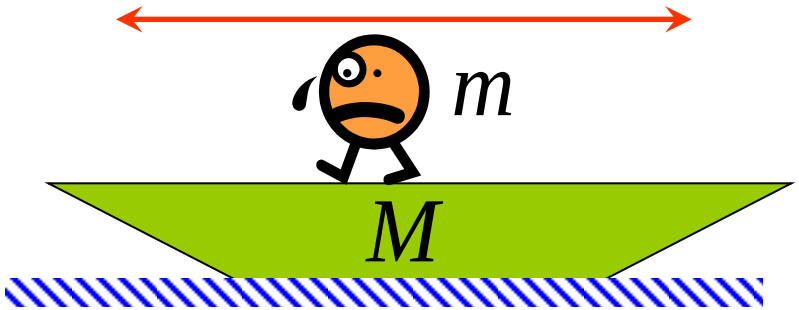
ОПТИМАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВИБРОРОБОТА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Егоров А.Г. , Захарова О.С.

Казанский университет

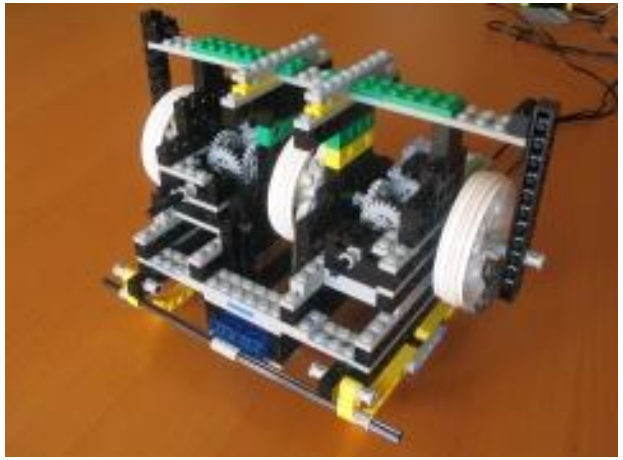
1. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

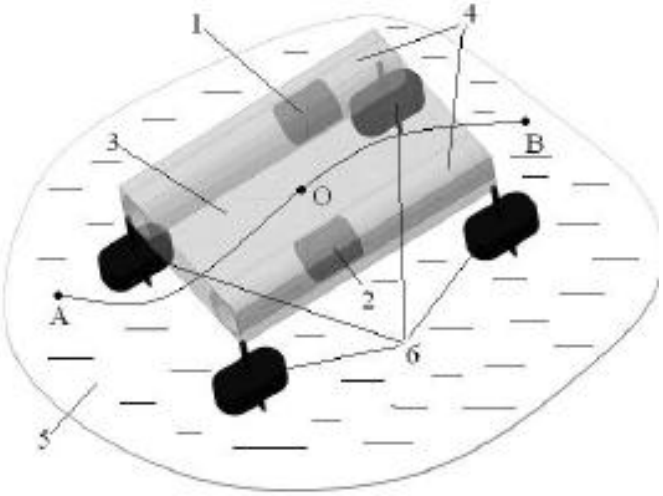


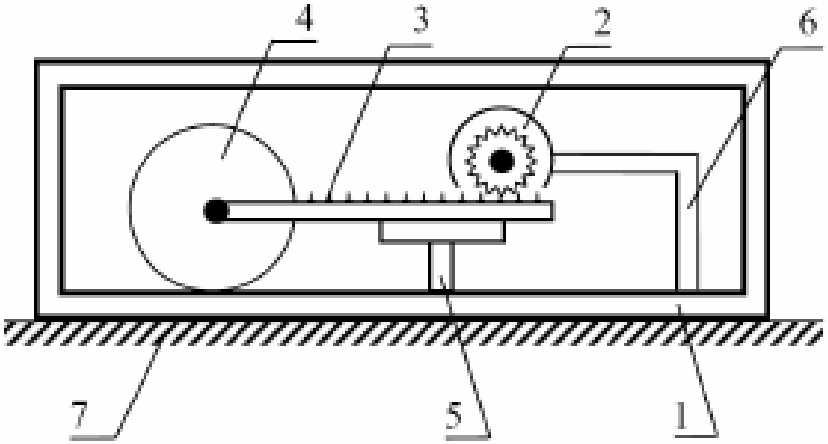
Мальчик бегает по лодке взад-вперед. Может ли он заставить лодку двигаться в среднем поступательно?
Если ДА, то как ему оптимизировать свое движение?

