КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Неопределенный интеграл

Учебно-методическое пособие

Казань
2013

УДК 517

Печатается по решению Редакционно-издательского совета

ФГАОУ ВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет
учебно-методической комиссии
Института математики и механики
Протокол № 5 от 13 июня 2013 г.,
заседания кафедры математического анализа
Протокол № 9 от 7 июня 2013 г.

Авторы-составители:
канд. физ.– мат. наук, доцент Луговая Г.Д.,
канд. физ.– мат. наук Скворцова Г.Ш.
Рецензенты
кандидат физико-математических наук, доцент Турилова Е.А.

[**Неопределенный интеграл.**]: Учебно-методическое пособие./ Луговая Г.Д., Скворцова Г.Ш. — Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2013. — 46 с.

Данное учебное пособие предназначено для проведения занятий по курсу математического анализа со студентами, обучающимся по всем специальностям и направлениям Института математики и механики.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В пособии приведены некоторые теоретические сведения по теме "Неопределенный интеграл", изучаемой в курсе "Математический анализ". Также даны методические указания к решению задач по этой теме. Пособие содержит подборку задач, которые могут быть использованы для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов I курса всех специализаций и направлений Института математики и механики.

СОГЛАШЕНИЯ

В пунктах под названием "Упражнения" в квадратных скобках приведены ответы.

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ИНТЕГРАЛОВ

1.1. Пусть $U \subset \mathbb{R}$ открыто. Функция $F : U \to \mathbb{R}$ называется *первообразной* для функции $f : U \to \mathbb{R}$, если F дифференцируема и $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in U$. Всякая непрерывная функция обладает первообразной. Всюду ниже все функции предполагаются непрерывными. Считается также, что областью определения всех встречающихся функций является некоторый интервал (a, b).

1.2. Если $F(x)$— первообразная для $f(x)$, то любая другая первообразная $G(x)$ для $f(x)$ выражается формулой: $G(x) = F(x) + C$, где C—некоторая постоянная.

1.3. *Неопределенным интегралом* от функции f называется совокупность всех ее первообразных. Обозначение: $\int f(x)dx$.
Таким образом, если $F(x)$ — некоторая первообразная для $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C|\ C \in \mathbb{R}\}.$$

Будем использовать краткую запись:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

1.4. Таблица основных интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$\int \sin x\ dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x\ dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

1.5. Свойства неопределенного интеграла:

$$\int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C, \text{ в частности, } \int dx = x + C;$$

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \quad (0 \neq \lambda \in \mathbb{R}); \quad \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Вычисление следующих интегралов основано на применении свойств **1.5.** и таблицы **1.4.**

1.6. Примеры

1.6.1. $\int (3-x^2)^3 dx = \int (27-27x^2+9x^4-x^6)dx = 27\int dx - 27\int x^2 dx + 9\int x^4 dx - \int x^6 dx =$
$= 27x - 9x^3 + 9\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + C.$

1.6.2. $\int \dfrac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \sqrt{x} dx + \int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx = \dfrac{2}{3} x^{3/2} + 2x^{1/2} + C =$
$= \dfrac{2}{3} x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$

1.6.3. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \dfrac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \dfrac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$

1.6.4. $\int \dfrac{x^2}{1+x^2} dx = \int \dfrac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int dx - \int \dfrac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C.$

1.6.5.

$\int (2^x+3^x)^2 dx = \int (2^{2x}+2\cdot 6^x+3^{2x})dx = \int 4^x dx + 2\int 6^x dx + \int 9^x dx = \dfrac{4^x}{\ln 4} + 2\dfrac{6^x}{\ln 6} + \dfrac{9^x}{\ln 9} + C.$

1.6.6. $\int 2^x \cdot 3^{2x} dx = \int 18^x dx = \dfrac{18^x}{\ln 18} + C.$

1.6.7. $\int \cos^2 \dfrac{x}{2} dx = \int \dfrac{1+\cos x}{2} dx = \dfrac{1}{2}\int dx + \dfrac{1}{2}\int \cos x dx = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin x}{2} + C.$

1.6.8. $\int \operatorname{th}^2 x dx = \int \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \int \dfrac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \int dx - \int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = x - \operatorname{th} x + C.$

1.7. Упражнения

1.7.1. $\int (1-x)(1-2x)(1-3x)dx.$ $\left[x - 3x^2 + \dfrac{11}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^4 + C\right]$

1.7.2. $\int \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx.$ $\left[\dfrac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + C\right]$

1.7.3. $\int (\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{x^2})^3 dx.$ $\left[16x - \dfrac{36}{5}\sqrt[3]{4x^5} + \dfrac{18}{7}\sqrt[3]{2x^7} - \dfrac{x^3}{3} + C\right]$

1.7.4. $\int \left(\dfrac{8}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{2}{x}\right) dx.$ $\left[-\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{4}{x} + 2\ln|x| + C\right]$

1.7.5. $\int \dfrac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx.$ $\left[-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{5}x^2 + \dfrac{1}{8}x^3\right) + C\right]$

1.7.6. $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}dx.$ $\qquad \left[2x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2}+C\right]$

1.7.7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx.$ $\qquad \left[\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C\right]$

1.7.8. $\displaystyle\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx.$ $\qquad \left[\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}+C\right]$

1.7.9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx.$ $\qquad \left[\ln|x|-\frac{1}{4x^4}+C\right]$

1.7.10. $\displaystyle\int (1+\sin x+\cos x)dx.$ $\qquad [x-\cos x+\sin x+C]$

1.7.11. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x dx.$ $\qquad [-x+\operatorname{tg} x+C]$

1.7.12 $\displaystyle\int \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ $\qquad [2\arcsin x-x+C]$

1.7.13. $\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{2}dx.$ $\qquad \left[\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}+C\right]$

1.7.14. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}.$ $\qquad \left[-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg} x+C\right]$

1.7.15. $\displaystyle\int \frac{20^x+10^x}{5^x}dx.$ $\qquad \left[\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2^x}{\ln 2}+C\right]$

1.7.16. $\displaystyle\int (a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)dx.$ $\qquad [a\operatorname{ch} x+b\operatorname{sh} x+C]$

1.7.17. $\displaystyle\int \operatorname{cth}^2 x dx.$ $\qquad [x-\operatorname{cth} x+C]$

2. МЕТОД ВВЕДЕНИЯ НОВОГО АРГУМЕНТА

2.1. Если

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

то

$$\int f(u)du=F(u)+C,$$

где $u=\varphi(x)$.

2.2. Примеры

2.2.1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+a}=\int\frac{d(x+a)}{x+a}=\ln|x+a|+C.$

2.2.2. $\displaystyle\int (2x-3)^{10}dx=\frac{1}{2}\int(2x-3)^{10}d(2x-3)=\frac{(2x-3)^{11}}{22}+C.$

2.2.3. $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-3x}dx=-\frac{1}{3}\int(1-3x)^{1/3}d(1-3x)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}(1-3x)^{4/3}+C=-\frac{(1-3x)^{4/3}}{4}+C.$

2.2.4. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\dfrac{x^2}{a^2}\right)} = \int \frac{d\left(\dfrac{x}{a}\right)}{a\left(1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\dfrac{x}{a}\right)}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$

2.2.5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\dfrac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C \ (a>0).$

2.2.6.

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{(1-x)(1+x)} = \int \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)(1+x)}dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{1+x} + \int \frac{dx}{1-x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{d(1+x)}{1+x} - \int \frac{d(1-x)}{1-x}\right) = \frac{1}{2}(\ln|1+x| - \ln|1-x|) = \frac{1}{2}\ln\frac{|1+x|}{|1-x|}+C.$$

2.2.7. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\dfrac{x}{a}\right)}{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{|1+\dfrac{x}{a}|}{|1-\dfrac{x}{a}|} = \frac{1}{2a}\ln\frac{|a+x|}{|a-x|}+C.$

2.2.8. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2\dfrac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\cos^2\dfrac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$

2.2.9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x} = -\int \frac{d\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C.$

2.2.10. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}d(1-x^2) =$
$\displaystyle= -\frac{1}{2}\cdot 2(1-x^2)^{1/2} = -\sqrt{1-x^2}+C.$

2.2.11. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{x^8-2} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2-(\sqrt{2})^2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{|\sqrt{2}+x^4|}{|\sqrt{2}-x^4|}+C = \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\frac{|x^4-\sqrt{2}|}{|x^4+\sqrt{2}|}+C.$
(Здесь мы использовали результат примера 2.2.7.)

2.2.12. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C.$

2.2.13. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+1} = \int \frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}dx = \int \frac{d\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}{2+\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{2}}+C.$

2.2.14. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln|\cos x|+C.$

2.2.15. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\int\frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|+C.$

2.2.16. $\displaystyle\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}=\int\frac{d(\sin x)}{\sqrt{3-2\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\sin x)}{\sqrt{\frac{3}{2}-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right).$

2.2.17. $\displaystyle\int\frac{\ln^3 x}{x}dx=\int\ln^3 x d(\ln x)=\frac{\ln^4 x}{4}+C.$

2.2.18. $\displaystyle\int\frac{2^x dx}{1-4^x}=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{d(2^x)}{1-(2^x)^2}=\frac{1}{2\ln 2}\ln\frac{|1+2^x|}{|1-2^x|}+C.$

2.2.19. $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+1}=\int\frac{d(e^x+1))}{(e^x)^2+1}=\operatorname{arctg}(e^x)+C.$

2.2.20. $\displaystyle\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}d\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}+C.$

2.3. Упражнения

2.3.1. $\displaystyle\int\frac{dx}{(5x-2)^{5/2}}.\qquad\left[-\frac{2}{15(5x-2)^{3/2}}+C\right]$

2.3.2. $\displaystyle\int\frac{dx}{2+3x^2}.\qquad\left[\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{\frac{3}{2}})+C\right]$

2.3.3. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.\qquad\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(x\sqrt{\frac{3}{2}})+C\right]$

2.3.4. $\displaystyle\int\frac{dx}{1-\cos x}.\qquad\left[\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+C\right]$

2.3.5. $\displaystyle\int\operatorname{ctg}x dx.\qquad[\ln|\sin x|+C]$

2.3.6. $\displaystyle\int\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}.\qquad\left[\cos\frac{1}{x}+C\right]$

2.3.7. $\displaystyle\int\sin^5 x\cos x dx.\qquad\left[\frac{1}{6}\sin^6 x+C\right]$

2.3.8. $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx.\qquad\left[\frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C\right]$

2.3.9. $\displaystyle\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx.\qquad\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x}+C\right]$

2.3.10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}$. $\quad \left[-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\operatorname{ctg}^3 x} + C\right]$

2.3.11. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$. $\quad \left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C\right]$

2.3.12. $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x \sqrt{1-x^2}}$. $\quad \left[-\frac{1}{\arcsin x} + C\right]$

