v = 0$, $w = 0$. Потенциал

обращенного движения обозначим через $\bar{\varphi}$, он также удовлетворяет уравнению Лапласа, а на бесконечности $|r| = \infty$ он равен $-Vx$. На поверхности шара (и любой непроницаемой границе обтекаемого тела) теперь ставится условие непроницаемости $v_n = v_r = 0$, или $\partial\bar{\varphi}/\partial r = 0$.

Итак, математическая краевая задача об обтекании шара (или любого другого твердого тела) безграничным однородным потоком идеальной жидкости формулируется так:

$$\Delta\bar{\varphi} = 0, \quad \nabla\bar{\varphi}|_{r=\infty} = \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}\Big|_{r=\infty} = -V, \quad \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial n}\Big|_{r=a} = 0 \quad (8.22)$$

Решение этой задачи в силу ее линейности можно найти, используя *суперпозицию*. Суперпозиция – это когда решение одной задачи представлено в виде суммы других, более легких задач. Справедлива только для линейных задач. Это значит, что на решение предыдущей задачи

$$\varphi = -\frac{Va^3}{2} \frac{x}{r^3} = -\frac{Va^3 \cos \theta}{2r^2}$$

надо наложить (прибавить) потенциал $\varphi_1 = -Vx$ который описывает равномерное движение потока со скоростью $u = -V$. Получим решение задачи обтекания в следующем виде:

$$\bar{\varphi} = -\frac{a^3 V}{2r^2} \cos \theta - Vx = -\frac{a^3 V}{2r^2} \cos \theta - Vr \cos \theta = -Vr \cos \theta \left\{ \frac{a^3}{2r^3} + 1 \right\} \quad (8.23)$$

Проверим, удовлетворяет ли этот потенциал граничным условиям непротекания на поверхности шара. Подставим $r = a$ в (8.23) и получим

$$v_r = \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial r} = -V \cos \theta \cdot \left\{ -\frac{2a^3}{2r^3} + 1 \right\} = 0.$$

Таким образом, граничные условия оказались верными, поверхность шара непроницаема.

Задачи к лекции 8

Задача 8.1. Задано распределение скоростей для течения жидкости:

$$u = 4ax, \quad v = 0, \quad w = -4az.$$

Определить потенциал скоростей. Определить распределение давления, принимая жидкость идеальной с удельным весом γ .

Ответ: $p = p_0 - 8\rho a^2 (x^2 + z^2) - \gamma z$.

Задача 8.2. Движение идеальной жидкости задано уравнениями:

$$u = y + z, \quad v = z + x, \quad w = x + y.$$

Является ли движение безвихревым? Если да, то найти потенциал скорости. Является ли данная среда несжимаемой?

Задача 8.3. Дано поле скоростей плоского установившегося потока жидкости

$$u = \frac{2x}{\sqrt{r}}, \quad v = \frac{2y}{\sqrt{r}}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Найти: 1) потенциал скорости, 2) уравнение эквипотенциалей, 3) $\operatorname{div} \vec{V}$.

Ответ: $\psi = \frac{4}{3} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{4}}$, $x^2 + y^2 = c$, $\operatorname{div} \vec{V} = \frac{3}{\sqrt{r}}$, эквипотенциали – линии постоянных значений ψ .

Лекция 9. ПОЛЗУЧИЕ ВЯЗКИЕ ТЕЧЕНИЯ

Это медленные течения, в которых все гидродинамические характеристики определяются вязкими напряжениями, а инерционные эффекты пренебрежимо малы.

Приведем несколько примеров вязких ползучих течений.

1. Движение мелких частиц суспензии.
2. Туманы (мелкие капли жидкости в газе).
3. Течение ледников (вязкость льда велика настолько, что многокилометровые массы льда движутся очень медленно).
4. Процессы смазки. В технических устройствах смазка представляет собой очень тонкие слои (плёнки) жидкости, которые находятся между движущимися поверхностями (например, подшипник). Несмотря на то, что скорости труящихся деталей велики, смазка настолько тонка, что все напряжения в ней определяются вязкостью.

Ползучие течения описываются специальными уравнениями, которые выводятся из общих уравнений Навье-Стокса

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}_{\text{ускорение (инерция)}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \nabla p}_{\text{градиент давления}} + \underbrace{\eta \Delta \vec{v}}_{\substack{\text{вязкие} \\ \text{напряжения}}} + \underbrace{\vec{g}}_{\substack{\text{массовые} \\ \text{силы}}}, \quad (9.1)$$

Для ползучих течений ускорения настолько малы, что ими пренебрегают. Это означает, что силы давления и массовые силы уравновешиваются силами вязкости. В уравнениях (9.1) остаются лишь соответствующие члены,

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \eta \Delta \vec{v} + \vec{g}. \quad (9.2)$$

Необходимо добавить уравнение неразрывности (считаем плотность постоянной)

$$\nabla \vec{v} = 0. \quad (9.3)$$

Эта система уравнений называется *уравнениями Стокса*.

Давление в ползущих течениях является гармонической функцией. В самом деле, применим оператор дивергенции к векторному уравнению (9.2). Получим

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\operatorname{grad} p) = \eta \Delta(\operatorname{div} \vec{v}) + \operatorname{div} \vec{g}.$$

Так как для несжимаемой жидкости в силу (9.3) $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, то $\eta \Delta(\operatorname{div} \vec{v}) = 0$.

Если к тому же $\operatorname{div} \vec{g} = 0$ (массовые силы *соленоидальны*), то

$$\Delta p = 0. \quad (9.4)$$

Простым примером массовых сил, удовлетворяющих условию $\operatorname{div} \vec{g} = 0$, является сила тяжести. Её ускорение – вектор $\vec{g} = (0, 0, -g)$. Очевидно, что

$$\operatorname{div} \vec{g} = \frac{\partial 0}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \equiv 0.$$

Рассмотрим два примера ползучих течений: первый из них относится к внешним, второй – к внутренним течениям.

Пример 1. Течение Стокса около шара (1815 г).

Схема обтекания и обозначения показаны на рисунке 9.1.

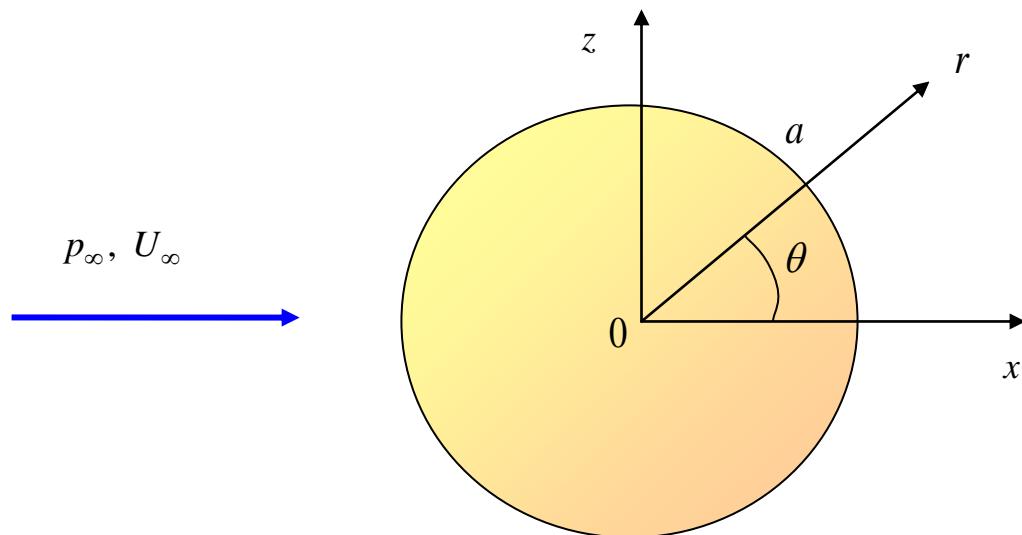


Рис. 9.1. Схема обтекания шара и основные обозначения

Скорость набегающего потока u_∞ направлена вдоль оси x . Сила тяжести не учитывается. Радиус шара a , $\cos\theta = x/a$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Поле скоростей описывается следующими формулами.

$$\begin{aligned}\frac{u}{u_\infty} &= 1 + \frac{3}{4} \frac{ax^2}{r^3} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) - \frac{1}{4} \frac{a}{r} \left(3 + \frac{a^2}{r^2} \right), \\ \frac{v}{u_\infty} &= \frac{3}{4} \frac{axy}{r^3} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right), \\ \frac{w}{u_\infty} &= \frac{3}{4} \frac{axz}{r^3} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right).\end{aligned}\tag{9.5}$$

При $r = a$ получаем скорости на поверхности шара. Легко видеть, что $u=0$, $v=0$, $w=0$, это граничное условие прилипания.

Течение в плоскости $z = 0$ показано на рис. 9.2 с помощью стрелок. В отличие от обтекания идеальной жидкостью здесь видим торможение потока у поверхности.

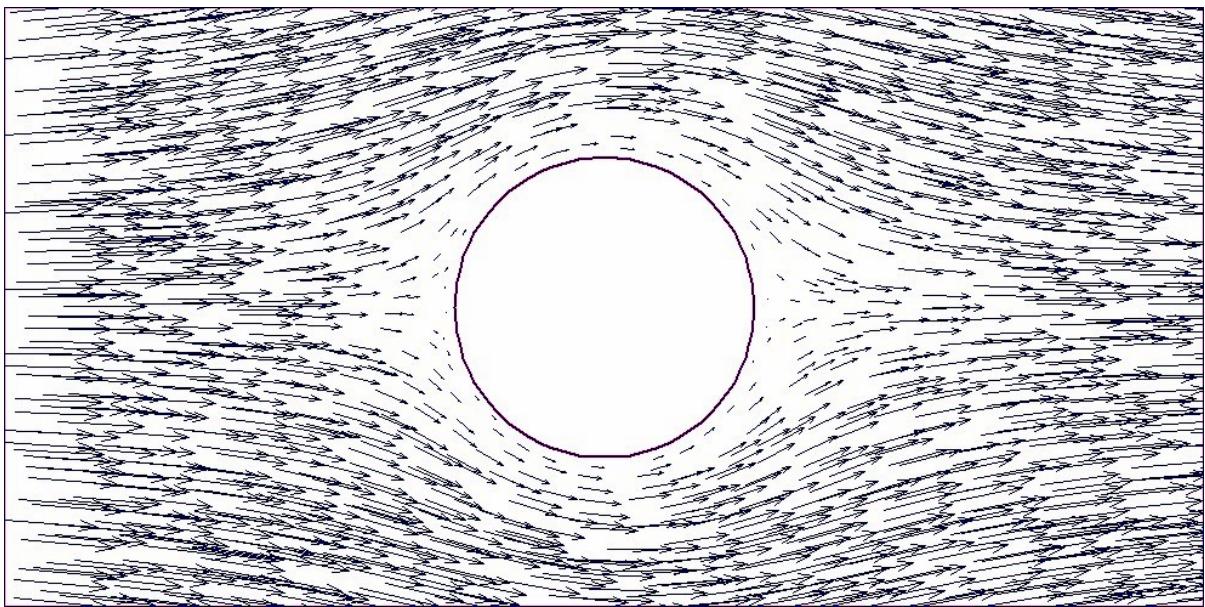


Рис. 9.2. Течение вязкой жидкости около шара. Поле скорости

Давление в жидкости равно

$$p(x, y, z) = p_\infty - \frac{3}{2} \frac{\mu u_\infty a x}{r^3}.\tag{9.6}$$

Карта изобар показана на рисунке.