Механическая система моделирует **виброробот** - мобильное устройство, способное перемещаться в сопротивляющейся среде без специальных движителей (колес, ног или гусениц) лишь за счет периодического движения внутренней массы относительно корпуса. Вибророботы просты по конструкции, их корпус может быть сделан герметичным и не содержащим выступающих деталей. Они используются в медицине, нанотехнологии и т.п.

2. КОНСТРУКЦИИ





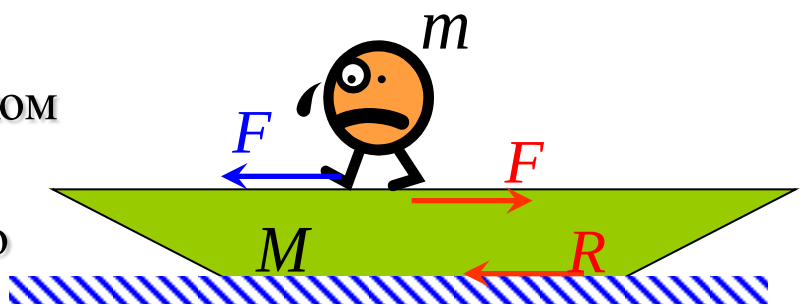


3. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ

u скорость лодки

s расстояние пройденной мальчиком относительно лодки

$v = \dot{s}$ скорость мальчика относительно лодки



Уравнение движения лодки $M\dot{u} = F - R$

Уравнение движения мальчика $m(\dot{u} + \dot{v}) = -F$

$$\boxed{(m+M)\dot{u} + R(u) = -m\ddot{s}}$$

s,u - периодические с периодом T функции

Задача: При заданной средней скорости $\langle u \rangle$ лодки найти такое управление $s(t)$, которое минимизирует ЧТО-ТО (максимальную скорость мальчика? пройденный им путь? что-то еще?)

$$\langle u \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$$

4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мощность, затрачиваемая мальчиком на перемещение лодки = Мощность, затрачиваемая лодкой на преодоление сил сопротивления

$$N = -\langle Fv \rangle = \langle Fu \rangle = \langle \Phi(u) \rangle, \qquad \Phi(u) = R(u)u$$

Задача Для заданной средней скорости лодки найти такой закон движения $s(t)$, чтобы совершаемая мальчиком работа была минимальной

$$N(u) \xrightarrow[\langle u \rangle = U]{} \min$$

Почему это хорошо?

1) На s нет никаких ограничений кроме периодичности

2) Основное соотношение $m\ddot{s} = -(m+M)\dot{u} - R(u)$, рассматриваемое как уравнение относительно s имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\langle R(u) \rangle = 0$$

3) Задача нахождения оптимального u не зависит от s

5. РАСЩЕПЛЕНИЕ ЗАДАЧИ НА ДВЕ ПРОСТЫЕ

ЗАДАЧА №1 (АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ)