2.3.13. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{3\sin^2 x + 2\cos^2 x}} dx$. $\quad \left[\sqrt{3\sin^2 x + 2\cos^2 x} + C\right]$

2.3.14. $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$. $\quad [\ln(2+e^x) + C]$

2.3.15. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$. $\quad \left[\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x} + C\right]$

2.3.16. $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$. $\quad [\ln|\ln(\ln x)| + C]$

2.3.17. $\int \frac{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}}{\sqrt{1+x^2}} dx$. $\quad \left[\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3(x+\sqrt{1+x^2})} + C\right]$

2.3.18. $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$. $\quad \left[-\frac{1}{2(1+x^2)} + C\right]$

2.3.19. $\int \frac{xdx}{4+x^4}$. $\quad \left[\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2} + C\right]$

2.3.20. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(8x^3+27)^2}}$. $\quad \left[\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27} + C\right]$

2.3.21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$. $\quad [2\arcsin\sqrt{x} + C]$

2.3.22. $\int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$. $\quad \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + C\right]$

2.3.23. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx$. $\quad \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1} + C\right]$

2.3.24. $\int \frac{x^4dx}{(x^5+1)^4}$. $\quad \left[-\frac{1}{15(x^5+1)^3} + C\right]$

2.3.25. $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x-4^x} dx$. $\quad \left[\frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)}\ln\frac{|3^x-2^x|}{|3^x+2^x|} + C\right]$

2.3.26. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$. $\quad \left[2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C\right]$

2.3.27. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. $\quad\left[-\arcsin\frac{1}{|x|}+C\right]$

2.3.28. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. $\quad\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C\right]$

2.3.29. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x\sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}$. $\quad\left[3\sqrt[3]{\operatorname{th} x}+C\right]$

2.3.30. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$. $\quad\left[\ln|\operatorname{th}\frac{x}{2}|+C\right]$

3. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ (МЕТОД ПОДСТАНОВКИ)

3.1. Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок трех видов:

3.1.1. $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — строго монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t. Формула замены переменной в этом случае:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))d\varphi(t)=\int f(\varphi(t))\varphi\prime(t)dt;$$

3.1.2. $t=\psi(x)$, где t —новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке:

$$\int f(\psi(x))\psi\prime(x)dx=\int f(\psi(x))d\psi(x)=\int f(t)dt.$$

3.1.3. $\varphi(t)=\psi(x)$, где t —новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке:

$$\int f(\varphi(t))\varphi\prime(t)dt=\int f(\varphi(t))d\varphi(t)=\int f(\psi(x))d\psi(x)=\int f(\psi(x))\psi\prime(x)dx.$$

3.2. Примеры

3.2.1. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

Сделаем подстановку $t=\sqrt{e^x+1}$, откуда $e^x+1=t^2$. Дифференцируя обе части последнего равенства, получим

$$e^x dx=2tdt\Rightarrow dx=\frac{2tdt}{t^2-1}.$$

Таким образом(с учетом результата примера 2.2.6),

$$\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\frac{|t-1|}{|t+1|}+C=\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C.$$

3.2.2. Найти интеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx \qquad (a > 0).$

Положим $x = a\sin t \qquad (-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2})$. Тогда $dx = a\cos t dt, \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$. Таким образом,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2} \int dt + \frac{a^2}{4} \int \cos(2t)d(2t) =$$

$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin 2t}{2} + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C.$$

Переход в ответе к старой переменной x совершен с помощью формул:

$$t = \arcsin \frac{x}{a}, \quad \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a},$$

$$\frac{\sin 2t}{2} = \sin t \cos t = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}.$$

3.2.3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$.

Положим $x = a \operatorname{tg} t$. Тогда $dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt,\ x^2 + a^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t}$. Таким образом,

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{a^3} \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2a^3} \int (1 + \cos 2t)dt = \frac{1}{2a^3}t + \frac{1}{4a^3} \sin 2t + C.$$

Вернемся к старой переменной x, пользуясь формулами:

$$\sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \frac{x^2}{x^2 + a^2},\ \cos^2 t = 1 - \sin^2 t = \frac{a^2}{x^2 + a^2},\ \sin 2t = 2\sin t \cos t = \frac{2xa}{x^2 + a^2}.$$

Окончательно получаем: $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + C.$

3.2.4. Найти интеграл $\int \sqrt{a^2 + x^2}dx$. $(a > 0)$

Полагая $x = a \operatorname{sh} t$, имеем $dx = a \operatorname{ch} t\ dt,\ \sqrt{a^2 + x^2} = a \operatorname{ch} t$. Тогда

$\int \sqrt{a^2 + x^2}dx = \int a^2 \operatorname{ch}^2 t\ dt = \frac{1}{2} \int (\operatorname{ch} 2t + 1)dt = \frac{a^2}{4} \operatorname{sh} 2t + \frac{a^2 t}{2} + C.$

Вернемся к старой переменной:

$$\frac{x}{a} = \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

откуда $e^t = \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a}$ и, следовательно,

$$t = \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}| - \ln a;\ \operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = 2 \operatorname{sh} t \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Окончательно получаем:

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + C.$$

3.2.5. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} \quad (x>0)$.

Положим $x = \dfrac{1}{t}$, тогда $dx = -\dfrac{1}{t^2}dt$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\int \frac{t^2dt}{t^2\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}} = -\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{\sqrt{t^2+1}} = -\sqrt{t^2+1}+C.$$

3.2.6. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

Положим $\sqrt{x^2+a^2} = t - x$. Тогда

$$x = \frac{t^2-a^2}{2t},\ dx = \frac{t^2+a^2}{2t^2},\ \sqrt{x^2+a^2} = t - \frac{t^2-a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t}.$$

Следовательно, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sqrt{x^2+a^2}+x| + C.$

3.3. Упражнения

3.3.1. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$. $\quad \left[2\sqrt{x} - 4\ln|2+\sqrt{x}| + C\right]$

3.3.2. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$. $\quad \left[-\frac{2}{15}(32+8x+3x^2)\sqrt{2-x}+C\right]$

3.3.3. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$. $\quad \left[-\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2}+C\right]$

3.3.4. $\displaystyle\int x^5(2-5x^3)^{2/3}dx$. $\quad \left[-\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{5/3}+C\right]$

3.3.5. $\displaystyle\int x^3(1-5x^2)^{10}dx$. $\quad \left[-\frac{1+55x^2}{6600}(1-5x^2)^{11}+C\right]$

3.3.6. $\displaystyle\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}dx$. $\quad \left[(\frac{2}{3} - \frac{4}{7}\sin^2 x + \frac{2}{11}\sin^4 x)\sqrt{\sin^3 x}+C\right]$

3.3.7. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{x/2}+e^x}$. $\quad \left[-x - 2e^{-x/2} + 2\ln(1+e^{x/2}) + C\right]$

3.3.8. $\displaystyle\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$. $\quad \left[\frac{2}{3}(-2+\ln x)\sqrt{1+\ln x}+C\right]$

3.3.9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (x>0)$. $\quad \left[-\arcsin\frac{1}{x}+C\right]$

3.3.10. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{1+x}$. $\quad \left[\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}+C\right]$

3.3.11. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$. $\quad\left[\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C\right]$

3.3.12. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$. $\quad\left[a\arcsin\dfrac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C\right]$

3.3.13. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$. $\quad\left[\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\dfrac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C\right]$

3.3.14. $\displaystyle\int \sqrt{(x-a)(b-x)}dx$. $\left[\dfrac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}}+\dfrac{2x-(a+b)}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+C.\right]$

4. МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

4.1. *Интегрированием по частям* называется нахождение интеграла по формуле

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

где $u=u(x), v=v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции переменной x.
При этом за u берется та функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv — та часть подинтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.
Так, например, для интегралов вида

$$\int P(x)e^{ax}dx, \int P(x)\sin axdx, \int P(x)\cos axdx,$$

где $P(x)$ — многочлен, за u принимается $P(x)$, а за dv — соответственно, выражения $e^{ax}dx, \sin ax\ dx, \cos ax\ dx$; для интегралов вида

$$\int P(x)\ln xdx, \int P(x)\arcsin xdx, \int P(x)\arccos xdx$$

за u принимаются, соответственно, функции $\ln x, \arcsin x, \arccos x$, а за dv — выражение $P(x)dx$.

4.2. Примеры

4.2.1. Найти интеграл $\displaystyle\int \ln xdx$.
Положим $u=\ln x, dv=dx$; тогда

$$v=x, du=\frac{dx}{x}.$$

Использую формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int \ln xdx = x\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

4.2.2. Найти интеграл $\int \operatorname{arctg} x dx$.

Положим

$$u = \operatorname{arctg} x, dv = dx \Rightarrow v = x, du = \frac{dx}{1+x^2}.$$

По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

4.2.2. Найти интеграл $\int x \sin x dx$.

Положим $u = x, dv = \sin x dx$; тогда $du = dx, v = -\cos x$ и

$\int x \sin x dx = x \cos x + \int \cos x dx = x \cos x + \sin x + C.$

4.2.4. Найти интеграл $\int x^2 e^x dx$.

Положим $u = x^2, dv = e^x dx$; тогда $du = 2xdx, v = e^x$ и, следовательно,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 - 2 \int x e^x dx.$$

Чтобы найти $\int x e^x dx$, применим еще раз формулу интегрирования по частям, полагая

$$u = x, dv = e^x dx \Rightarrow du = dx, v = e^x,$$

следовательно

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

4.2.5. Найти интеграл $\int \arccos^2 x dx$.

Положим $u = \arccos^2 x, dv = dx$; тогда $v = x, du = -\frac{2 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Следовательно,

$$\int \arccos^2 x dx = x \arccos^2 x + 2 \int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Для вычисления полученного интеграла еще раз применим формулу интегрирования по частям, положив

$$u = \arccos x, \quad dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -d\sqrt{1-x^2}, du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

В результате находим

$$\int \arccos^2 x dx = x \arccos^2 x + 2(-\sqrt{1-x^2} \arccos x - \int dx) = x \arccos^2 x - 2\sqrt{1-x^2} \arccos x - 2x + C.$$

4.2.6. Найти интеграл $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$.

Полагая $u = x, \quad dv = \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$, имеем

$$v = \int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(1+x^2)}, \quad du = dx.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

4.2.7. Найти интеграл $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

Полагая

$$u = \ln(x+\sqrt{1+x^2}), \quad dv = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}},$$

имеем

$$v = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}, \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int dx = \sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - x + C.$$

4.2.8. Найти интегралы $I_1 = \int e^{ax}\cos bx dx, \quad I_2 = \int e^{ax}\sin bx dx$.