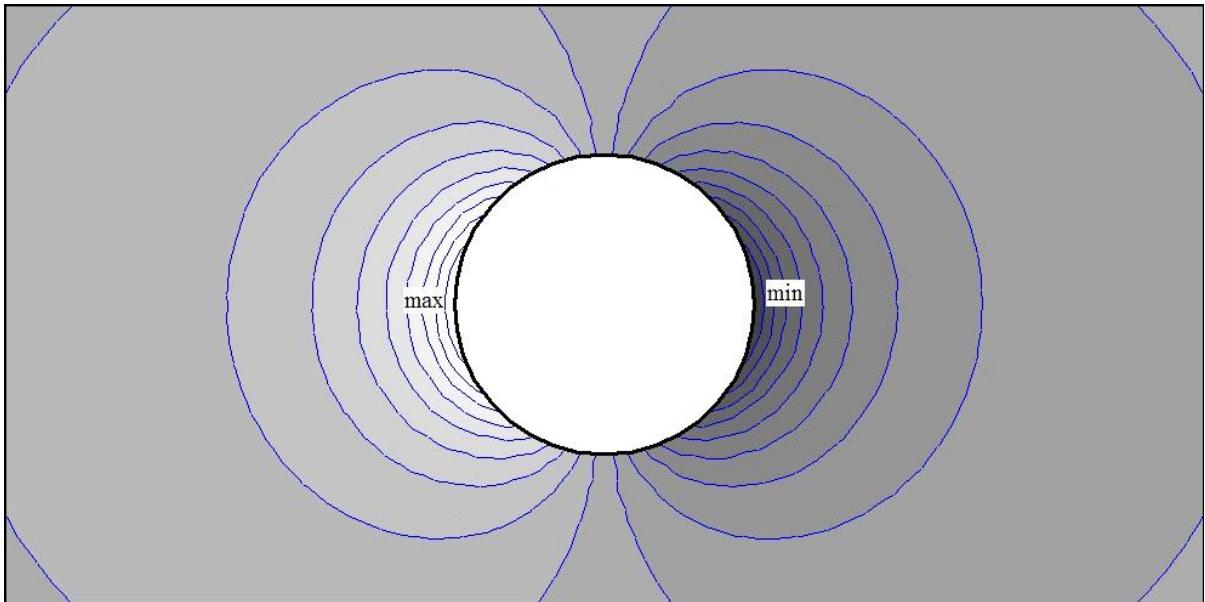


Рис. 9.3. Течение вязкой жидкости около шара. Поле давления

Перед лобовой частью шара давление резко возрастает, затем оно падает и в т.н. донной точке, лежащий напротив лобовой точки, достигает минимума. Вдали от тела как вверх, так и вниз по потоку давление стремится к p_∞ . Следовательно, парадокса Даламбера нет, и сила сопротивления будет равна интегралу давления (9.6) плюс интеграл касательных напряжений по поверхности шара. Сложные вычисления дают величину силы сопротивления

$$R = 6\pi\mu u_\infty a = C_x S \pi a^2 \frac{\rho u_\infty^2}{2}, \text{ н; } S = \pi a^2; \\ C_x = \frac{R}{S \rho u_\infty^2 / 2} = \frac{12\mu}{a \rho u_\infty} = \frac{24\eta}{du_\infty} = \frac{24}{\text{Re}_d}; \text{ Re}_d = \frac{u_\infty d}{\eta}. \quad (9.7)$$

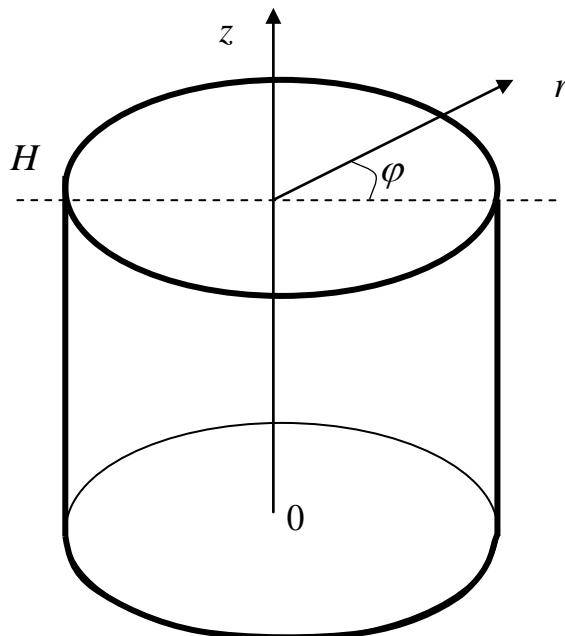
Здесь $d = 2a$ – диаметр шара, безразмерный комплекс $\text{Re}_d = u_\infty d / \eta$ – число Рейнольдса, C_x – коэффициент сопротивления (безразмерная величина). Формула (9.7) говорит о том, что сила сопротивления пропорциональна площади сечения шара $S = \pi a^2$ и скоростному напору $\rho u_\infty^2 / 2$. Последний имеет размерность давления. Коэффициент сопротивления шара

$C_x = 24 / \text{Re}_d$ при ползучем вязком обтекании обратно пропорционален числу Рейнольдса.

Число Рейнольдса Re_d играет фундаментальную роль в механике вязкой жидкости, все характеристики течения рассматриваются как функции числа Re_d .

Эксперименты показали, что формула Стокса $C_x = 24 / \text{Re}_d$ удовлетворительно совпадает с замерами сопротивления вплоть до значений $\text{Re}_d \leq 5$, а дальше, с ростом числа Рейнольдса, наблюдается существенное расхождение. Неравенство $\text{Re}_d < 5$ указывает границы применимости упрощенной модели ползучего течения Стокса для внешнего обтекания тел.

Пример 2. Течение вязкой жидкости в трубе



На практике используются трубы круглого сечения, поэтому для теоретического изучения течения жидкости в трубе удобно использовать цилиндрическую систему координат.

Цилиндрическая система координат является частным случаем криволинейных систем координат, которые активно изучаются и применяются в механике сплошной среды. Прежде, чем приступить к решению задачи о вязком течении жидкости в трубе, приведем необходимые сведения об основных операторах в цилиндрической системе координат.

Дивергенция произвольного вектора $\vec{v} = (u_r, u_z, u_\varphi)$ и градиент скалярной функции $f(r, z, \varphi)$ определяются как

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}; \quad \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right).$$

Интеграл функции $f(r, z, \varphi)$ по объему трубы длиной H равен

$$\int_V f \, dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz \int_0^R f \, r dr.$$

Оператор Лапласа в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

Компоненты вектора ускорения в координатах r, z, φ записываются следующим образом.

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r}, \\ a_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi}, \\ a_\varphi &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r u_\varphi}{r}. \end{aligned}$$

Обратим внимание на наличие двух дополнительных (по сравнению с прямоугольной декартовой системой координат) слагаемых для компонент в a_r и a_z . Первое из них, $-u_\varphi^2/r$ - это центростремительное ускорение

ние; второе, $u_r u_\varphi / r$ - ускорение Кориолиса. Этим ускорением объясняется, в частности, смещение русел рек вправо по направлению течения.

Итак, уравнения Навье – Стокса и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} &= \frac{u_\varphi^2}{r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \eta \Delta u_r, \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta u_z, \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r u_\varphi}{r} &= -\frac{u_r u_\varphi}{r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \eta \Delta u_\varphi, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned}$$

При расчете течения в трубе мы ограничимся рассмотрением простейшего симметричного по φ стационарного течения. В этом случае наша система существенно упрощается, поскольку

$$u_\varphi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

В результате получаем два уравнения импульса

$$\begin{aligned} u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}, \\ u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Кроме того, так же как и при течении в плоском канале, отсутствует попечная компонента течения (в направлении радиуса), $u_r = 0$, следовательно, выпадает всё первое уравнение, а второе уравнение импульса и уравнение неразрывности приобретают вид

$$\begin{aligned} u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство означает, что скорость в любой точке сечения трубы ($z=\text{const}$) одинакова, то есть продольная скорость u_z зависит только от r .

Окончательно получаем единственное уравнение

$$\frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z},$$

или

$$\frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad 0 < r < R. \quad (9.8)$$

Это уравнение необходимо дополнить граничными условиями симметрии на оси трубы и прилипания на стенке:

$$r = 0: \mu r \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0; \quad r = R: u_z = 0. \quad (9.9)$$

Математическую задачу на основе соотношений (9.8), (9.9) можно сформулировать двумя способами.

1-й способ. Считаем заданным перепад давления $\frac{\partial p}{\partial z}$, тогда краевая задача

(9.8), (9.9) однозначно определяет все характеристики течения, а именно:

- среднюю скорость течения в трубе

$$U = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R u_z(r) r dr. \quad (9.10)$$

- напряжение трения на стенке

$$\tau_w = -\mu \frac{\partial u_z}{\partial r}(R). \quad (9.11)$$

2-й способ. Задан расход через трубу $Q = U\pi R^2$. В этом случае градиент $\frac{\partial p}{\partial z}$ подлежит определению.

Решим вначале **первую задачу**. Для этого удобно перейти к безразмерным переменным

$$y = r/R, \quad x = z/R, \quad u = u_z/U, \quad P = p/(\rho U^2), \quad \sigma_w = \frac{\tau_w R}{\mu U}. \quad (9.12)$$

Уравнение (9.9) в переменных (9.12) имеет вид

$$\frac{\mu U}{yR^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\rho U^2}{R} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad 0 < y < 1.$$

Поделив это уравнение на $\frac{\mu U}{R^2}$, получаем формулировку задачи в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \text{Re} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \text{Re} = \frac{UR}{\eta}, \quad 0 < y < 1; \\ y = 0: \quad y \frac{\partial u}{\partial y} &= 0; \quad r = 1: \quad u = 0. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Безразмерный комплекс Re - число Рейнольдса - является единственным параметром задачи. При этом исходная задача определяется не четырьмя независимыми размерными параметрами (μ, ρ, R, U), а единственным безразмерным параметром Re . Правая часть уравнения (9.13) в данной постановке считается заданной константой; обозначим ее через

$$C = \text{Re} \frac{\partial P}{\partial x} = \text{Re} \frac{2R}{\rho U^2} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (9.14)$$

Заметим, что при течении в направлении z давление падает, $dp/dz < 0$, поэтому константа C отрицательна.

Задача (9.13) легко решается. Умножим уравнение на y и проинтегрируем по y от нуля до y . С учетом первого из граничных условий (9.13) получим

$$\int_0^y (9.13) dy = y \frac{du}{dy} - 0 = \frac{y^2}{2} C.$$

Сократим на y и интегрируем ещё раз по y от 1 до y . Будем иметь

$$u(1) - u(y) = C \frac{y^2}{4} \Big|_y^1 = C \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{4} \right) = \frac{C}{4} (1 - y^2).$$

Используя граничное условие прилипания на стенке, окончательно получим параболический профиль скорости в трубе

$$u(y) = -\frac{C}{4} (1 - y^2). \quad (9.15)$$

Главным вопросом при изучении течения по трубам является определение их коэффициента сопротивления. Коэффициентом сопротивления трения C_f называется отношение касательного напряжения на стенке (9.11) к кинетической энергии потока,

$$C_f = \frac{\tau_w}{0.5\rho U^2} = \frac{2\sigma_w \mu U}{\rho U^2 R} = \frac{2\sigma_w}{\text{Re}},$$

$$\sigma_w = -\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=1} = -\frac{C}{2}.$$
(9.16)

При записи формулы (9.16) использовалось решение (9.15) для эпюры скорости и формулы (9.12), связывающие размерные и безразмерные величины. Итак, коэффициент сопротивления трубы падает с ростом числа Рейнольдса по закону

$$C_f = \frac{|C|}{\text{Re}} = -\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{2R}{\rho U^2} \frac{\partial p}{\partial z} > 0.$$

Первая задача о течении в трубе с заданным градиентом давления решена.

Перейдем к решению **второй задачи**, в которой задан расход $Q = US$, или, что равнозначно, средняя скорость $U = Q/S$. Для того чтобы определить градиент давления, необходимый для прокачки жидкости с такой скоростью, воспользуемся формулой (9.10), которую запишем в безразмерной форме

$$U = \frac{2\pi}{\pi R^2} R^2 U \int_0^1 u(y) y dy \Rightarrow 1 = 2 \int_0^1 u(y) y dy.$$

Подставив сюда решение для скорости (9.15), найдем константу C и коэффициент сопротивления

$$-\frac{C}{2} \int_0^1 (1 - y^3) y dy = -\frac{C}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = -\frac{C}{8} = 1, \quad C_f = \frac{8}{\text{Re}},$$

а затем и градиент давления

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{8}{\text{Re}}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\rho U^2}{2R} \frac{8}{\text{Re}}.$$

Полученное решение называется решением Хагена-Пуазейля для гладкой трубы.

Лекция 10. УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Многочисленные наблюдения за скоростью жидкости показали, что при внешнем обтекании тел и внутренних течениях в трубах и каналах вязкость жидкости оказывает влияние на поток только вблизи границы раздела между жидкостью и поверхностью тела. Таким образом, поток условно делится на две зоны: вязкое течение в пограничном слое и потенциальное течение в основном потоке за границей этого слоя.

Это используется для расчета обтекания тел по следующим причинам.

- 1) Потенциальное течение описывается простыми уравнениями типа интегралов Коши – Лагранжа или Бернулли.
- 2) Внутри пограничного слоя уравнения Навье-Стокса значительно упрощаются, поскольку сам этот слой при больших числах Рейнольдса очень тонок, так что градиенты гидродинамических характеристик попрек слоя намного больше, чем в продольном.

Отмеченные особенности течения находят свое отражение в специальных упрощенных уравнениях, предназначенных для моделирования течений данного класса.

Динамический пограничный слой

При обтекании тел потоком вязкой жидкости происходит ее торможение на твердых стенках (прилипание), и благодаря вязкости это торможение, ослабевая, распространяется от стенки вглубь потока на некоторое расстояние δ , за пределами которого жидкость движется без значительных деформаций, и вязкие силы там не играют существенной роли. Таким образом, эффект вязкости проявляется в сравнительно тонком слое, который называется пограничным слоем. Для простоты рассмотрим продоль-

ное обтекание плоской стенки (рис. 10.1) однородным потоком со скоростью u_e (e – external – внешний).

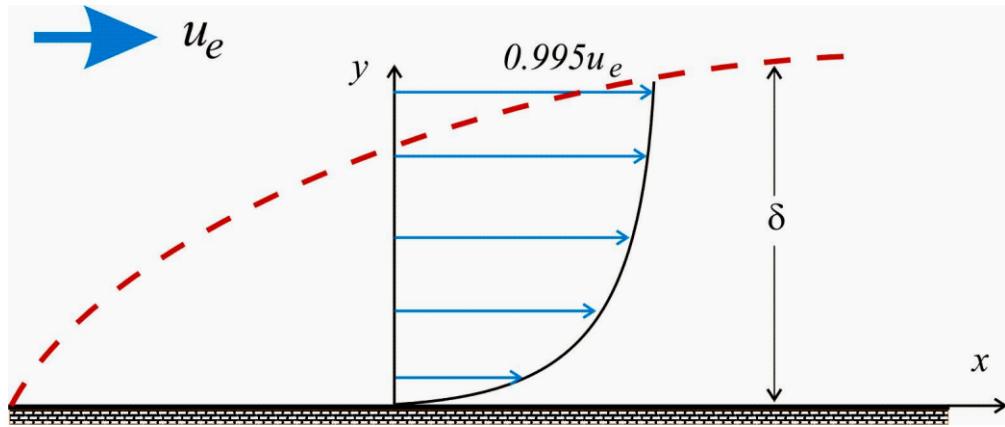


Рис. 10.1. Ламинарный пограничный слой при продольном обтекании плоской пластины

Выведем уравнения пограничного слоя из двумерных уравнений Навье-Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Введем масштабы длины в продольном направлении l , длины в поперечном направлении δ ; продольной скорости u_0 ; поперечной скорости v_0 ; давления p_0 ; времени t_0 . Среди этих масштабов u_0 выбираем как среднюю скорость внешнего течения $u_0 = \langle u_e \rangle$, l ассоциируем с продольной координатой x , а значения δ , v_0 , p_0 , t_0 пока не известны. Перепишем систему (10.1) в безразмерных переменных

$$X = \frac{x}{l}, Y = \frac{y}{\delta}, U = \frac{u}{u_0}, V = \frac{v}{v_0}, P = \frac{p}{p_0}, \tau = \frac{t}{t_0}. \quad (10.2)$$

Из уравнения неразрывности получаем

$$\frac{u_0}{l} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{v_0}{\delta} \frac{\partial V}{\partial Y} = 0,$$

откуда находим масштаб поперечной скорости

$$v_0 = \varepsilon u_0, \quad \varepsilon = \delta/l. \quad (10.3)$$

С учетом этого соотношения преобразуем уравнение импульса в направлении x .

$$\frac{u_0}{t_0} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{u_0^2}{l} U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\varepsilon u_0^2}{\delta} v \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{p_0}{\rho l} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\eta u_0}{l^2} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\eta u_0}{\delta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}.$$

Разделим это уравнение на u_0^2/l и обозначим через Re безразмерный комплекс $u_0 l / \eta$. Будем иметь

$$\frac{l/u_0}{t_0} \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + v \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{p_0}{\rho u_e^2} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re} \varepsilon^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \right). \quad (10.4)$$

Выбор масштабов времени $t_0 = l/u_0$ и давления $p_0 = \rho u_0^2$ теперь очевиден, причем последний вполне согласуется с давлением вне пограничного слоя, где течение происходит по *уравнению Бернулли*

$$p + \rho u_e^2 / 2 = \text{const}, \quad - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = u_e \frac{du_e}{dx}. \quad (10.5)$$

Сущность пограничного слоя заключается в том, что в нем инерция потока в продольном направлении x компенсируется сдвиговыми вязкими напряжениями, пропорциональными градиенту скорости в поперечном направлении y . Это означает, что в уравнении (10.4) необходимо положить коэффициент при $\partial^2 U / \partial Y^2$ равным единице. Тогда

$$\frac{1}{\text{Re} \varepsilon^2} = 1, \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}, \quad \text{или} \quad \delta(l) = \frac{l}{\sqrt{\text{Re}}} = \sqrt{\frac{\eta l}{u_e}} \quad (10.6)$$

Соотношение (10.6) показывает, что при больших числах Рейнольдса пограничный слой является тонким, $\varepsilon \ll 1$, причем его толщина растет как квадратный корень от расстояния в продольном направлении (масштаб l можно заменить на x), и тем больше, чем выше вязкость жидкости и ниже ее скорость.

Итак, с точностью до слагаемых порядка $O(\varepsilon^2)$ x -уравнение движения (10.4) в пограничном слое принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + v \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}. \quad (10.7)$$

Преобразуем теперь второе уравнение импульсов.

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon u_e}{l/u_e} \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\varepsilon u_e^2}{l} U \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\varepsilon^2 u_e^2}{\delta} v \frac{\partial V}{\partial Y} = \\ = - \frac{u_e^2}{\delta} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\eta \varepsilon u_e}{l^2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\eta \varepsilon u_e}{\delta^2} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}. \end{aligned}$$

Поделим это уравнение на u_e^2/δ . Будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial V}{\partial \tau} + \varepsilon^2 U \frac{\partial V}{\partial X} + \varepsilon^2 V \frac{\partial V}{\partial Y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\varepsilon^2}{\text{Re}} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = \\ = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re} \varepsilon^2} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, из второго уравнения движения следует, что с точностью до величин порядка $O(\varepsilon^2)$ получаем

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (10.8)$$

Это значит, что давление поперек пограничного слоя не меняется и равно давлению во внешнем потоке, где p подчиняется уравнению Бернулли (10.5). Это позволяет исключить давление из рассмотрения и записать уравнения плоского пограничного слоя

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \end{aligned} \quad (10.9)$$

в которых только две неизвестных: компоненты безразмерной скорости U и V , а скорость внешнего потока $U_e(x) \sim 1$ задана.