Применяя к каждому из интегралов формулу интегрирования по частям (в первом $u = \cos bx$, $dv = e^{ax}dx$; во втором $u = \sin dx$, $dv = e^{ax}dx$), получим

$$I_1 = \frac{1}{a}\, e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\, I_2, \quad I_2 = \frac{1}{a}\, e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\, I_1,$$

откуда

$$I_1 = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\, e^{ax} + C, \quad I_2 = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\, e^{ax} + C.$$

4.3. Упражнения

4.3.1. $\int x^n \ln x dx \qquad (n \neq -1). \qquad \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C\right]$

4.3.2. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx. \qquad \left[-\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2) + C\right]$

4.3.3. $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx. \qquad \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\left(\ln^2 x - \frac{4}{3}\ln x + \frac{8}{9}\right) + C\right]$

4.3.4. $\int xe^{-x}dx. \qquad [-(x+1)e^{-x} + C]$

4.3.5. $\int x^2 e^{-2x} dx.$ $\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)+C\right]$

4.3.6. $\int x^3 e^{-x^2} dx.$ $\left[-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}+C\right]$

4.3.7. $\int x\cos x dx.$ $[x\sin x+\cos x+C]$

4.3.8. $\int x^2 \sin 2x dx.$ $\left[-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+C\right]$

4.3.9. $\int x \operatorname{sh} x dx.$ $[x\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x+C]$

4.3.10. $\int x^3 \operatorname{ch} 3x dx.$ $\left[\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x}{9}\right)\operatorname{sh} 3x-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{27}\right)\operatorname{ch} 3x+C\right]$

4.3.11 $\int \arcsin x dx.$ $\left[x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C\right]$

4.3.12. $\int x \operatorname{arctg} x dx.$ $\left[-\frac{x}{2}+\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg} x+C\right]$

4.3.13. $\int x^2 \arccos x dx.$ $\left[-\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}+\frac{x^3}{3}\arccos x+C\right]$

4.3.14. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx.$ $\left[x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C\right]$

4.3.15. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx.$ $\left[x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C\right]$

4.3.16 $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx.$ $[-\sqrt{x}+(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C]$

4.3.17. $\int \sin x\ln(\operatorname{tg} x)dx.$ $\left[\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg} x)+C\right]$

4.3.18. $\int x^5 e^{x^3} dx.$ $\left[\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}+C\right]$

4.3.19. $\int \arcsin^2 x dx.$ $\left[x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C\right]$

4.3.20. $\int x\operatorname{arctg}^2 x dx.$ $\left[\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg}^2 x-x\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C\right]$

4.3.21. $\int x^2\ln\frac{1-x}{1+x}dx.$ $\left[-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}\ln|1-x^2|+\frac{x^3}{3}\ln|\frac{1-x}{1+x}|+C\right]$

4.3.22. $\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$ $(a\neq 0).$ $\left[\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}+\frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C\right]$

4.3.23. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx.$ $\qquad\left[\dfrac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{a^2+x^2}-\dfrac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C\right]$

4.3.24. $\displaystyle\int x\sin^x dx.$ $\qquad\left[\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x}{4}\sin 2x-\dfrac{\cos 2x}{8}+C\right]$

4.3.25. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx.$ $\qquad\left[2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C\right]$

4.3.26 $\displaystyle\int x\sin\sqrt{x}dx.$ $\qquad\left[2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-6(2-x)\sin\sqrt{x}+C\right]$

4.3.27. $\displaystyle\int e^x\sin^2 xdx.$ $\qquad\left[\dfrac{e^{2x}}{8}(2-\sin 2x-\cos 2x)+C\right]$

4.3.28. $\displaystyle\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx.$ $\qquad\left[-\dfrac{(1-x)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C\right]$

4.3.29. $\displaystyle\int \sin(\ln x)dx.$ $\qquad\left[\dfrac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C\right]$

4.3.30. $\displaystyle\int \cos(\ln x)dx.$ $\qquad\left[\dfrac{x}{2}(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))+C\right]$

4.3.31. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}dx.$ $\qquad\left[-x+\dfrac{1}{2}\ln(1+e^{2x})-e^{-x}\operatorname{arctg} e^x+C\right]$

5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЕ ТРЁХЧЛЕНЫ

5.1. Нахождение интегралов в этом разделе основано на приведении квадратного трехчлена к каноническому виду и применении следующих формул, полученных в ранее разобранных примерах (см.примеры 2.2.4, 2.2.5, 2.2.7, 3.2.2, 3.2.4, 3.2.6.).

5.1.1. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C \quad (a\neq 0).$

5.1.2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C \quad (a>0).$

5.1.3. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{|a+x|}{|a-x|}+C \quad (a\neq 0).$

5.1.4. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C \quad (a>0).$

5.1.5. $\displaystyle\int \sqrt{x^2\pm a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C.$

5.1.2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C.$

5.2. Примеры

5.2.1. $\displaystyle\int\frac{dx}{3x^2-2x-1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{9}}=$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{1}{4}\ln\frac{\left|\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}\right|}{\left|\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}\right|}=\frac{1}{4}\ln\frac{3|x-1|}{|3x+1|}+C=\frac{1}{4}\ln\frac{|x-1|}{|3x+1|}+C.$$

5.2.2. $\displaystyle\int\frac{dx}{2x^2-2x+3}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}=$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{5}/2}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$$

5.2.3. $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

5.2.4. $\displaystyle\int\frac{(2x^3+3x)dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(4x^3+2x+4x)dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(4x^3+2x)dx}{x^4+x^2+1}+\int\frac{2xdx}{x^4+x^2+1}=$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^4+x^2+1)}{x^4+x^2+1}+\int\frac{d\left(x^2+\frac{1}{2}\right)}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\ln(x^4+x^2+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}+C.$$

5.2.5. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{2-(x+1)^2}}=\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$

5.2.6. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}\quad(x>0).$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=-\int\frac{d\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{(\frac{1}{x}+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}=$$

$$=-\ln\frac{|x+2+2\sqrt{x^2+x+1}|}{|x|}+C.$$

5.2.7. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x+1)^2-2(x+1)+2}} =$

$$\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2\sqrt{1-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{2}{(x+1)^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\dfrac{\sqrt{2}}{x+1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{x+1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\dfrac{1}{2}}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{|1-x+\sqrt{2(1+x^2)}|}{|1+x|} + C.$$

5.2.8. Получим рекуррентную формулу для отыскания интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \quad (n>1).$$

$$I_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}.$$

Для отыскания последнего интеграла применим метод интегрирования по частям, полагая

$$u = x, \qquad dv = \frac{xdx}{(x^2+a^2)^n}.$$

Следовательно,

$$v = \int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}}, \qquad du = dx.$$

Следовательно, $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}},$

и окончательно получаем $\displaystyle I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)}I_{n-1}.$

5.2.9. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx, \quad \frac{p^2}{4}-q<0 \ (n>1).$

Покажем, что отыскание этого интеграла сводится к отысканию интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}.$$

Действительно,

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{\dfrac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\dfrac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} =$$

$$\frac{A}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\dfrac{p}{2}\right)}{\left(\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+\left(q-\dfrac{p^2}{4}\right)\right)^n}.$$

5.2.10. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}dx$.

Производя преобразования, как в предыдущем примере, получим

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}dx = \frac{3}{2(x^2+2x+10)} - \int \frac{d(x+1)}{((x+1)^2+9)^2}.$$

Для отыскания последнего интеграла применим рекуррентную формулу, полученную в пункте 5.2.6:

$$\int \frac{d(x+1)}{((x+1)^2+9)^2} = \frac{x+1}{2\cdot 9(2-1)((x+1)^2+9)^{2-1}} + \frac{2\cdot 2-3}{9(2\cdot 2-2)}\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+9} =$$

$$= \frac{x+1}{18((x+1)^2+9)} + \frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C.$$

5.3. Упражнения

5.3.1. $\displaystyle\int \frac{dx}{a+bx^2} \quad (a>0, b>0).$ $\qquad \left[\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{\frac{b}{a}}) + C\right]$

5.3.2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x+2}.$ $\qquad \left[\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C\right]$

5.3.3. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^4-2x^2-1}.$ $\qquad \left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{|x^2-(\sqrt{2}+1)|}{|x^2+(\sqrt{2}-1)|} + C\right]$

5.3.4. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{x^4-x^2+2}.$ $\qquad \left[\frac{1}{4}\ln(x^4-x^2+2) + \frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{7}} + C\right]$

5.3.5. $\displaystyle\int \frac{x^5dx}{x^6-x^3-2}.$ $\qquad \left[\frac{1}{9}\ln(|x^3+1|(x^3-2)^2) + C\right]$

5.3.6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} \quad (a>0, b>0).$ $\qquad \left[\frac{1}{\sqrt{b}}\ln|x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}| + C\right]$

5.3.7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}.$ $\qquad \left[\ln|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}| + C\right]$

5.3.8. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}.$ $\qquad \left[-\sqrt{5+x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}} + C\right]$

5.3.9. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}.$ $\qquad \left[\sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\ln|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}| + C\right]$

5.3.10. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}.$ $\qquad \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x^2+3}{\sqrt{17}} + C\right]$

5.3.11. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}.$ $\qquad \left[\frac{1}{2}\sqrt{x^4-x^2-1} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2-1}| + C\right]$

5.3.12. $\displaystyle\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}dx.$ $\left[-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4}+\frac{3}{4}\arcsin\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}}+C\right]$

5.3.13. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}.$ $\left[\arcsin\frac{x-2}{|x-1|\sqrt{2}}+C\right]$

5.3.14. $\displaystyle\int \sqrt{2+x-x^2}dx.$ $\left[\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}+C\right]$

5.3.15. $\displaystyle\int \sqrt{2+x+x^2}dx.$ $\left[\frac{2x+1}{4}\sqrt{2+x+x^2}+\frac{7}{8}\ln(\frac{1}{2}+x+\sqrt{2+x+x^2})+C\right]$

6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Так как всякую рациональную функцию можно представить в виде суммы полинома и правильной рациональной дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_k(x)}$ $(m<k)$, то в этом параграфе будем говорить об интегрировании правильных рациональных дробей.

6.1. Метод неопределенных коэффициентов. Правильную рациональную дробь можно представить как сумму элементарных рациональных функций:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}(x^2+p_2x+q_2)^{k_2}\dots}=$$

$$=\frac{A_{11}}{x-a_1}+\frac{A_{12}}{(x-a_1)^2}+\ldots+\frac{A_{1n_1}}{(x-a_1)^{n_1}}+\frac{A_{21}}{x-a_2}+\frac{A_{22}}{(x-a_2)^2}+\ldots+\frac{A_{2n_2}}{(x-a_2)^{n_2}}+\ldots+$$

$$+\frac{M_{11}x+N_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{M_{1k_1}x+N_{1k_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}}+\frac{M_{21}x+N_{21}}{x^2+p_2x+q_2}+\ldots+\frac{M_{2k_2}x+N_{2k_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{k_2}}\ldots,$$

где a_i — действительные корни знаменателя, а $x^2+p_jx+q_j$ квадратные трехчлены не имеющие действительных корней. т.е. $p_j^2-4q_j<0$. Числовые значения A_{ij},M_{ij},N_{ij} вычисляют (после приведения правой части к общему знаменателю) приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях левой и правой частей тождества и далее решая полученную систему линейных уравнений (число уравнений в этой системе на единицу больше степени полинома $P(x)$).