Тепловой пограничный слой

Уравнение теплового пограничного слоя получается из уравнения энергии

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (10.11)$$

аналогично тому, как это было сделано для первого уравнения импульсов. Вместо толщины динамического пограничного слоя δ мы определяем толщину теплового погранслоя δ_T . Будем изучать то же обтекание пластины, но добавим условие, что внешний поток имеет температуру T_e , а стенка – температуру $T_w < T_e$. Безразмерные пространственные координаты вводятся так же, как в (10.2), а безразмерная температура определяется следующим образом:

$$\theta = \frac{T - T_w}{T_e - T_w}.$$

Уравнение (10.11) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\varepsilon_T^2 \text{Pe}} \left(\varepsilon_T^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right), \quad (10.12)$$

откуда по аналогии с (10.6) получаем

$$\frac{1}{\text{Pe} \varepsilon_T^2} = 1, \quad \text{или } \varepsilon_T = \frac{1}{\sqrt{\text{Pe}}}, \quad \text{или } \delta_T(l) = \frac{l}{\sqrt{\text{Pe}}} = \sqrt{\frac{al}{u_0}} \quad (10.13)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}. \quad (10.14)$$

Здесь $\varepsilon_T = \delta_T / l$, число Пекле $\text{Pe} = u_0 l / a$. Сравнивая формулы (10.13) и (10.6), легко сопоставить толщины динамического и теплового пограничного слоев:

$$\frac{\delta}{\delta_T} = \sqrt{\frac{\eta}{a}} = \sqrt{\text{Pr}}, \quad \text{Pr} = \frac{\eta}{a}.$$

Число Прандтля Pr является теплофизическими свойством жидкости; в общем случае Pr зависит от температуры. Понятно, что при $\text{Pr} = 1$ и отсутствии градиента давления безразмерные уравнения для продольной скорости и температуры совпадают, а, значит, совпадают и их графики.

При решении задач теплообмена, в том числе и на основе уравнений пограничного слоя, главную роль играют граничные условия на стенке. Мы рассмотрим три варианта.

1) Задана температура стенки. $y=0, T=T_w$. В безразмерном виде это эквивалентно условию $Y=0, \theta=0$.

2) Задана плотность теплового потока. $y=0, \lambda \partial T / \partial y = q$. В безразмерном виде это условие имеет вид

$$y=0, \quad \frac{\lambda(T_e - T_w)}{\delta_T} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = q, \text{ или } \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{q \delta_T}{\lambda(T_e - T_w)} = \text{St Pe},$$

где число Стантона определяется формулой

$$\text{St} = \frac{q}{u_0 c \rho (T_e - T_w)}.$$

3) Задан теплообмен между стенкой и потоком по закону Ньютона. $y=0, \lambda \partial T / \partial y = \alpha(T - T_w)$. Здесь α , Вт/м²К – коэффициент теплообмена, который может зависеть от температуры, а также чисел Рейнольдса и Прандтля. В безразмерном виде это условие имеет вид

$$y=0, \quad \frac{\lambda(T_e - T_w)}{\delta_T} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \alpha(T - T_w), \text{ или } \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \text{Nu} \theta,$$

где число Нуссельта определяется формулой

$$\text{Nu} = \frac{\alpha \delta_T}{\lambda}.$$

Необходимо подчеркнуть, что коэффициент α (или число Nu) концентрирует в себе информацию о теплообменных процессах в пограничном слое; при использовании граничного условия третьего рода безразмерное решение задачи θ не обязано равняться нулю на стенке (для размерной температуры это означает $T(0) \neq T_w$).

Задачи к лекции 10

Задача 10.1. Записать уравнения плоского пограничного слоя для установившегося потенциального течения, выразив компоненты скорости через функцию тока.

Задача 10.2. Записать уравнения пограничного слоя, полученные в задаче 10.1, и граничные условия для случая пристенного пограничного

слоя на продольно обтекаемой пластинке, считая профиль скоростей набегающего на пластинку потока невозмущенным. Предполагать, что ось OX направлена вдоль поверхности пластиинки, ось OY по перпендикуляру к поверхности, а начало координат выбрать в передней кромке пластиинки (*задача Блазиуса*).

Лекция 11. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Введение

Наблюдения за течением жидкости в природе и технических устройствах в различных условиях позволяют выделить два режима течения: 1) *ламинарное* – слоистое, когда все жидкые частицы двигаются в доминирующем направлении, а поперечные движения отсутствуют, при этом перемешивания «слоев» жидкости не происходит; и 2) *турбулентное* – переплетающееся течение, характеристикой которого является интенсивное перемешивание жидкости в поперечном направлении (см. рис. 11.1 и 11.2). Переход от ламинарного течения к турбулентному определяется критическим числом Рейнольдса Re^* : при $Re < Re^*$ наблюдается ламинарное, а при $Re > Re^*$ – турбулентное течение. Для течения в трубе $Re^* \approx 2300$.

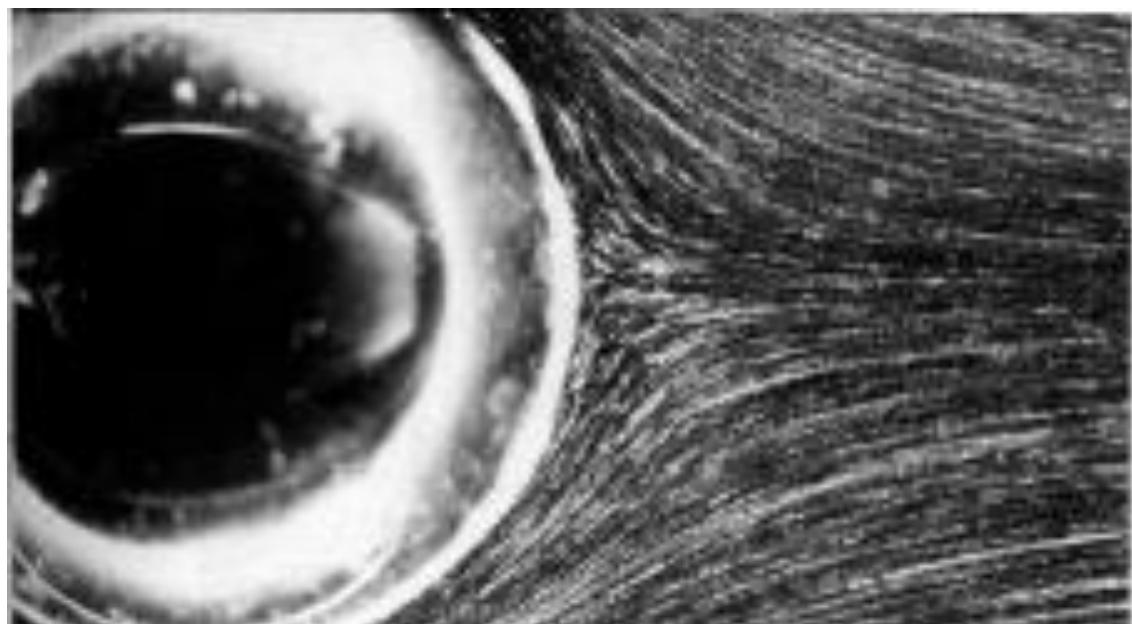


Рис. 11.1. Безотрывное стационарное ламинарное обтекание шара при $Re=8.15$.

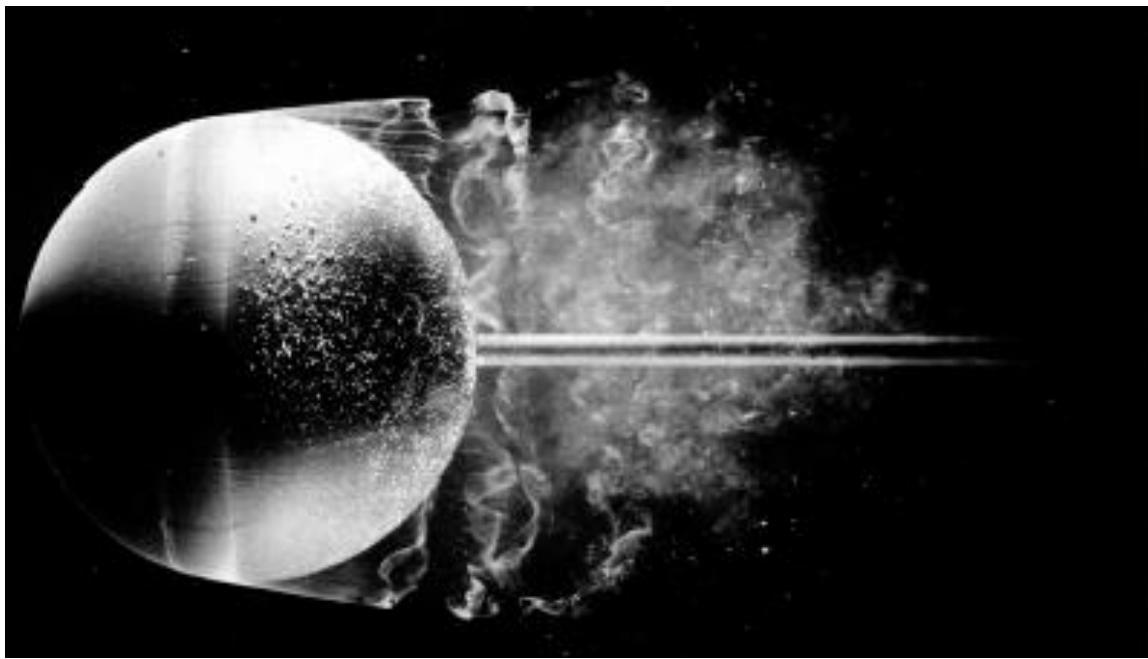


Рис. 11.2. Обтекание шара при $Re=15\,000$. Ламинарный пограничный слой отрывается перед экватором, но остается ламинарным на длине, почти равной радиусу. Затем слой становится неустойчивым и превращается в турбулентный.

Подавляющее большинство важных для человека течений в природе и технике являются турбулентными, и эта область гидродинамики бурно развивается в последнее время.

Уравнения Рейнольдса

Замеры реального поведения характеристик турбулентного потока дают следующую картину, рис. 11.3, которая позволила О. Рейнольдсу представить мгновенную характеристику как сумму среднего \bar{u} и пульсации u' .