Т.о. интеграл от любой правильной рациональной дроби представляется как сумма интегралов от элементарных дробей:

$$\int\frac{Adx}{x-a},\ \int\frac{Adx}{(x-a)^n},\ \int\frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

Эти интегралы вычислены выше (см. пункты 2.2.1,5.2.1,5.2.2.,5.2.8.,5.2.9) и выражаются через элементарные функции. Значит, интеграл от произвольной рациональной функции также выражается через элементарные функции.

6.2. Метод Остроградского. Этот метод применяется для интегрирования правильной рациональной дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}(x^2+p_2x+q_2)^{k_2}\dots}$$

знаменатель которой, имеет кратные корни, то есть $n_i > 1, k_j > 1$. Запишем формулу Остроградского

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx,$$

где $Q(x) = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}(x^2+p_2x+q_2)^{k_2}\dots$. Полином $Q_2(x)$ имеет все те же корни, что и $Q_2(x)$, но, все они простые, то есть

$$Q_2(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)\dots.$$

Полином

$$Q_1(x) = \frac{Q(x)}{Q_2(x)} = (x-a_1)^{n_1-1}(x-a_2)^{n_2-1}\dots(x^2+p_1x+q_1)^{k_1-1}(x^2+p_2x+q_2)^{k_2-1}\dots.$$

Степени полиномов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ меньше степеней полиномов $Q_1(x)$ и Q_2 соответственно. Коэффициенты полиномов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ полагают неопределенными и находят после дифференцирования формулы Остроградского:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

6.3. Замечание. Вышеизложенные методы применимы для любой рациональной функции, но часто оказываются очень громоздкими. Иногда универсальные методы (замены переменных, интегрирования по частям) оказываются более эффективными.

6.4. Примеры

6.4.1. Найти

$$\int \frac{x^5dx}{x^4+x^3+x+1}.$$

Представим подынтегральную функцию в виде суммы полинома и правильной рациональной дроби:

$$\frac{x^5}{x^4+x^3+x+1} = x-1+\frac{x^3-x^2+1}{x^4+x^3+x+1} = x-1+\frac{x^3-x^2+1}{(x+1)x^3+x+1} =$$

$$= x-1+\frac{x^3-x^2+1}{(x+1)(x^3+1)} = x-1+\frac{x^3-x^2+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}.$$

Правильную дробь представим в виде суммы элементарных рациональных дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{x^3-x^2+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{A(x^3+1)+B(x^2-x+1)+(Mx+N)(x^2+2x+1)}{(x+1^2)(x^2-x+1)} =$$

$$= \frac{(A+M)x^3+(B+2M+N)x^2+(-B+M+2N)x+A+B+N}{(x+1^2)(x^2-x+1)}.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях в числителях левой и правой частей. Получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A+M=1 \text{ (при } x^3) \\ B+2M+N=-1 \text{ (при } x^2) \\ -B+M+2N=0 \text{ (при } x^1) \\ A+B+N=1 \text{ (при } x^0) \end{cases},$$

решение которой: $A=\frac{4}{3}, B=\frac{-1}{3}, M=\frac{-1}{3}, N=0$. В итоге получаем

$$\int \frac{x^5dx}{x^4+x^3+x+1} = \int (x-1)dx + \int \frac{x^3-x^2+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}dx =$$

$$= x^2-x+\int \frac{4dx}{3(x+1)} - \int \frac{dx}{3(x+1)^2} - \int \frac{xdx}{3(x^2-x+1)}$$

$$= x^2-x+\frac{4}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3(x+1)} - \int \frac{(2x-1)dx}{6(x^2-x+1)} - \int \frac{dx}{6((x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})} =$$

$$= x^2-x+\frac{4}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} =$$

$$= x^2-x+\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^8}{x^2-x+1} + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

6.4.2. Найти

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}.$$

Запишем по формуле Остроградского (дробь $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ сразу же представим в виде суммы элементарных рациональных дробей):

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2-x+1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x+1)(x^2-x+1)} + \int \frac{P_2(x)dx}{(x+1)(x^2-x+1)} =$$

$$= \frac{Ax^2+Bx+C}{(x+1)(x^2-x+1)} + \int \left(\frac{D}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1}\right)dx.$$

Продифференцируем полученное равенство

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2-x+1)^2} = \left(\frac{Ax^2+Bx+C}{(x+1)(x^2-x+1)}\right)' + \frac{D}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{(2Ax+B)(x^3+1)+3x^2(Ax^2+Bx+C)}{(x+1)^2(x^2-x+1)^2} + \frac{D}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{(2Ax+B)(x^3+1) - 3x^2(Ax^2+Bx+C)}{(x+1)^2(x^2-x+1)^2} +$$

$$+ \frac{D(x+1)(x^2-x+1) + (Mx+N)(x^2-x+1)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2-x+1)^2} =$$

$$= \frac{(D+M)x^5 + (M-A-D+N)x^4 + (D-2B+N)x^3 + (D-3C+M)x^2}{(x+1)^2(x^2-x+1)^2} +$$

$$+ \frac{(2A-D+M+N)x + (B+D+N)}{(x+1)^2(x^2-x+1)^2}.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях в числителях левой и правой частей. Получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} D+M=0 \text{ (при } x^5) \\ -A-D+M+N=0 \text{ (при } x^4) \\ -2B+D+N=0 \text{ (при } x^3) \\ -3C+D+M=0 \text{ (при } x^2) \\ 2A-D+M+N=0 \text{ (при } x^1) \\ B+D+N=1 \text{ (при } x^0) \end{cases},$$

решение которой: $A=0, B=\frac{1}{3}, C=0, D=\frac{2}{9}, M=\frac{-2}{9}, N=\frac{4}{9}$. В итоге получаем

$$\int \frac{x^5dx}{x^4+x^3+x+1} = \frac{x}{3(x+1)(x^2-x+1)} + \int \left(\frac{2}{9(x+1)} + \frac{-2x+4}{9(x^2-x+1)} \right) dx =$$

$$= \frac{x}{3(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{2}{9}\ln|x+1| - \int \frac{2x-1}{9(x^2-x+1)}dx + \int \frac{1}{3((x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})}dx =$$

$$= \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

6.4.3. Найти

$$\int \frac{x^3dx}{(x-1)^{100}}.$$

Методы неопределенных коэфициентов и Остроградского привели бы к громоздким рассчетам (система линейных уравнений порядка 101). Применим метод нового аргумента:

$$\int \frac{x^3dx}{(x-1)^{100}} = \int \frac{(x-1+1)^3dx}{(x-1)^{100}} = \int \frac{(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1}{(x-1)^{100}}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{(x-1)^{97}} + \int \frac{3dx}{(x-1)^{98}} + \int \frac{3dx}{(x-1)^{99}} + \int \frac{dx}{(x-1)^{100}} =$$

$$= -\frac{1}{96(x-1)^{96}} - \frac{3}{97(x-1)^{97}} - \frac{3}{98(x-1)^{98}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}} + C.$$

6.4.4. Найти

$$\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)}.$$

Аналогично 6.4.3.:

$$\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)} = \int \frac{dx}{x^{11}(\frac{2}{x^{10}}+1)} = -\frac{1}{20}\int \frac{d(\frac{2}{x^{10}}+1)}{\frac{2}{x^{10}}+1} = -\frac{1}{20}\ln\left(\frac{2}{x^{10}}+1\right)+C.$$

6.5. Упражнения

6.5.1. $\displaystyle\int \frac{(4x^2+4x-11)dx}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}.$ $\qquad \left[\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3}\right|+C\right]$

6.5.2. $\displaystyle\int \frac{(x^5-x+1)dx}{x^6-x^5}.$ $\qquad \left[\frac{1}{4x^4}+\ln|x-1|+C\right]$

6.5.3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}.$ $\qquad \left[\frac{16-21x-6x^2}{250(x-2)(x+3)^2}-\frac{3}{625}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+C\right]$

6.5.4. $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-5}{x^3-x^2+2x-2}dx.$ $\qquad \left[\frac{3}{2}\ln(x^2+2)-2\ln|x-1|+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C\right]$

6.5.5. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)(x^2-4x+3)}.$

$$\left[\frac{1}{52}\ln|x-3|-\frac{1}{20}\ln|x-1|+\frac{1}{65}\ln(x^2+4x+5)+\frac{7}{130}\operatorname{arctg}(x+2)+C\right]$$

6.5.6. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}.$ $\qquad \left[\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+2}-\frac{1}{2(x-1)}+C\right]$

6.5.7. $\displaystyle\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}dx.$ $\qquad \left[\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C\right]$

6.5.8. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^3-1}.$ $\qquad \left[\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\right]$

6.5.9. $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{1-x^4}.$ $\qquad \left[-x+\ln\frac{|x+1|}{|x-1|}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C\right]$

6.5.10. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$ $\qquad \left[\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x+C\right]$

6.5.11.

$\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^3+1)(x+1)}.$ $\qquad \left[-\frac{1}{6(x+1)}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{(x^2-x+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C\right]$

6.5.12. $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}$. $\quad\left[-\dfrac{x^2+2x+2}{8(x+1)^2(x-1)}+\dfrac{1}{16}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|+C\right]$

6.5.13. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}$. $\quad\left[\dfrac{1}{x^2+2x+2}+\operatorname{arctg}(x+1)+C\right]$

6.5.14. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$. $\quad\left[\dfrac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\dfrac{21}{128}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|-\dfrac{21}{64}\operatorname{arctg}x+C\right]$

6.5.15. $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x^8-1)}$. $\quad\left[\dfrac{1}{8}\ln\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right|-\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}x^2+C\right]$

6.5.16. $\displaystyle\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}dx$. $\quad\left[\dfrac{5}{8}\ln\dfrac{x^4}{x^4+2}-\ln\dfrac{x^4}{x^4+1}+C\right]$

6.5.17. $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{(x^{10}-10)^2}$. $\quad\left[-\dfrac{1}{100}\left(\dfrac{x^5}{x^{10}-10}+\dfrac{1}{2\sqrt{10}}\ln\dfrac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right)+C\right]$

6.5.18. $\displaystyle\int \frac{1-x^7}{x(x^7+1)^2}dx$. $\quad\left[\dfrac{1}{7}\ln\dfrac{|x^7|}{(x^7+1)^2}+C\right]$

6.5.19. $\displaystyle\int \frac{x^5-x}{x^8+1}dx$. $\quad\left[\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1}+C\right]$

6.5.20. $\displaystyle\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx$. $\quad\left[\dfrac{1}{n}(x^n-\ln|x^n+1|)+C\right]$

7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Вычисление многих полезных интегралов от иррациональных функций после некоторых преобразований сводится к вычислению интегралов от рациональных функций или интегралов от простейших иррациональностей (см. таблицу). Эти преобразования осуществляется с помощью соответствующих подстановок, либо методом разложения в сумму.

Но, довольно часто интегралы от иррациональных функций не выражаются через элементарные функции.

Рассмотрим некоторые типы интегралов от иррациональных функций. Функция $R(x_1, x_2, \ldots)$ называется рациональной функцией переменных $x_1, x_2, \ldots,$ если она есть рациональная функция каждой своей переменной.

7.1. Интеграл вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right) dx.$$

При условии, что числа $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{Q},\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - cb \neq 0$ интегралы такого вида приводятся к интегралу от рациональной функции подстановкой

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^p,$$

где p — общий знаменатель дробей $r_1, r_2, \ldots, r_k$.

7.2. Интеграл вида

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx, \text{где } P(n) \text{— полином степени } n.$$

При вычислении интегралов такого вида можно использовать формулу

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $Q(x)$ — полином степени $(n-1)$ с неопределенными коэффициентами, а λ — некоторое число.

Для нахождения коэффициентов полинома $Q(x)$ и числа λ данную формулу дифференцируют, умножают на $2\sqrt{ax^2+bx+c}$ и получают тождество

$$2P_n(x) = 2Q'(x)(ax^2+bx+c) + Q(x)(2ax+b) + 2\lambda.$$

Приравнивая соответствуюшие коэффициенты в левой и правой частях тождества, вычисляют коэффициенты полинома $Q(x)$ и число λ. Интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

вычисляется выделением полного квадрата в подкоренном выражении и последующей линейной подстановкой.

7.3. Интеграл вида

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Такие интегралы сводятся к интегралам вида 7.2. подстановкой

$$t = \frac{1}{(x-\alpha)}.$$

7.4. Интеграл вида

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad p^2 - 4q < 0.$$

Первым шагом при вычислении интегралов такого вида является преобразование его (с помощью линейных или дробно-линейных подстановок) к виду

$$\int \frac{P(t)dt}{(t^2+\lambda)^n\sqrt{\mu t^2+\nu}}, \qquad \lambda > 0, P(t) - \text{полином}.$$

Если $ax^2 + bx = a(x^2 + px)$ (т.е. $b = ap$), то выделяя полные квадраты в обоих трехчленах и производя подстановку $t = x + \dfrac{p}{2}$ получим необходимый вид.

Если $b \neq ap$, то используем подстановку

$$x = \frac{\alpha t + \beta}{t+1},$$

где числа α и β подбираются так, чтобы после подстановки коэффициенты при t в обоих квадратных трехчленах обратились в нуль. То есть, в числителях левых частей равенств

$$x^2 + px + q = \left(\frac{\alpha t + \beta}{t+1}\right)^2 + p\left(\frac{\alpha t + \beta}{t+1}\right) + q$$

$$ax^2 + bx + c = a\left(\frac{\alpha t + \beta}{t+1}\right)^2 + b\left(\frac{\alpha t + \beta}{t+1}\right) + c$$

после приведения к общему знаменателю коэффициенты при t необходимо положить равными нулю.

Вторым шагом является вычисление интеграла

$$\int \frac{P(t)dt}{(t^2+\lambda)^n\sqrt{\mu t^2+\nu}}.$$

Этот интеграл, после разложения функции $\dfrac{P(t)}{(t^2+\lambda)^n}$ в сумму элементарных дробей можно представить в виде линейной комбинации интегралов вида

$$\int \frac{tdt}{(t^2+\lambda)^n\sqrt{\mu t^2+\nu}} \text{ и } \int \frac{dt}{(t^2+\lambda)^n\sqrt{\mu t^2+\nu}}.$$

Интеграл

$$\int \frac{tdt}{(t^2+\lambda)^n\sqrt{\mu t^2+\nu}}$$

вычисляется с помощью подстановки $u = \sqrt{\mu t^2+\nu}$.

Интеграл

$$\int \frac{dt}{(t^2+\lambda)^n\sqrt{\mu t^2+\nu}}$$

вычисляется с помощью подстановки Абеля

$$u = (\sqrt{\mu t^2+\nu})' = \frac{\mu t}{\sqrt{\mu t^2+\nu}}.$$

7.5. Интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx, \quad a \neq 0, \quad b^2-4ac \neq 0.$$

Интеграл такого вида приводится к интегралу от рациональной функции с помощью одной из подстановок Эйлера

1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm x\sqrt{a}, \qquad a > 0,$

2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}, \qquad c > 0,$

3) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-x_1), \qquad b^2-4ac > 0,$

где x_1 - корень трехчлена ax^2+bx+c. Но подстановки Эйлера часто приводят к громоздким выкладкам.

Поэтому интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) \quad dx$ проще с помощью алгебраических преобразований подынтегрального выражения представить в виде линейной комбинации интеграла от рациональной функции и рассмотренных выше интегралов вида

(7.2) $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad dx$, где $P(n)$ — полином степени n,

(7.3) $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$,

(7.4) $\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}, p^2-4q < 0.$

7.6. Интеграл вида

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0, n \neq 0, p \neq 0.$$

Интегралы такого виданазываются интегралами от *дифферециального бинома* и приводятся к интегралу от рациональной функции только в следуюших трех случаях (в каждом случае применяется соответствующая подстановка):

1) p - целое число, подстановка $x = t^N$, где N - общий знаменатель дробей m и n,

2) $\frac{m+1}{n}$ - целое число, подстановка $ax^n+b = t^s$, где s - знаменатель дроби p,

3) $\frac{m+1}{n} + p$ - целое число, подстановка $a+bx^{-n} = t^s$, где s - знаменатель дроби p.

7.7. Примеры

7.7.1. Найти
$$\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(4-x)}}.$$
Преобразуем подынтегральную функцию к виду
$$\frac{x}{\sqrt[4]{x^3(4-x)}} = \frac{\sqrt[4]{x^4}}{\sqrt[4]{x^3(4-x)}} = \sqrt[4]{\frac{x}{(4-x)}}.$$
Согласно 6.1 произведем подстановку
$$t^4 = \frac{x}{(4-x)} \Rightarrow x = \frac{4t^4}{1+t^4} = 4(1-\frac{1}{t^4}) \text{ и } dx = \frac{16dt}{t^5}.$$
Откуда находим
$$\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(4-x)}} = \int \sqrt[4]{\frac{x}{(4-x)}}dx = \int \frac{16\sqrt[4]{t^4}dt}{t^5} = 16\int \frac{dt}{t^4} = -\frac{16}{3}t^{-3} + C = -\frac{16}{3}\sqrt[4]{\left(\frac{4-x}{x}\right)^3} + C.$$

7.7.2. Найти
$$\int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x} + \sqrt[12]{x^5})^3}.$$
Так как подынтегральная функция является рациональной функцией аргументов $\sqrt[6]{x}$ и $\sqrt[12]{x}$ и обший знаменатель дробей $\dfrac{1}{6}$ и $\dfrac{1}{12}$ равен 12, то можно применить(см. 7.1) подстановку
$$t^{12} = x \Rightarrow \sqrt[12]{x} = t, \sqrt[6]{x} = t^2 \text{ и } dx = 12t^{11}dt.$$
Тогда
$$\int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x} + \sqrt[12]{x^5})^3} = \int \frac{12t^{11}dt}{(t^2+t^5)^3} = 12\int \frac{t^5dt}{(1+t^3)^3}.$$
Произведем еще одну подстановку $u = 1+t^3$, $du = 3t^2dt$ Получаем
$$12\int \frac{t^5dt}{(1+t^3)^3} = 4\int \frac{(t^3+1-1)(3t^2dt)}{(1+t^3)^3} = 4\int \frac{(u-1)du}{u^3} =$$
$$= 4\int \frac{du}{u^2} - 4\int \frac{du}{u^3} = -\frac{4}{u} + \frac{2}{u^2} + C = -\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}} + \frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} + C.$$

7.7.3. Найти
$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$
По формуле пункта 6.2 интеграл можно представить в виде:
$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+4x+5} + \int \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$
Найдем неопределенные коэффициенты A, B, C и λ. Для этого продифференцируем данное выражение и приведем к общему знаменателю:
$$\frac{x^4}{\sqrt{x^2+4x+5}} = (2Ax+B)\sqrt{x^2+4x+5} + \frac{(Ax^2+Bx+C)(2x+4)}{2\sqrt{x^2+4x+5}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4x+5}} =$$

$$= \frac{(2Ax+B)(x^2+4x+5)+(Ax^2+Bx+C)(x+2)+\lambda}{\sqrt{x^2+4x+5}} =$$
$$= \frac{3Ax^3+(2B+10A)x^2+(C+6B+10A)x+2C+5B+\lambda}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

Приравним коэффициенты при одинаковых степенях x. Получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2C+5B+\lambda=0 \text{ (при } x^0) \\ C+6B+10A=0 \text{ (при } x^1) \\ 2B+10A=0 \text{ (при } x^2) \\ 3A=1 \text{ (при } x^3) \end{cases},$$

решение которой: $A=\frac{1}{3}, B=\frac{-5}{3}, C=\frac{20}{3}, \lambda=-5$. В итоге получаем

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \frac{1}{3}(x^2-5x+20)\sqrt{x^2+4x+5} - 5\int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2x+1}} =$$
$$= \frac{1}{3}(x^2-5x+20)\sqrt{x^2+4x+5} - 5\ln|x+2+\sqrt{(x+2)^2+1}| =$$
$$= \frac{1}{3}(x^2-5x+20)\sqrt{x^2+4x+5} - 5\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}| + C.$$

7.7.4. Найти
$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

Применим подстановку $t=\frac{1}{x-1}$. Тогда $x=\frac{1+t}{t}$ и $dt=-\frac{dx}{(x-1)^2}$. Получаем

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}} = -\int \frac{(t+1)dt}{t\sqrt{1+2\frac{t+1}{t}-\left(\frac{t+1}{t}\right)^2}} =$$
$$= -\int \frac{(t+1)dt}{\sqrt{t^2+2(t+1)t-(t+1)^2}} = -\int \frac{(t+1)dx}{\sqrt{2t^2-1}}.$$

Представим полученный интеграл в виде суммы табличных интегралов

$$-\int \frac{(t+1)dx}{\sqrt{2t^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{2}}} + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{2}}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{t^2-\frac{1}{2}} + \ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{2}}\right|\right) =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\left(\frac{1}{x-1}\right)^2-\frac{1}{2}} + \ln\left|\frac{1}{x-1}+\sqrt{\left(\frac{1}{x-1}\right)^2-\frac{1}{2}}\right|\right) + C =$$
$$= -\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(x-1)} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+2x-x^2}}{x-1}\right| + C.$$

7.7.5. Найти
$$\int \frac{(x+1)dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