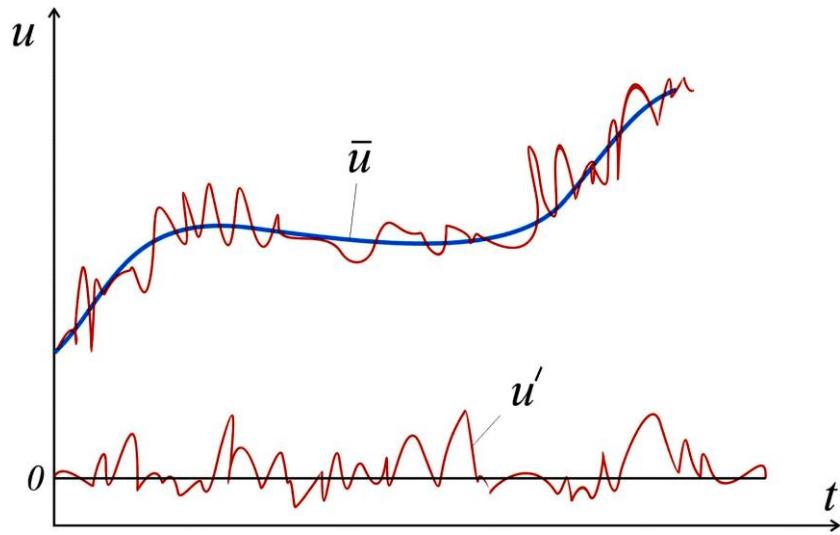


Рис. 11.3. Среднее и пульсация

Представление вида $u = \bar{u} + u'$ тем более продуктивно, что в инженерных приложениях интерес представляют именно средние поля. Подчеркнем, что не предполагается, что $|u'| \ll |\bar{u}|$. Под средним значением f в каждый момент времени t понимаем величину

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(\tau) d\tau \quad (11.1)$$

где период осреднения должен быть достаточно велик по сравнению с периодом пульсаций, чтобы среднее значение случайной пульсации было равно нулю, но и не столь большим, чтобы не сглаживались глобальные изменения средних во времени. В дальнейшем предполагается, что операция осреднения удовлетворяет следующим требованиям:

$$\begin{aligned} \bar{f}' &= 0; \quad \bar{\bar{f}} = \bar{f}; \quad \bar{f}g = \bar{f}\bar{g} + \bar{f}g' = \bar{f}\bar{g}; \\ \bar{fg} &= (\bar{f} + f')(\bar{g} + g') = \bar{f}\bar{g} + \bar{f}g' + \bar{g}f' + fg' = \bar{f}\bar{g} + \bar{f}g'; \\ \bar{\frac{\partial f}{\partial s}} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}; \quad \int \bar{f} ds = \int \bar{f} ds, \quad s \in \{x, t\} \end{aligned} \quad (11.2)$$

Проведем осреднение по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \Delta u_i; \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$$

Подставим в него разложение $u_i = \bar{u}_i + u'_i$, $p = \bar{p} + p'$. Будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + (\bar{u}_j + u'_j) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \eta \Delta \bar{u}_i + \eta \Delta u'_i + g \\
\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} &= 0.
\end{aligned} \tag{11.3}$$

Применим к (11.3) оператор осреднения. Из-за первого и третьего свойств осреднения (11.2) все линейные вхождения пульсаций после осреднения пропадут. Останется

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \eta \Delta \bar{u}_i + g; \\
\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} &= 0; \quad \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0.
\end{aligned} \tag{11.4}$$

Используя последнее уравнение (11.4), можем записать

$$\overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = \overline{\frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}} = \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}.$$

Произведение пульсаций называют их корреляцией второго порядка, а величины $\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$ называются *турбулентными напряжениями*, которые образуют тензором напряжений Рейнольдса. Уравнения (11.4), переписанные в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \eta \Delta u_i + g; \\
\tau_{ij} &= -\rho \overline{u'_i u'_j}; \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.
\end{aligned} \tag{11.5}$$

называются *уравнениями Рейнольдса* (черта над средними опущена). Сравнивая (11.5) с исходной системой уравнений Навье-Стокса, легко заметить, что в осредненных уравнениях появились дополнительные градиенты напряжений. Очевидно, модель (11.5) теперь не замкнута, и требуется дополнительно 6 уравнений для компонент симметричного тензора турбулентных напряжений. Простейший способ замыкания уравнений Рейнольдса состоит в том, чтобы выразить τ_{ij} через характеристики осредненного течения, например

$$\tau_{ij} = \mu_T e_{ij} = \mu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (11.6)$$

Здесь коэффициент μ_T называется турбулентной вязкостью, который в отличие от молекулярной вязкости μ не является свойством жидкости, а зависит от особенностей турбулентного течения. Определение турбулентной вязкости μ_T через средние характеристики потока составляет предмет т.н. полуэмпирических моделей турбулентности.

Тем не менее, выражение (11.6) можно подставить в уравнения (3.5).

При этом мы используем равенства

$$\eta_T = \mu_T / \rho, \quad \eta \Delta u = \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$$

и получаем окончательно уравнения Рейнольдса в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\eta + \eta_T) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] + g; \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0; \end{aligned} \quad (11.7)$$

Простейшим способом замыкания уравнений (11.7) является модель пути смешения Прандтля, которую для внутренних течений можно сформулировать так:

$$\eta_T = l^2 |e|, \quad |e| = \sqrt{e_{ij} e_{ij}}, \quad e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad l = \kappa y, \quad (11.8)$$

где l – длина пути смешения, e – тензор скоростей деформаций, $\kappa \approx 0.4$ – постоянная Прандтля, y – расстояние до стенки.

Осредненное уравнение конвективной теплопроводности

Температурное поле в турбулентном потоке тоже испытывает пульсации: $T = \bar{T} + T'$. Если подставить это разложение в линейное уравнение теплопроводности, получим

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial T'}{\partial t} + (\bar{u}_i + u'_i) \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{T} + T') = a \Delta T + a \Delta T' + \phi. \quad (11.9)$$

Раскроем скобки в конвективном члене.

$$\bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} + u' \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} + \bar{u}_i \frac{\partial T'}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial T'}{\partial x_i}$$

При осреднении (11.2) уравнения (11.9) слагаемые с линейными вхождениями пульсаций, как и при выводе уравнений Рейнольдса, обратятся в ноль. В результате получим

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} = a \Delta \bar{T} - \overline{u'_i \frac{\partial T'}{\partial x_i}} + \phi. \quad (11.10)$$

Используя уравнение неразрывности для пульсаций скорости, можем представить нелинейный член справа в виде дивергенции турбулентного потока тепла $\overline{\partial(u'_i T')/\partial x_i}$. В отличие от молекулярного потока Фурье $q_i = -\lambda \partial T / \partial x_i$ этот поток имеет конвективную природу: пульсация температуры T' переносится пульсацией скорости u'_i .

Если умножить уравнение (11.10) на $c\rho$ и вернуться от оператора Лапласа к дивергенции теплового потока \vec{q} , получим осредненное уравнение конвективной теплопроводности при турбулентном течении

$$c\rho \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - c\rho \overline{u'_i T'} \right) + f. \quad (11.11)$$

По аналогии с тем, как был введен коэффициент турбулентной вязкости в уравнениях Рейнольдса, можно ввести коэффициент турбулентной теплопроводности λ_T выразив пульсационный поток $q_i^T = -c\rho \overline{u'_i T'}$ через градиент среднего температурного поля:

$$c\rho \overline{u'_i T'} = -\lambda_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \quad (11.12)$$

Подставив (11.12) в (11.10), опуская черту над средними и вновь деля на $c\rho$, окончательно получим уравнение для средней температуры

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(a + a_T) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] + \phi. \quad (11.13)$$

Здесь a_T – турбулентная температуропроводность. Обычно используют турбулентное число Прандтля, чтобы выразить a_T через вихревую вязкость η_T :

$$\text{Pr}_T = \frac{\eta_T}{a_T}. \quad (11.14)$$

В простейших сдвиговых течениях значение Pr_T близко к единице (равно $0.5 \div 0.9$).

Модель пути смешения Прандтля. Логарифмический профиль скорости

Многие простые схемы замыкания опираются на идею Прандтля (1825 г.) о длине пути смешения – характеристике потока, под которой понимают расстояние, проходимое жидкой частицей поперек потока, прежде чем происходит ее смешение (т.е. выравнивание скорости) с окружающей жидкостью. Понятие пути смешения исходит из аналогии между турбулентным перемешиванием и молекулярным переносом (бронновским движением), когда характеристики молекул остаются постоянными в промежутках между соударениями (т.н. длина свободного пробега). В турбулентном течении роль молекул играют «жидкие комки», т.е. вихри.

Модель Прандтля обычно применяется к простым потокам, когда средняя скорость имеет одну компоненту (пограничные слои, трубы, каналы). Пусть это скорость \bar{u} в направлении x , а поперечная координата y отсчитывается от стенки.

Формула Прандтля для турбулентной вязкости имеет вид

$$\eta_T \sim l^2 |\partial \bar{u} / \partial y|, \quad (11.15)$$

в которой l – длина пути смешения.

Длина пути смешения l в разных течениях задается по-разному. Например, в свободном сдвиговом слое шириной d полагают $l = Cd$, $C \approx 0.1$. Для течения жидкости в канале или трубе $l = Cy\sqrt{1 - y/d}$ (d – глубина открытого канала, полуширина закрытого канала или радиус трубы).

Для турбулентного пограничного слоя (ТПС) экспериментально найдена зависимость $l = \kappa y$, $\kappa \approx 0.41$ – постоянная Прандтля. Более точные результаты получаются при введении демпфирующего коэффициента Ван-Дриста $l = \kappa y [1 - \exp(-y/A)]$.

Универсальный профиль скорости в ТПС получается из уравнения с нулевым градиентом давления. Мы учитываем, что пограничный слой имеет составную структуру: тонкий ламинарный подслой $0 < y < \delta_l$ и собственно турбулентный слой. Уравнение импульса в ТПС имеет вид

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{\tau}{\rho} \right) = \frac{d}{dy} \left(\eta_T \frac{d\bar{u}}{dy} \right) = 0. \quad (11.16)$$

Интегрируя это уравнение по y от δ_l до y и обозначая через $\tau_w = \tau(\delta_l)$ напряжение сдвига на границе вязкого подслоя, имеем

$$\eta_T \frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (11.17)$$

Если подставить сюда выражение (11.15) при $l = \kappa y$, получим

$$\kappa^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 = \frac{\tau_w}{\rho}, \quad \frac{d\bar{u}}{dy} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \frac{1}{\kappa y}. \quad (11.18)$$

Величина $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$ называется *динамической скоростью*. Обозначим через y_0 характерный линейный размер, введем безразмерные переменные $u^+ = \bar{u} / u_\tau$, $y^+ = y / y_0$ и перепишем (11.18) в этих переменных. Будем иметь $du^+ / dy^+ = 1 / (\kappa y^+)$, откуда следует т.н. логарифмический профиль скорости в ТПС

$$u^+ (y^+) = u_0 + \frac{1}{\kappa} \ln y^+. \quad (11.19)$$

Константа интегрирования u_0 , согласно экспериментальным данным, равна $5.0 \div 5.2$. Чтобы придать безразмерной координате y^+ реальный смысл, надо определить масштаб y_0 . Это можно сделать, рассмотрев течение в вязком ламинарном подслое и приняв, что касательное напряжение в нем постоянно и равно τ_w , а скорость на границе имеет порядок u_τ . Тогда из

равенства $\eta du / dy \sim \eta u_\tau / y_0 = \tau_w / \rho$, в которое входит молекулярная кинематическая вязкость ν , находим

$$y_0 = \frac{\rho \eta u_\tau}{\tau_w} = \frac{\eta}{\sqrt{\tau_w / \rho}} = \frac{\eta}{u_\tau} \quad (11.20)$$

Из определения следует, что y_0 имеет порядок толщины ламинарного подслоя δ_l . Понятно, что в действительности переход от вязкого подслоя к ТПС происходит плавно, и полученные результаты верны на некотором удалении от переходной зоны. Экспериментально установлено, что логарифмический профиль скорости наблюдается в пределах $50 < y^+ < 0.2\delta$, где δ – толщина ТПС.

Для внешней области (т.н. слой следа) $0.2\delta < y^+ < \delta$ характерно гораздо более медленное изменение гидродинамических параметров. В качестве масштаба скорости в этой области принято использовать скорость на внешней границе пограничного слоя u_e , а в качестве линейного масштаба – толщину δ (радиус трубы). В ряде моделей турбулентная вязкость во внешней области ТПС предполагается постоянной величиной. Клаузер предложил для течений в следе формулу $\eta_T = \alpha u_e \delta$, где $\alpha = 0.0168$ – эмпирический коэффициент.

На рис. 11.4 показан типичный профиль скорости в ТПС, развивающемся на плоской пластине без градиента давления.

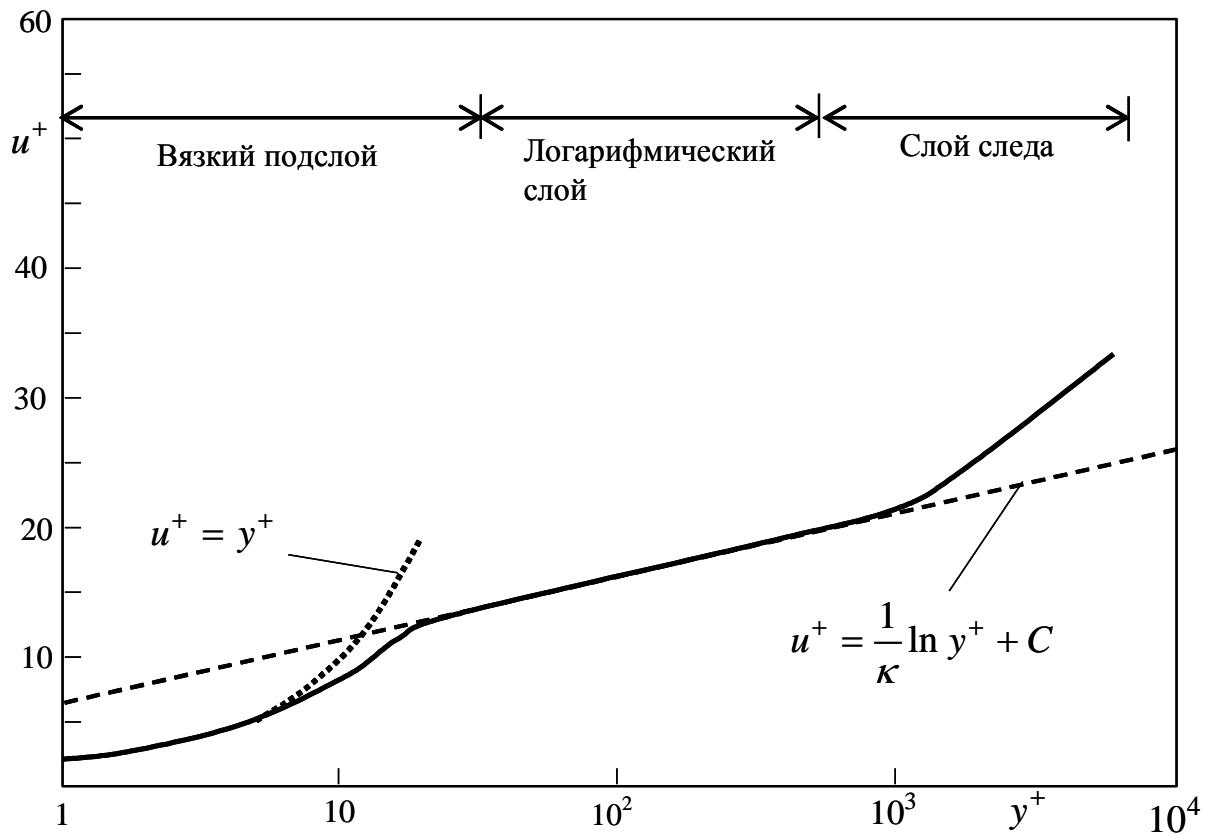


Рис. 11.4. Три участка разбиения профиля: вязкий подслой, логарифмический слой и внешний слой (слой следа)

Пример расчета. Объединим полученные результаты для внутренней части слоя (ТПС + ламинарный подслой) и в предположении (подтверждаемом практикой), что суммарное касательное напряжение постоянно поперек слоя и равно $\tau_w = \rho u_\tau^2$. Получим уравнение с граничным условием прилипания на стенке

$$(\eta + \eta_T) \frac{du}{dy} = \eta \frac{du}{dy} + (\kappa y)^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = u_\tau^2, \quad y > 0; \quad u(0) = 0.$$

Перейдем к безразмерным величинам $y^+ = u_\tau y / \eta$, $u^+ = u / u_\tau$ и получим квадратное уравнение относительно производной $z = du^+ / dy^+$, а именно $z + (\kappa y^+)^2 z^2 = 1$. Положительное решение этого уравнения имеет вид $z = (-1 + \sqrt{1 + 4(\kappa y^+)^2}) / (2(\kappa y^+)^2)$. Умножив числитель и знаменатель на $1 + \sqrt{1 + 4(\kappa y^+)^2}$, получим задачу Коши для скорости

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4(\kappa y^+)^2}}, \quad u(0) = 0. \quad (11.21)$$

Эту задача решается численно. Решение задачи показано на рисунке 11.5 в логарифмических координатах. Представлены два случая: решение уравнения (11.21), в котором длина пути смешения определена согласно формуле Кармана $l = \kappa y$, и решение аналогичной задачи с демпфирующим коэффициентом Ван-Дриста $l = \kappa y(1 - \exp(-y/A))$. Заметно существенное отличие профилей скорости.

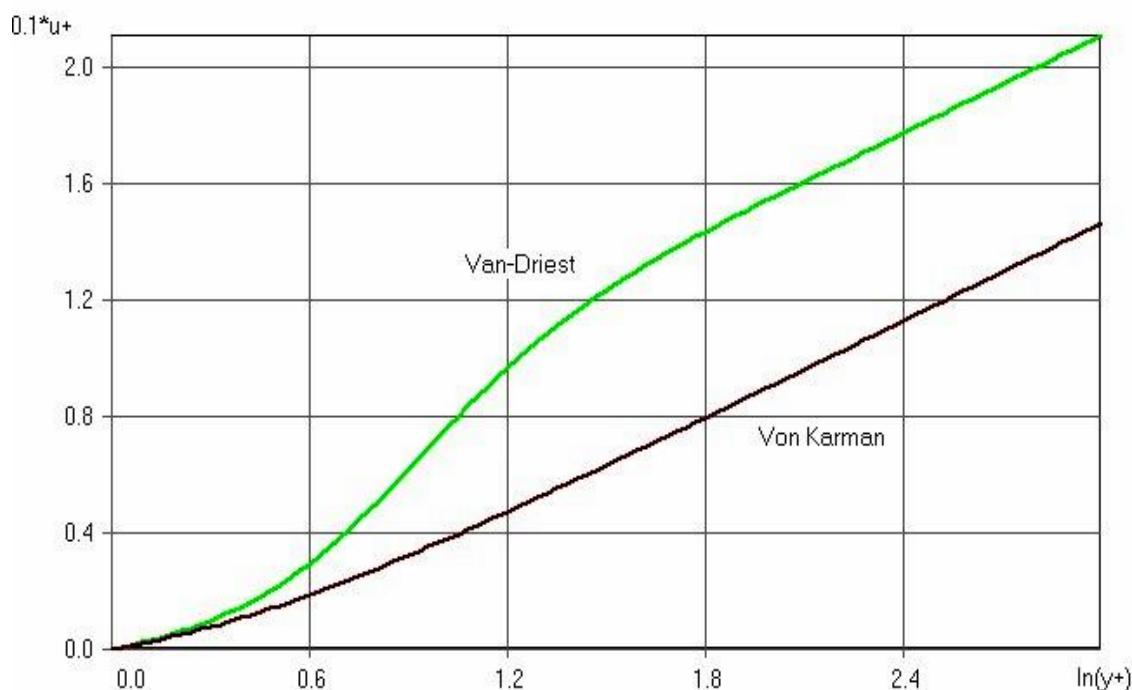


Рис. 11.5. Универсальный профиль средней скорости во внутренней части турбулентного пограничного слоя при определении длины пути смешения по Фон Карману (внизу) и Ван-Дристу (вверху)

В заключение отметим, что в настоящее время для расчета турбулентных течений используются более сложные дифференциальные модели турбулентной вязкости.

Задачи к лекции 11

Задача 11.1. Какой должна быть скорость и кинематическая вязкость жидкости при моделировании движения судна при условии, что длина модели в 100 раз меньше длины судна. В качестве критериев подобия ис-

пользовать постоянство чисел Рейнольдса $Re = \frac{V L}{\eta}$ и Фруда $Fr = \frac{V^2}{g L}$.

Задача 11.2. Конденсатор паровой турбины состоит из 250 трубок для протока охлаждающей воды. Определить максимально допустимый диаметр трубок, обеспечивающий турбулентный режим течения при общем объемном расходе воды через все трубы $Q = 100 \text{ м}^3/\text{ч}$. Коэффициент кинематической вязкости принять равным $1 \text{ мм}^2/\text{с}$. Предполагается, что устойчивый турбулентный режим течения воды в трубках удерживается при $Re > 10^4$, то есть при числах Рейнольдса, превышающих критическое значение.

Ответ: $d \leq 14 \text{ мм}$.