Применим линейную подстановку $t = x - 1$. Тогда $dt = dx$ и $x = 1 + t$. Предварительно выделив полные квадраты в знаменателе, получаем:

$$\int \frac{(x+1)dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{(x+1)dx}{(3+(x-1)^2)\sqrt{2-(x-1)^2}} =$$

$$= \int \frac{(t+2)dt}{(3+t^2)\sqrt{2-t^2}} = \int \frac{tdt}{(3+t^2)\sqrt{2-t^2}} + \int \frac{2dt}{(3+t^2)\sqrt{2-t^2}}.$$

Вычислим каждый интеграл из суммы отдельно. В первом сделаем подстановку

$$u = \sqrt{2-t^2} \Rightarrow du = -\frac{t}{\sqrt{2-t^2}} \text{ и } t^2 = 2 - u^2.$$

Получаем табличный интеграл

$$\int \frac{tdt}{(3+t^2)\sqrt{2-t^2}} = -\int \frac{du}{5-u^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{\sqrt{5}+u}{\sqrt{5}-u}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2-t^2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2-t^2}}\right| + C.$$

Во втором интеграле сделаем подстановку

$$u = -\frac{t}{\sqrt{2-t^2}} \Rightarrow du = \frac{-2dt}{(2-t^{2)}\sqrt{2-t^2}} \text{ и } t^2 = \frac{2u^2}{1+u^2}.$$

Получаем

$$\int \frac{2dt}{(3+t^2)\sqrt{2-t^2}} = -\int \frac{-2(2-t^2)dt}{(3+t^2)(2-t^2)\sqrt{2-t^2}} = -\int \frac{(2-\dfrac{2u^2}{1+u^2})du}{3+\dfrac{2u^2}{1+u^2}}$$

$$= -\int \frac{2du}{3+5u^2} = \frac{-2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{u\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{5}}{\sqrt{3(2-t^2)}} + C.$$

В итоге

$$\int \frac{(x+1)dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{tdt}{(3+t^2)\sqrt{2-t^2}} + \int \frac{2dt}{(3+t^2)\sqrt{2-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2-t^2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2-t^2}}\right| + \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{5}}{\sqrt{3(2-t^2)}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{\sqrt{5}+\sqrt{1+2x-x^2}}{\sqrt{5}-\sqrt{1+2x-x^2}}\right| + \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{(x-1)\sqrt{5}}{\sqrt{3(1+2x-x^2)}} + C.$$

7.7.6. Найти

$$\int \frac{dx}{(3x^2+2x+3)\sqrt{2x^2-x+2}}.$$

Положим

$$x = \frac{\alpha t + \beta}{t+1}.$$

Для того, чтобы найти α и β, подставим

$$3x^2+x+3=3\left(\frac{\alpha t+\beta}{t+1}\right)^2+2\frac{\alpha t+\beta}{t+1}+3=$$

$$=\frac{3(\alpha t+\beta)^2+2(\alpha t+\beta)(t+1)+3(1+t)^2}{(1+t)^2}=$$

$$=\frac{(3\alpha^2+2\alpha+3)t^2+(6\alpha\beta+2\alpha+2\beta+6)t+3\beta^2+2\beta+3}{(1+t)^2},$$

$$2x^2-x+2=2\left(\frac{\alpha t+\beta}{t+1}\right)^2-\frac{\alpha t+\beta}{t+1}+2=$$

$$=\frac{2(t+1)^2-(\alpha t+\beta)(t+1)+2(\alpha t+\beta)^2}{(1+t)^2}=$$

$$=\frac{(2\alpha^2-\alpha+2)t^2+(4\alpha\beta-\alpha-\beta+4)t+2\beta^2-\beta+2}{(1+t)^2}$$

и приравняем коэффициенты при t к нулю. Получим систему

$$\begin{cases} 3\alpha\beta+\alpha+\beta+3=0 \\ 4\alpha\beta-\alpha-\beta+4=0 \end{cases},$$

Решением этой системы являются пары $(1,-1)$ и $(-1,1)$. Положим, например, $\alpha=1$ и $\beta=-1$. Тогда

$$x=\frac{t-1}{t+1}\Rightarrow dx=\frac{2dt}{(t+1)^2},$$

$$3x^2+x+3=\frac{8t^2+4}{(1+t)^2},\ 2x^2-x+2=\frac{3t^2+5}{(1+t)^2}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{(3x^2+2x+3)\sqrt{2x^2-x+2}}=2\int\frac{|1+t|dt}{(8t^2+4)\sqrt{3t^2+5}}=\int\frac{|1+t|dt}{(4t^2+2)\sqrt{3t^2+5}}.$$

Если $1+t>0$, то

$$\int\frac{|1+t|dt}{(4t^2+2)\sqrt{3t^2+5}}=\int\frac{tdt}{(4t^2+2)\sqrt{3t^2+5}}+\int\frac{dt}{(4t^2+2)\sqrt{3t^2+5}}.$$

Вычислим каждый интеграл из суммы отдельно. Для первого применим подстановку

$$u=\sqrt{3t^2+5}\Rightarrow du=\frac{3tdt}{\sqrt{3t^2+5}},\ t^2=\frac{u^2-5}{3}.$$

Тогда

$$\int\frac{tdt}{(4t^2+2)\sqrt{3t^2+5}}=\int\frac{du}{3(\frac{4(u^2-5)}{3}+2)}=\int\frac{du}{(4u^2-14)}=\frac{1}{4}\int\frac{du}{(u^2-\frac{7}{2})}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}u}{\sqrt{7}+\sqrt{2}u}\right|=\frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2(3t^2+5)}}{\sqrt{7}+\sqrt{2(3t^2+5)}}\right|.$$

Во втором интеграле сделаем подстановку:

$$u = \frac{3t}{\sqrt{3t^2+5}} \Rightarrow du = \frac{15dt}{(3t^2+5)\sqrt{3t^2+5}},\ t^2 = \frac{5u^2}{3(3-u^2)}.$$

Тогда

$$\int \frac{dt}{(4t^2+2)\sqrt{3t^2+5}} = \frac{1}{15}\int \frac{15(3t^2+5)dt}{(4t^2+2)(3t^2+5)\sqrt{3t^2+5}} = \frac{1}{15}\int \frac{(\frac{5u^2}{3-u^2}+5)du}{\frac{20u^2}{3(3-u^2)}+2} =$$

$$= \int \frac{3du}{(14u^2+18)} = \frac{3}{14}\int \frac{du}{u^2+\frac{9}{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}u}{3} = \frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}t}{\sqrt{3t^2+5}}.$$

В итоге получаем

$$\int \frac{dx}{(3x^2+2x+3)\sqrt{2x^2-x+2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2(3t^2+5)}}{\sqrt{7}+\sqrt{2(3t^2+5)}}\right| + \frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}t}{\sqrt{3t^2+5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}(1-x)-2\sqrt{2(2x^2-x+2)}}{\sqrt{7}(1-x)+2\sqrt{2(2x^2-x+2)}}\right| + \frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}(1-x)}{2\sqrt{2x^2-x+2}} + C.$$

7.7.7. Найти

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$$

В обозначениях пункта 7.6 параметры $m=-3,\ n=3,\ p=-\frac{1}{3},\ a=-1,\ b=2$. Так как, $\frac{m+1}{n}+p = \frac{-3+1}{3}-\frac{1}{3}$ - целое число, то согласно 7.6 сделаем подстановку

$$-1+2x^{-3} = t^3 \Rightarrow x^{-3} = \frac{t^3+1}{2},\ x = \sqrt[3]{\frac{2}{t^3+1}},\ dx = -\frac{\sqrt[3]{2}t^2dt}{(t^3+1)\sqrt[3]{t^3+1}},\ \sqrt[3]{2-x^3} = \frac{\sqrt[3]{2}t}{\sqrt[3]{t^3+1}}.$$

Тогда интеграл вычисляется так

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}} = -\int \frac{t^3+1}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{2}t}{\sqrt[3]{t^3+1}}\right)^{-1}\frac{\sqrt[3]{2}t^2dt}{(t^3+1)\sqrt[3]{t^3+1}} =$$

$$= \frac{-1}{2}\int tdt = -\frac{t^2}{4} = -\frac{\sqrt[3]{(-1+2x^{-3})^2}}{4} + C.$$

7.7.8. Найти

$$\int \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{1+x+\sqrt{x^2+x+1}}dx.$$

Решим этот пример с помощью подстановки Эйлера $x+\sqrt{x^2+x+1}=z$. Тогда

$$x^2+x+1 = x^2-2zx+z^2 \Rightarrow x = \frac{z^2-1}{1+2z} \Rightarrow dx = \frac{2(z^2+z+1)}{(1+2z)^2}dz.$$

Получаем
$$\int \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{1+x+\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int \frac{1+x+\sqrt{x^2+x+1}-1}{1+x+\sqrt{x^2+x+1}}dx =$$
$$= \int \left(1 - \frac{1}{1+x+\sqrt{x^2+x+1}}\right) dx = x - \int \frac{1}{1+z}\ \frac{2(z^2+z+1)}{(1+2z)^2}\ dz.$$
Последний интеграл есть интеграл от рациональной функции, который высчитаем методом неопределенных коэффициентов:
$$\int \frac{z^2+z+1}{(1+z)(1+2z)^2}dz = \int \left(\frac{A}{1+z} + \frac{B}{1+2z} + \frac{C}{(1+2z)^2}\right) dz =$$
$$= \int \left(\frac{1}{1+z} - \frac{3}{2(1+2z)} + \frac{3}{2(1+2z)^2}\right) dz = \ln|z+1| - \frac{3}{2}\ln|1+2z| - \frac{3}{2(1+2z)} + C.$$
В итоге
$$\int \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{1+x+\sqrt{x^2+x+1}}dx =$$
$$= x - \ln|x+\sqrt{x^2+x+1}+1| - \frac{3}{2}\ln|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}| - \frac{3}{2(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1})} + C.$$

7.9. Упражнения

7.9.1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}.$ $\qquad \left[x - 2\sqrt{x} + 2\ln(\sqrt{x}+1) + C\right]$

7.9.2. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$ $\qquad \left[\frac{3}{4}\ln\frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{})(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x})^3} - \frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}} + C\right]$

7.9.3. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}.$ $\qquad \left[\ln|1+3\sqrt[3]{x}| + C\right]$

7.9.4. $\displaystyle\int x\sqrt{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}dx.$ $\qquad \left[\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+1}| + C\right]$

7.9.5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$ $\qquad \left[-\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C\right]$

7.9.6. $\displaystyle\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\ \frac{dx}{x^3}.$ $\qquad \left[\frac{5}{4}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{4}{5}} - \frac{5}{9}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{9}{5}} + C\right]$

7.9.7.