Решения задач

Решение задачи 1.1. Напряжение в жидкости может быть рассчитано из уравнения $\tau = \mu \frac{du}{dy}$. В случае линейного профиля продольной скорости по высоте зависимость $u(y)$ можно представить в виде $u = u_0 y/h$, поскольку на твердой поверхности скорость равна нулю. Здесь u_0 – величина продольной скорости на высоте h от твердой поверхности. Значение u_0 можно определить по заданному расходу, который равен произведению площади поперечного сечения на скорость течения жидкости и выражается в нашем случае через переменную продольную скорость $u(y)$ следующим образом

$$Q = a \int_0^h u(y) dy = a \int_0^h u_0 \frac{y}{h} dy = a h \frac{u_0}{2}.$$

Таким образом, $u_0 = \frac{2Q}{ah}$. Подставляя полученное выражение в уравнение

для определения напряжения, можно получить:

$$\tau = \mu \frac{u_0}{h} = \frac{2 \mu Q}{ah^2} = \frac{2 \cdot 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}}{0.1 \text{ м} \cdot 0.01 \text{ м}^2} Q = 3 \frac{\text{Па} \cdot \text{с}}{\text{м}^3} \cdot 0.2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^3}{\text{с}} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Па}.$$

Решение задачи 1.3.

$$Q = \int_{x_0}^{x_1} q dx = - \int_{x_0}^{x_1} \lambda \frac{dT}{dx} dx = -\lambda T \Big|_{T_0}^{T_1} = -\lambda (T_1 - T_0).$$

Решение задачи 2.2. Расчет произведений векторов и тензоров основывается на механизме перемножения матриц.

Пусть $\vec{a} \cdot \overset{\Rightarrow}{D} = \vec{v}$. Тогда

$$(v_x; v_y; v_z) = (3; 0; 4) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} = (9; -20; 6).$$

Пусть $\vec{D} \cdot \vec{b} = \vec{w}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\vec{a} \cdot \vec{D} \cdot \vec{b} = \vec{v} \cdot \vec{b} = \lambda$. Тогда

$$\lambda = (9; -20; 6) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = -76.$$

Решение задачи 2.3. Изменение содержания вещества сплошной среды за единицу времени в объеме V есть разность между втекшим и вытекшим через ограничивающую объем поверхность количеством данного вещества. Это изменение может быть вычислено с использованием формулы Остроградского-Гаусса:

$$dM = \int_S v_n dS = \int_V \operatorname{div} \vec{v} dV.$$

В рамках заданных условий это уравнение запишется в виде:

$$dM = \iint_{S}^{z_2, y_2, x_2}_{z_1, y_1, x_1} (2x - 3 + 0) dx dy dz = \left[x_2^2 - x_1^2 - 3(x_2 - x_1) \right] (y_2 - y_1) (z_2 - z_1).$$

Таким образом, для заданного поля скоростей в любой части полосы, ограниченной плоскостями $x = x_1$ и $x = x_2 = 3 - x_1$, изменения количества вещества не происходит. Линии тока данного течения строятся из зависимости $y = C e^{3/x}$.

Решение задачи 3.2. Компоненты напряжения в точке P принимают значения

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Единичный вектор нормали в точке P определяется вектором

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla (y^2 + z^2 - 4) = 2y \vec{j} + 2z \vec{k}.$$

Следовательно, в точке P

$$\nabla \varphi = 2\vec{j} + 2\sqrt{3}\vec{k}.$$

Тогда единичный вектор нормали в точке P есть $\vec{n} = \vec{j}/2 + \sqrt{3}\vec{k}/2$. Вектор напряжения на площадке, перпендикулярной к \vec{n} в точке P , равен

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Ответ к задаче 3.4. $\left\{ a_E^x = \frac{-x}{(1+t)^2}, a_E^y = \frac{-2y}{(1+t)^2}, a_E^z = \frac{-3z}{(1+t)^2} \right\}$
 $\left\{ a_x = 0, a_y = \frac{2y}{(1+t)^2}, a_z = \frac{6z}{(1+t)^2} \right\}, \left\{ a_x = 0, a_y = 2\xi^2, a_z = 6\xi^3(1+t) \right\}.$

$$a^j = \frac{\partial v^j}{\partial t} + v^i \nabla_i v^j = \frac{\partial v^j}{\partial t} + v^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} + v^i v^\beta \Gamma_{\beta i}^j = \frac{dv^j}{dt} + v^k \Gamma_{ki}^j \frac{dv^i}{dt}.$$

В декартовой системе координат получим:

$$a^j = \frac{\partial v^j}{\partial t} + v^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} = \frac{dV^j}{dt}.$$

Решение задачи 4.1. Для определения функции давления следует записать уравнения Навье-Стокса для соответствующей модели сплошной среды

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \Delta v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение, являющееся выражением закона неразрывности для несжимаемой жидкости, выполняется автоматически для заданного поля скоростей. Два первых уравнения перепишутся в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -4\rho x,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -4\rho y,$$

откуда можно записать выражение полного дифференциала давления

$$dp = -2\rho(2xdx + 2ydy).$$

Из последнего выражения найдем функцию давления

$$p(x, y) = -2\rho(x^2 + y^2) + \text{const.}$$

Решение задачи 5.1. Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости имеет вид $\text{div } \vec{u} = 0$ или $\partial u_i / \partial x_i = 0$. В данном случае

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A \left[\frac{-4x(x^2 - y^2)}{r^6} + \frac{2x}{r^4} \right], \quad \frac{\partial v}{\partial y} = A \left[\frac{2x}{r^4} - \frac{8xy^2}{r^6} \right].$$

Складывая, получаем: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Таким образом, заданное поле скоростей удовлетворяет уравнению неразрывности несжимаемой жидкости.

Для безвихревого течения необходимо выполнение условия $\text{rot } \vec{u} = 0$.

Проверяем и видим для данного случая:

$$\text{rot } \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A(x^2 - y^2)/r^4 & 2Ax y/r^4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= A \left[2y/r^4 - 8x^2 y/r^6 + 2y/r^4 + 2y(x^2 - y^2)/r^6 \right] \vec{k} = 0$$

Решение задачи 5.4. Из определений функции тока и линий тока следует, что линии тока в данный момент времени t являются решениями дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}.$$

В случае плоских течений остается одно дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v},$$

которое для данной задачи приводится к виду:

$$\frac{dx}{Kx} = \frac{dy}{-Ky}.$$

Решением данного уравнения является зависимость $xy = C$ – уравнение гиперболы. Различные значения постоянной C будут соответствовать различным линиям тока (см. рис.). Направление течения можно определить по заданным скоростям. Предполагая K положительным параметром, получим, что при положительных значениях y компонента $v = -Ky$ будет отрицательной, а компонента $u = Kx$ при положительных x – положительной. Направления течения в других четвертях координатной плоскости определяются аналогично (см. рис).

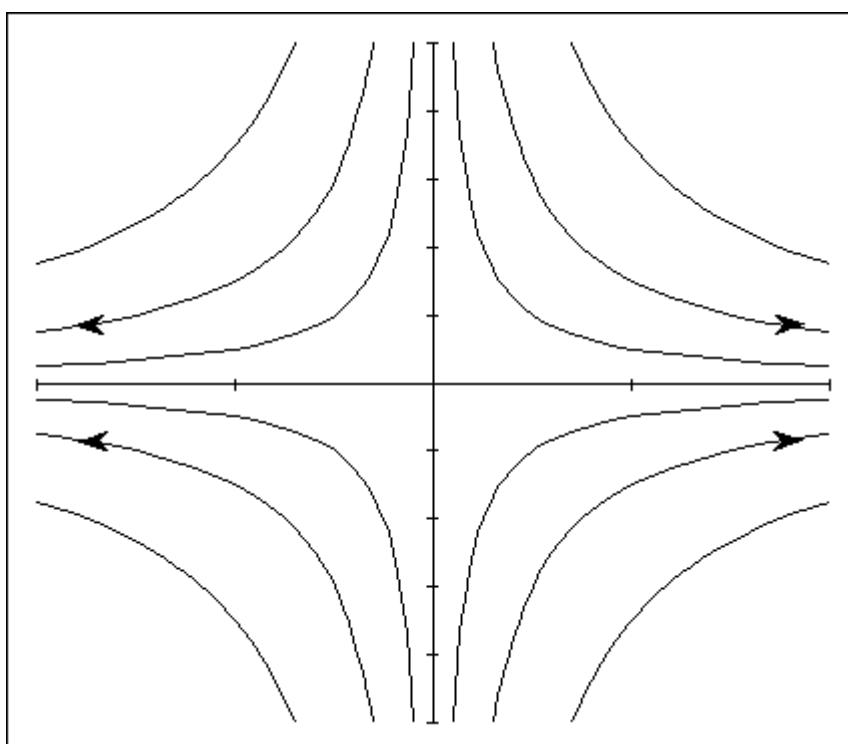


Рис. к задаче 5.4. Изображение линий тока и направления течения

Решение задачи 6.3. Вес конуса в

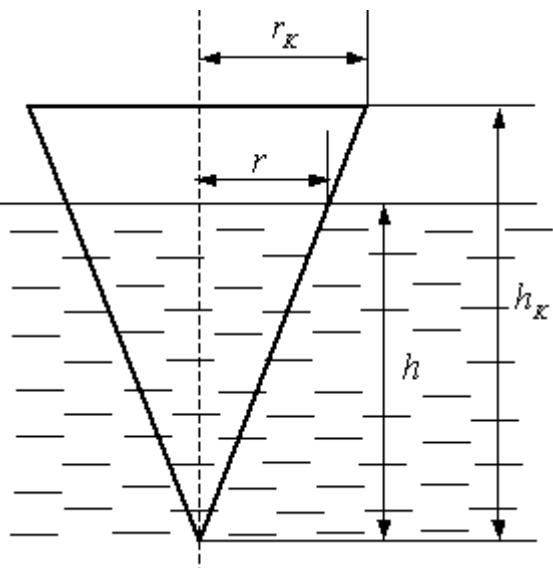
воздухе $F_{gK} = \rho_{\text{д}} g V_K = \frac{1}{3} \pi r_K^2 h_K \rho_{\text{д}} g$.