$\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}.$ $\qquad \left[-\frac{at^3}{1+t^4} + \frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{1+t\sqrt{2}+t^2}{1-t\sqrt{2}+t^2} + \frac{a}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{1-t^2}{t\sqrt{2}} + C, t = \sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}\right]$

7.9.8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}}.$ $\left[-3\sqrt[6]{\frac{x-5}{x-7}}+C\right]$

7.9.9. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$ $\left[-\frac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C\right]$

7.9.10. $\displaystyle\int \frac{x^{10}dx}{\sqrt{1+x^2}}.$ $\left[\left(\frac{63x}{256}-\frac{21x^3}{128}+\frac{21x^5}{160}-\frac{9x^7}{80}+\frac{x^9}{10}\right)\sqrt{1+x^2}-\frac{63}{256}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C\right]$

7.9.11.

$\displaystyle\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx.$ $\left[\left(\frac{x^2}{3}-\frac{14x}{3}+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+3})+C\right]$

7.9.12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$ $\left[-\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{|x|}+C\right]$

7.9.13. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}.$ $\left[-\frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{4(x-1)^2}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x-1}+C\right]$

7.9.14. $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}.$ $\left[\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{|1-x|}+C\right]$

7.9.15. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx.$

$$\left[\sqrt{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\ln(1-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1})-\ln\frac{|2-x+2\sqrt{x^2-x+1}|}{|x|}+C\right]$$

7.9.16. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}\,dx.$ $\left[-\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1}-2\arcsin\frac{\sqrt{1}}{|x-2|}+C\right]$

7.9.17. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$ $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}+C\right]$

7.9.18. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x^2-1}}.$ $\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-1}}+C\right]$

7.9.19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}.$ $\left[\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}+C\right]$

7.9.20. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x+x^2}}.$

$$\left[\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2+2x+x^2}}{(1-x)\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x+x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x+x^2}}+C\right]$$

7.9.21.

$$\int\frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.\quad\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{(1-x)\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{(x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(1+x+x^2)}}{\sqrt{1-x+x^2}}+C\right]$$

7.9.22.

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}.\quad\left[-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}+\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x+1)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x+1)}+C\right]$$

7.9.23. $\int x^{\frac{-1}{3}}(1-x^{\frac{1}{6}})^{-1}dx.\qquad\left[6x^{\frac{1}{6}}+3x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+6\ln|x^{\frac{1}{6}}-1|+C\right]$

7.9.24. $\int x^2\sqrt[3]{(1+x)^2}dx.\qquad\left[\frac{3}{11}(x+1)^{\frac{11}{3}}-\frac{3}{4}(x+1)^{\frac{8}{3}}+\frac{3}{5}(x+1)^{\frac{5}{3}}+C\right]$

7.9.25. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}.\qquad\left[\frac{3}{5}(x^{\frac{2}{3}}+1)^{\frac{5}{2}}+(1-2x^{\frac{2}{3}})(x^{\frac{2}{3}}+1)^{\frac{1}{2}}+C\right]$

7.9.26. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(2+x^3)^5}}.\qquad\left[\frac{3x^2+4}{8x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}+C\right]$

7.9.27. $\int\sqrt[3]{3x-x^3}dx.\qquad\left[\frac{3z}{2(z^3+1)}-\frac{1}{4}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}+C,\ z=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}\right]$

7.9.28. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.\qquad\left[\frac{3}{2(2z+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3}+C, z=x+\sqrt{x^2+x+1}\right]$

7.9.29. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}.\quad\left[\ln\left|1-\frac{x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\right|-2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}+C\right]$

7.9.30. $\int\frac{dx}{(1+\sqrt{x(1+x)})^2}.$

$$\left[\frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)}+\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2z}{\sqrt{5}-1-2z}\right|+C,\ z=-x+\sqrt{x(1+x)}\right].$$

7.9.31. $\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x-\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx,$

$$\left[-\frac{5}{18(z+1)}-\frac{1}{6(z+1)^2}+\frac{3}{4}\ln|z-1|-\frac{16}{27}\ln|z-2|-\frac{17}{108}\ln|z+1|+C, z=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}\right].$$

8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

При интегрировании тригонометрических функций используются общие приемы интегрирования: разложение в сумму, методы нового аргумента, подстановки, интегрирования по частям. Рассмотрим некоторые типы интегралов от тригонометрических функций.

8.1. Интеграл вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$, где $n, m \in \mathbb{N}$, вычисляется с помощью формул понижения степени, если n и m четные. Если n или m нечетное, то интеграл вычисляют введением нового аргумента $\sin x$ или $\cos x$.

8.2. Интеграл вида $\int \Pi\left[\sin \alpha_i x \cos \beta_j x\right] dx$, где функция $\Pi\left[\sin \alpha_i x \cos \beta_j x\right]$ есть произведение функций вида $\sin \alpha x$ и $\cos \beta x$, высчитывается разложением в сумму подынтегральной функции с помощью формул

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta)).$$

8.3. Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{\sin(x-\alpha_i)\cos(x-\beta_j)}, \int \frac{dx}{\sin(x-\alpha_i)\sin(x-\beta_j)}, \int \frac{dx}{\cos(x-\alpha_i)\cos(x-\beta_j)}$$

и приводящие к ним высчитываются разложением в сумму подынтегральной функции с помощью формул

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\left[(x-\beta)-(x-\alpha)\right] = \sin(x-\beta)\cos(x-\alpha) - \cos(x-\beta)\sin(x-\alpha),$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\left[(x-\alpha)-(x-\beta)\right] = \cos(x-\alpha)\cos(x-\beta) + \sin(x-\alpha)\sin\cos(x-\beta).$$

8.4. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где $R(u, v)$ рациональная функция аргументов u и v, с помощью универсальной подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ всегда можно привести к интегралу от рациональной функции

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}.$$

Но, так как эта подстановка приводит к громоздким вычислениям, то при возможности проще использовать следуюшие подстановки:

если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подстановку $t = \cos x$;

если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подстановку $t = \sin x$;

если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то подстановку $t = \operatorname{tg} x$.

8.5. Примеры

8.5.1. Найти
$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$$
Используем формулы понижения степени:
$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)dx =$$
$$= \frac{1}{8}\left[\int \left(1+\cos 2x - \frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx - \frac{1}{2}\int \cos^2 2x d\sin 2x\right] =$$
$$= \frac{1}{8}\left[\int \left(\frac{1}{2}+\cos 2x - \frac{\cos 4x}{2}\right)dx - \frac{1}{2}\int (1-\sin^2 2x) d\sin 2x\right] =$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} - \frac{1}{2}(\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3})\right] + C = \frac{1}{192}\left[12x - 3\sin 4x + 4\sin^3 2x\right] + C.$$

8.5.2. Найти
$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\ dx$$
Используем метод введения новой переменной
$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\ dx = \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x} = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} d\cos x = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^4 x} d\cos x =$$
$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^4 x}\right) d\cos x = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

8.5.3. Найти
$$\int \sin 5x \cos x dx.$$
Используя тригонометрические формулы представим в виде суммы
$$\int \sin 5x \cos x dx = \int \frac{\sin 4x + \sin 6x}{2} dx = -\frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 6x}{12} + C.$$

8.5.4 Найти
$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}.$$
Представим в виде суммы
$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)} = \frac{1}{\cos(a-b)}\int \frac{\cos\left[(x+a)-(x+b)\right]}{\sin(x+a)\cos(x+b)} dx =$$
$$= \frac{1}{\cos(a-b)}\int \frac{\cos(x+a)\cos(x+b) + \sin(x+a)\sin(x+b)}{\sin(x+a)\cos(x+b)} dx =$$
$$= \frac{1}{\cos(a-b)}\int \left[\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} + \frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{\cos(a-b)}\left[\int \frac{d\sin(x+a)}{\sin(x+a)} - \int \frac{d\cos(x+b)}{\cos(x+b)}\right] = \frac{1}{\cos(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right| + C.$$

8.5.5. Найти

$$\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x)}.$$

Так как $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то сделаем подстановку $t = \cos x$. Тогда интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции, который решаем методом неопределенных коэффициентов:

$$\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x)} = -\int \frac{d\cos x}{\sin^2 x(2+\cos x)} = -\int \frac{dt}{(1-t^2)(2+t)} =$$

$$= \int \left(\frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{2+t}\right) dt = \int \left(\frac{-1}{6(1-t)} + \frac{-1}{2(1+t)} + \frac{1}{3(2+t)}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{(2+t)^2}{(1-t)(1+t)^3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{(2+\cos x)^2}{(1-\cos x)(1+\cos x)^3}\right| + C.$$

8.5.6. Найти

$$\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}.$$

Так как $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то сделаем подстановку $t = \operatorname{tg} x$. Далее используем метод неопределенных коэффициентов :

$$\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x(\operatorname{tg}^3 x + 1)} = \int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x(\operatorname{tg}^3 x + 1)} = \int \frac{t dt}{(t^3+1)} =$$

$$= \int \left[\frac{A}{t+1} + \frac{Mt+N}{t^2-t+1}\right] dt = \int \left[\frac{-1}{3(t+1)} + \frac{t+1}{3(t^2-t+1)}\right] dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \int \frac{(2t-1)dt}{6(t^2-t+1)} + \int \frac{dt}{2((t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})} = \frac{1}{6}\ln\frac{t^2-t+1}{(t+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C,$$

где $t = \operatorname{tg} x$.

8.5.7. Найти

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}.$$

Сделаем подстановку

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} dx = \int \frac{dt}{4t-(1-t^2)+5(1+t^2)} = \int \frac{dt}{4+4t+6t^2} =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{dt}{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}t+t^2} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{\frac{5}{9}+(t+\frac{1}{3})^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C.$$

8.6. Упражнения

8.6.1. $\displaystyle\int \cos^5 x dx.$ $\displaystyle\left[\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C\right]$

8.6.2. $\displaystyle\int \cos^6 x dx.$ $\displaystyle\left[\frac{5x}{16} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C\right]$

8.6.3. $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx.$ $\displaystyle\left[-\frac{3}{2}\cos x - \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C\right]$

8.6.4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$ $\displaystyle\left[-\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C\right]$

8.6.5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x\sin^4 x}.$ $\displaystyle\left[-8\operatorname{ctg} 2x - \frac{8}{3}\operatorname{ctg}^2 2x + C\right]$

8.6.6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^5 x\sin^3 x}.$ $\displaystyle\left[\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{3\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + 3\ln|\operatorname{tg} x| + C\right]$

8.6.7. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^5 x dx.$ $\displaystyle\left[\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C\right]$

8.6.8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^5 x\sin^3 x}}.$ $\displaystyle\left[-2\sqrt{\operatorname{ctg} x} + \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x} + C\right]$

8.6.9. $\displaystyle\int \cos x\cos 2x\cos 3x dx.$ $\displaystyle\left[\frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 6x}{24} + C\right]$

8.6.10. $\displaystyle\int \sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx.$ $\displaystyle\left[\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6} - \frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6} - \frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6} + \frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6} + C\right],$

8.6.11. $\displaystyle\int \sin^3 2x\cos^2 3x dx.$ $\displaystyle\left[-\frac{3}{16}\cos 2x + \frac{3}{64}\cos 4x + \frac{1}{48}\cos 6x - \frac{3}{128}\cos 8x + \frac{1}{192}\cos 12x + C\right]$