Вес воды в объеме, равном объему погруженной в нее части конуса

$F_{gB} = \frac{1}{3} \pi r^2 h \rho_B g$. Из рисунка видно,

что $\frac{r_K}{r} = \frac{h_K}{h}$. Следовательно

$$r_K^2 = r^2 \frac{h_K^2}{h^2}.$$



После подстановки r_K^2 в формулу для F_{gK} и учитывая, что по закону Архимеда $F_{gK} = F_{gB}$, получаем

$$\rho_{\text{д}} g h_K^3 = \rho_B g h^3, \quad h = h_K \sqrt[3]{\frac{\rho_{\text{д}}}{\rho_B}} = 2.785 \text{ м.}$$

Указания к решению задачи 6.8. Условие начала поднятия шара отыскивается из условия равенства суммарной массы газа внутри шара с его оболочкой массе вытесненного шаром воздуха:

$$m_{\text{оболочки}} + m_{\text{газа}} = m_{\text{воздуха}} \Rightarrow m_{\text{оболочки}} + \rho_2 V = \rho_1 V \Rightarrow \rho_2 = \rho_1 - \frac{m_{\text{обол}}}{V}$$

$$\rho_1 R T_1 = p_1 = p_2 = \rho_2 R T_2 \Rightarrow \frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_1} - \frac{R m_{\text{обол}}}{PV} \Rightarrow T_2 = \frac{T_1 PV}{PV - T_1 R m_{\text{обол}}}$$

Решение задачи 7.4. Пьезометрические высоты в сечениях (1) и (3) будут

$$h_1 = h_3 = \frac{p_1}{\rho g} = \frac{0.3 \cdot 10^6}{950 \cdot 9.81} = 32.2 \text{ м.}$$

Для определения пьезометрической высоты в сечении (2) запишем уравнение Бернулли для первого и второго сечений:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2.$$

Здесь $z_1 = z_2$, так как труба горизонтальна. Скорости

$$V_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2}, \quad V_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2}.$$

Тогда искомая пьезометрическая высота во втором сечении будет:

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{p_2}{\rho g} = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} - \frac{V_2^2}{2g} = \frac{8Q^2}{g\pi^2 d_1^4} - \frac{8Q^2}{g\pi^2 d_2^4} + \frac{p_1}{\rho g} = \\ &= \frac{8Q^2}{g\pi^2} \left(\frac{1}{d_1^4} - \frac{1}{d_2^4} \right) + \frac{p_1}{\rho g} = 11.12 \text{ м} \end{aligned}$$

К решению задачи 7.6. Центробежная сила: $F = mR\omega^2$. Уравнение установившегося движения: $\partial P / \partial x^i = \rho F_i$. Уравнение поверхности найдем из уравнения гидростатики: $dp = \frac{\rho\omega^2}{2} d(x^2 + y^2) - \rho g dz$, константу интегрирования – из условия $p(0,0,z_0 = 0)$, z_0 – из объема жидкости $z_0 = h - (\omega^2 R^2 / (4g))$. Ответ: $P = \pi \rho g h R^2$ – совпадает с весом жидкости.

Решение задачи 10.1. Уравнения плоского пограничного слоя для установившегося течения имеют вид

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= U_e \frac{dU_e}{dX} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} &= 0 \end{aligned}$$

Известно, что в случае потенциального течения компоненты скорости U и V выражаются через функцию тока ψ следующим образом:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X}.$$

При этом второе уравнение плоского пограничного слоя (уравнение несжимаемости) выполняется автоматически и уравнения Прандтля приводятся к одному уравнению в частных производных третьего порядка:

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = U_e \frac{dU_e}{dX} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3}.$$

Решение задачи 10.2. Заметим, что в данном случае внешний по отношению к пограничному слою поток будет однородным, с одинаковой во

всей области течения скоростью U_e . Следовательно, $U_e = const$, $dU_e/dx = 0$ и уравнения пограничного слоя примут вид:

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3}.$$

Границные условия для рассматриваемого случая запишутся в виде:

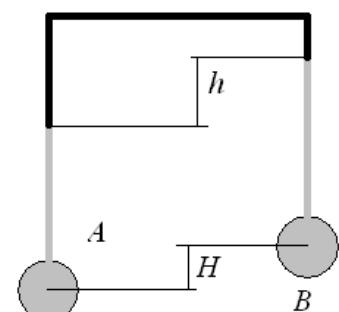
$$\begin{aligned} \psi &= 0, \quad \partial \psi / \partial y = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad x > 0, \\ \partial \psi / \partial y &\rightarrow U_e \quad \text{при } y \rightarrow \infty, \\ \partial \psi / \partial y &= U_e \quad \text{при } x = 0, \quad y > 0. \end{aligned}$$

Первое условие является условием прилипания жидкости к пластинке. Второе условие описывает поведение величины продольной скорости при удалении от пластиинки. Последнее условие является выражением невозмущенного профиля скоростей набегающего потока.

Записанные уравнения пограничного слоя и граничные условия являются формулировкой задачи Блазиуса.

Контрольные задания

1. Записать явный вид соотношений $x^i = x^i(x'^j)$, если $\{x^i\}$ – сферическая, а $\{x'^i\}$ – прямоугольная декартова СК. Найти якобиан преобразования $\|\partial x^i / \partial x'^j\|$.
2. Записать явный вид соотношений $x^i = x^i(x'^j)$, если $\{x^i\}$ – цилиндрическая, а $\{x'^i\}$ – прямоугольная декартова СК. Найти якобиан преобразования $\|\partial x^i / \partial x'^j\|$.
3. Показать, что поле скоростей $u = Ax/r^3$, $v = Ay/r^3$, $w = Az/r^3$, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и A – произвольная константа, удовлетворяет уравнению неразрывности несжимаемой жидкости.
4. Определить линии тока и описать движение среды по полю скоростей $u = K y$, $v = -K x$.
5. Доказать, что для течения $u_i = x_i/(1+t)$ линии тока и траектории совпадают.
6. Доказать, что для поля скоростей $u = x^2 y + y^3$, $v = -x^3 - x y^2$, $w = 0$ линии тока будут окружностями.
7. Доказать, что течение с полем скоростей $u = -2xyz/r^4$, $v = (x^2 - y^2)z/r^4$, $w = y/r^4$, где $r^2 = x^2 + y^2$, удовлетворяет условию несжимаемости. Будет ли это течение безвихревым?
8. Найти разность высот h (рис 3), если $H = 40 \text{ см}$, $p_A - p_B = 1470 \text{ Па}$, а для измерений применялся керосин с плотностью 750 кг/м^3 . Ответ: 100 см



9. Судно получило пробоину на глубине 3 м. Диаметр образовавшегося круглого отверстия равен 0.8 м. Определить силу избыточного давления морской воды ($\rho = 1030 \text{ кг/м}^3$) на «пластырь», заведенный на пробоину. *Ответ: 15.2 кН.*

10. На переднюю часть погруженного в реку тела, находящегося на глубине 5 м, действует максимальное избыточное давление, равное $0.815 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Определить скорость течения реки.

11. Определить число Рейнольдса для движения воды в трубе диаметром $d = 10 \text{ см}$ с объемным расходом $Q = 10 \text{ л/с}$. Коэффициент кинематической вязкости воды $\nu = 1.5 \text{ мм}^2/\text{с}$. *Ответ: 84666.*

12. Определить число Рейнольдса для течения моторного топлива по трубопроводу диаметром 100 мм при расходе $10 \text{ м}^3/\text{ч}$. Кинематическая вязкость топлива $\nu = 35 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. *Ответ: Re=1011.*

13. Определить давление и положение центра давления воды на вертикальную пластину в виде четверти круга радиуса a , верхняя прямолинейная граница которой совпадает с поверхностью воды.

$$\text{Ответ: } P = \rho g a^3 / 3, \quad x_c = \frac{3a}{8}, \quad y_c = \frac{3\pi a}{16}.$$

14. Бочка заполнена смазочным маслом и плотно закрыта при температуре $t_1 = 10^\circ\text{C}$ и давлении $p_1 = 10^5 \text{ Па}$. Определить давление в бочке при температуре окружающей среды $t_2 = 40^\circ\text{C}$, принимая $\beta_{p \text{ масла}} = 1.4 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$, $\beta_{t \text{ масла}} = 0.001 \text{ К}^{-1}$. *Ответ: $\Delta p = 214 \cdot 10^5 \text{ Па}$ (в заполненной бочке $\rho = \text{const}$).*

15. При гидравлических испытаниях трубопровода диаметром $D = 0.5 \text{ м}$ и длиной $l = 4 \text{ м}$ в системе поднимают давление. Определить массу воды, которую требуется дополнительно закачать в трубопровод, чтобы давление повысилось на величину $\Delta p = 2.5 \text{ бар}$.

Ответ: 0.0883 кг.

16. Чему равно относительное изменение плотности морской воды (в процентах) при вертикальном погружении на глубину $h = 300\text{ м}$?

Ответ: 0.13 %.

17. Записать уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости в сферической системе координат.

18. Записать уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости в цилиндрической системе координат.

19. В нерастяжимой оболочке метеозонда объемом 75 м^3 , имеющей в нижней части небольшое отверстие, находится водород. На какую максимальную высоту поднимется зонд, если известно, что атмосферное давление уменьшается в 2 раза через каждые 5 км высоты? Давление воздуха у поверхности Земли $1 \cdot 10^5\text{ Па}$, температура воздуха в стратосфере $223\text{ }^{\circ}\text{К}$, масса оболочки 7 кг. *Высотные метеозонды поднимаются до 40 км; рекорд для беспилотного аэростата составляет 51,8 км.*
 $R = R_{yH} / \mu$; $R_{yH} = 8.31\text{ Дж} / (\text{моль } ^{\circ}\text{К})$.

20. В некотором участке атмосферы известно распределение скоростей $v_x = (Ky) \text{ м/с}$, $v_y = -(Kx) \text{ м/с}$, $K > 0$. 1) Определить линии тока и описать движение среды. 2) Определить положение метеозонда, если известно, что T минут назад он находился в точке (x_0, y_0) , и из-за сопротивления среды скорость перемещения метеозонда в два раза меньше скорости воздушного потока. *Линии тока – окружности с центром в начале координат; движение происходит по часовой стрелке (антициклон).*

Литература

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1,2. М.: Наука. 1978.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Изд-во иностранной литературы. 1956. 528 с.
3. Себиси Т., Брэдшоу П. Конвективный теплообмен. М.: Мир. 1987. 592 с.
4. Беннет К.О., Майерс Дж. Е. Гидродинамика, теплообмен и массообмен. М.: Недра. 1966. 725 с.
5. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир. 1986. 182 с.
6. Фрик П.Г. Тurbulentность: подходы и модели. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 292 с.
7. Мазо А.Б. Моделирование турбулентных течений несжимаемой жидкости. Учебное пособие. Казань: Изд-во Казанского университета. 2007. 109 с.
8. Монин А.С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л.: Гидрометеоиздат. 1988. 424 с.
9. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. М.: «Мир». 1986. Т 1, Т. 2.
10. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: «Наука», 1987, – 840 с.
11. Титтенс О., Прандтль Л. Гидро- и аэромеханика. Москва, Ленинград, 1933, Т. 1, 225 с.
12. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: «Мир», 1974. – 320 с.
13. Овсянников М.К., Орлова Е.Г., Емельянов П.С. Основы гидромеханики. М.: «РКонсульт», 2003 151 с.