8.6.12. $\displaystyle\int \frac{dx}{sin(x+a)\sin(x+b)}.$ $\displaystyle\left[\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right| + C\right]$

8.6.13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}.$ $\displaystyle\left[\frac{2}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right| + C\right]$

8.6.14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x + \cos a}.$ $\displaystyle\left[\frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right| + C\right]$

8.6.15. $\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a).$ $\left[-x + \operatorname{ctg} a \ln \left| \frac{\cos x}{\cos(x+a)} \right| + C\right]$

8.6.16. $\int \frac{\sin x \; dx}{(3\cos x - 1)^3}.$ $\left[\frac{1}{6(\cos - 1)^2} + C\right]$

8.6.17. $\int \frac{2\sin^3 x + \cos^2 x \sin 2x}{\sin^4 x + 3\cos^2 x} dx.$ $\left[\frac{1}{2} \ln \frac{\cos^2 x - \cos x + 1}{(\cos^2 x + \cos x + 1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2\cos^2 x + 1} + C\right]$

8.6.18. $\int \frac{\cos x \; dx}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}.$ $\left[\frac{1}{4} \ln \frac{5 - \sin x}{1 - \sin x} + C\right]$

8.6.19. $\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^4 x + \sin^2 x} dx.$ $\left[\sin x - \frac{2}{\sin x} - 6 \operatorname{arctg} \sin x + C\right]$

8.6.20. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos} dx.$ $[-\ln|\cos x + \sin x| + C]$

8.6.21. $\int \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}} dx.$ $\left[x \cos a - 2 \sin a \ln \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| + C\right]$

8.6.22. $\int \frac{dx}{4\cos^2 x - 4\cos x \sin x + \sin^2 x}.$ $\left[\frac{1}{2 - \operatorname{tg} x} + C\right]$

8.6.23. $\int \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}.$ $\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} + C\right]$

8.6.24. $\int \frac{dx}{\cos x + \sin x}.$ $\left[\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \right| + C\right]$

8.6.25. $\int \frac{dx}{5 + \cos^2 x + \sin x}.$ $\left[\frac{1}{\sqrt{30}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{6}} \operatorname{tg} x\right) + C\right]$

8.6.26. $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx.$ $\left[\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x + \ln|\operatorname{tg} x|) + C\right]$

8.6.27. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$ $\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \right| + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + C\right]$

8.6.28. $\int \frac{2\sin^3 x + \cos^2 x \sin 2x}{\sin^4 x + 3\cos^2 x} dx.$ $\left[\frac{1}{2} \ln \frac{\cos^2 x - \cos x + 1}{(\cos^2 x + \cos x + 1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2\cos^2 x + 1} + C\right]$

8.6.29. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}$. $\quad \left[-\frac{t}{4(t^2+2)} + \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C, t = \operatorname{tg} x\right]$

9. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Интегралы от трансцендентных функций часто не выражаются через элементарные функции. Например, интегралы

$$\int \frac{\sin x\ dx}{x},\ \int \frac{dx}{\ln x}, \int e^{-x^2/2} dx$$

не выражаются через элементарные функции. Однако, иногда применение общих методов (интегрирование по частям, замена переменной) приводит к вычислению интеграла. Рассмотрим некоторые типы интегралов от трансцендентных функций.

9.1. Интегралы вида $\displaystyle\int \sin^p x \cos^q x dx, \int \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch}^q x dx$ с помощью подстановок $t = \cos x$ или $t = \sin x$ ($t = \operatorname{ch} x$ или $t = \operatorname{sh} x$, соответственно) сводятся к интегрированию дифференциального бинома (см. 7.6.).

9.2. Интегралы вида $\displaystyle\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx$, где $R(\cdot,\cdot)$ — рациональная функция двух переменных, с помощью подстановок $t = \operatorname{ch} x, t = \operatorname{sh} x$ или $t = \operatorname{th} \dfrac{x}{2}$ сводятся к интегрированию рациональной функции.

9.3. Интегралы вида

$$\int P_n(x) e^{ax} dx,\ \int P_n(x) \sin ax dx,\ \int P_n(x) \cos ax dx,\ ds \int P_n(x) \operatorname{arctg} x dx,$$

$$\int P_n(x) \arcsin x dx,\ \int P_n(x) \arccos x dx,$$

где $P_n(x)$ — полином степени n высчитываются многократным интегрированием по частям (см. 4.1.).

9.4. Примеры

9.4.1. Найти

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}.$$

Сделаем замену переменных $t = \sin x$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}} = \int \frac{\sqrt[3]{\cos x} \cos x dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin x}} = \int \frac{d \sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x} \sqrt[3]{\sin x}} = \int \frac{dt}{\sqrt[3]{(1-t^2)} \sqrt[3]{t}}.$$

Последний интеграл есть интеграл от дифференциального бинома с параметрами

$$m = -\frac{1}{3},\ n = 2,\ p = -\frac{1}{3},\ a = 1,\ b = -1.$$

Так как $\dfrac{m+1}{n}+p=\dfrac{-1/3+1}{2}-\dfrac{1}{3}=0$ - целое число, применим подстановку

$$t^{-2}-1=z^3 \Rightarrow 1-t^2=t^2z^3,\ t^2=\frac{1}{1+z^3},\ dt=-\frac{3z^2t^3dz}{2}.$$

Получаем интеграл от рациональной функции,

$$\int\frac{dt}{\sqrt[3]{(1-t^2)}\sqrt[3]{t}}=\int\frac{dt}{\sqrt[3]{t^2z^3}\sqrt[3]{t}}=\int t^{-\frac{2}{3}}z^{-1}t^{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{3}{2}z^2t^3dz\right)=-\frac{3}{2}\int zt^2dz=-\frac{3}{2}\int\frac{z}{1+z^3}dz.$$

Решим полученный интеграл методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{z}{1+z^3}=\frac{A}{1+z}+\frac{Mz+N}{1-z+z^2}=-\frac{1}{3(1+z)}+\frac{z+1}{3(1-z+z^2)}.$$

Получаем

$$-\frac{3}{2}\int\frac{z}{1+z^3}dz=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{1+z}-\frac{1}{2}\int\frac{(z+1)dz}{(1-z+z^2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|z+1|-\frac{1}{4}\int\frac{(2z-1)dz}{1-z+z^2}-\frac{3}{4}\int\frac{dz}{(z-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(z+1)^2}{1-z+z^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}+C,$$

где $z=\sqrt[3]{\dfrac{1-t^2}{t^2}}=\sqrt[3]{ctg^2x}.$

9.4.2. Найти

$$\int\operatorname{ch}^3xdx.$$

$$\int\operatorname{ch}^3xdx=\int(1-\operatorname{sh}^2)xd\operatorname{sh}x=\operatorname{sh}x-\frac{\operatorname{sh}^3x}{x}+C.$$

9.4.3. Выразить через интеграл $\displaystyle\int\frac{\sin xdx}{x}$ интеграл

$$\int\frac{x\sin x-\cos x}{x^2}dx.$$

Используем формулу интегрирования по частям

$$\int\frac{x\sin x-\cos x}{x^2}dx=\int\frac{\sin xdx}{x}-\int\frac{\cos xdx}{x^2}=\int\frac{\sin xdx}{x}+\int\cos xd\left(\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\int\frac{\sin xdx}{x}+\frac{\cos x}{x}-\int\frac{1}{x}d\cos x=\int\frac{\sin xdx}{x}+\frac{\cos x}{x}+\int\frac{\sin x}{x}dx=2\int\frac{\sin xdx}{x}+\frac{\cos x}{x}.$$

9.5. Упражнения

9.5.1. $\displaystyle\int \sin^5 \sqrt[3]{\cos x}\,dx.$ $\qquad \left[-\dfrac{3}{80}\cos^{4/3} x(20 - 16\cos^3 x + 5\cos^5 x) + C\right]$

9.5.2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$ $\qquad \left[\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{(1-\sin x)(1+\sqrt[3]{\sin x})^3}{(1+\sin x)(1-\sqrt[3]{\sin x})^3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{(\sqrt[3]{\sin x} - 1}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\sin x}} + C\right]$

9.5.3. $\displaystyle\int \frac{dx}{4 + 3\operatorname{ch}^2 x}.$ $\qquad \left[\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{(\operatorname{th} x - 2}{\operatorname{th} x + 2} + C\right]$

9.5.4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch}^2 x}.$ $\qquad \left[\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} e^x\sqrt{3} + C\right]$

9.5.5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}\,dx}{\operatorname{ch}^4 x}.$ $\qquad \left[\dfrac{2}{55}\operatorname{th}^{5/3} x(11 - 5\operatorname{th}^{2x}) + C\right]$

9.5.6. $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{3x}}{1 - e^{2x} + e^{4x}}dx.$ $\qquad [\operatorname{arctg}(2\operatorname{sh} x) + C]$

9.5.7. $\displaystyle\int (x^3 + x)e^{-x^2}dx.$ $\qquad \left[-\left(1 + \dfrac{x^2}{2}\right)e^{-x^2} + C\right]$

9.5.8.

$\displaystyle\int \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1}\,dx.$ $\qquad \left[\sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1} + 2\ln(2 + e^x + \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1}) - \arcsin\dfrac{2 - e^x}{\sqrt{5}} + C\right]$

9.5.9. $\displaystyle\int e^{ax}\sin^3 bx\,dx.$ $\qquad \left[\dfrac{1}{4}e^{ax}\left(\dfrac{3(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2 + b^2} + \dfrac{a\sin 3bx - 3b\cos 3bx}{a^2 + 9b^2}\right) + C\right]$

9.5.10. $\displaystyle\int x^2 e^x \sin^3 x\,dx.$ $\qquad \left[\dfrac{1}{2}e^x((x^2 - 1)\sin x - (x-1)^2\cos x) + C\right]$

9.5.11. $\displaystyle\int e^x\frac{\sin x - \cos x}{\sin^2 x}dx.$ $\qquad \left[\dfrac{e^x}{\sin x} + C\right]$

9.5.12. $\displaystyle\int \frac{1}{\ln^3 x}dx.$ $\qquad \left[\dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int\dfrac{dx}{\ln x} - \dfrac{x(1 + \ln x)}{\ln^2 x}\right) + C\right]$

9.5.13. $\displaystyle\int \frac{\sin 3x}{x^3}dx.$ $\qquad \left[-\dfrac{9}{2}\displaystyle\int\dfrac{\sin x\,dx}{x} - \dfrac{\sin 3x + 3x\cos 3x}{2x^2} + C\right]$

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б.П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.*// М: Наука, 1977. – 528 с.

2. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. *Сборник задач по математическому анализу, том 1.*// М: Наука, 1986. – 496 с.

3. Шерстнев А.Н. *Конспект лекций по математическому анализу.*// Казань: Изд. КГУ., 2005. – 373 с.