Найти $u(t)$, доставляющие минимум функционалу

$$N(u) = \langle \Phi(u) \rangle$$

при выполнении ограничений $\langle R(u) \rangle = 0$ ← воспоминания о $s(t)$

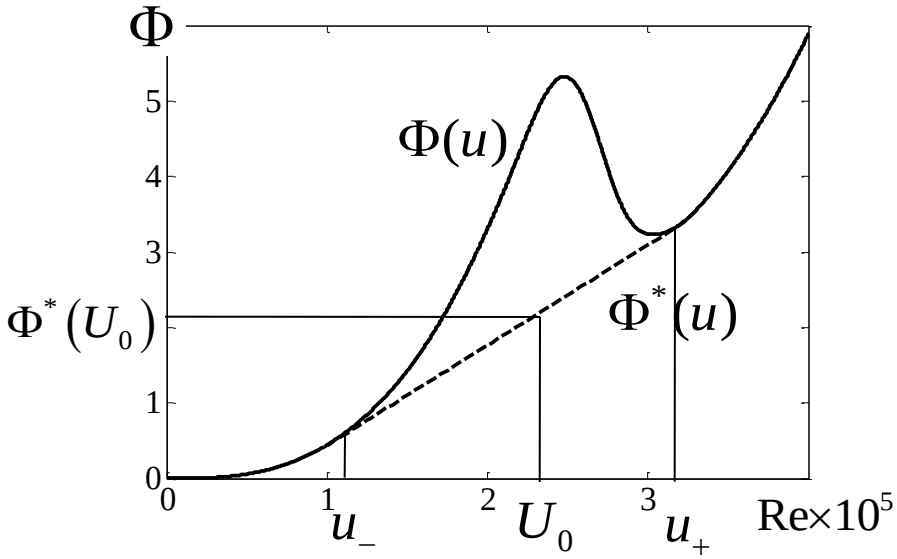
$$\langle u \rangle = U$$

ЗАДАЧА №2 (ПРОСТОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ)

Восстановить интегрированием по оптимальному закону $u(t)$ движения лодки оптимальный закон $s(t)$ движения мальчика

$$m\ddot{s} = -(m + M)\dot{u} - R(u)$$

6. КОЭФФИЦИЕНТ ЭФФЕКТИВНОСТИ



$$\eta = \frac{N_0^{\text{opt}}}{N^{\text{opt}}}$$

$$N_2^{\text{opt}}(U) = \min_{\langle u\rangle = U} \langle \Phi(u) \rangle$$

$$N^{\text{opt}}(U) = \min_{\langle u\rangle = U, \langle R\rangle = 0} \langle \Phi(u) \rangle$$

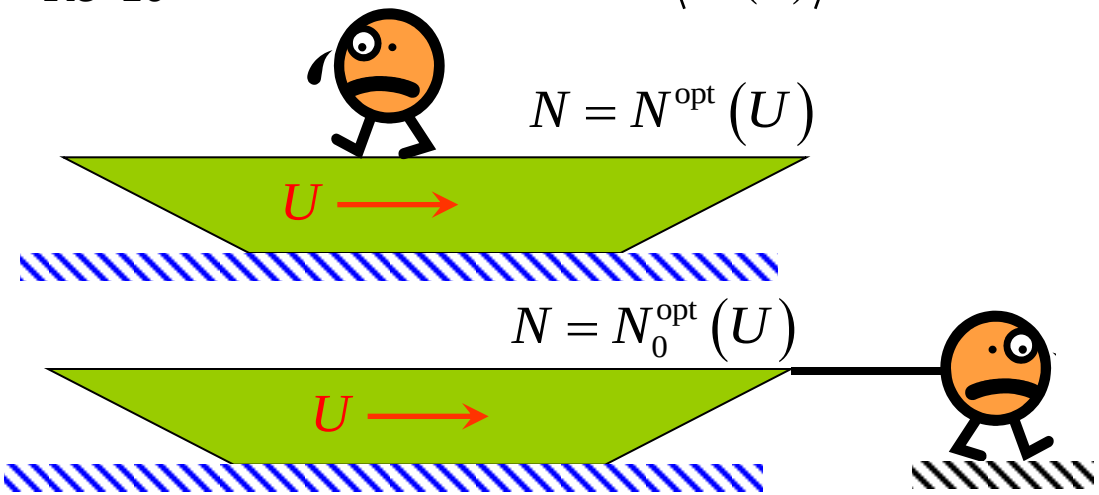
$$0 \le \eta = \frac{\Phi(\langle u \rangle)}{\langle \Phi(u) \rangle} \le 1$$

$$N_2^{\text{opt}}(U) = \Phi^*(U)$$

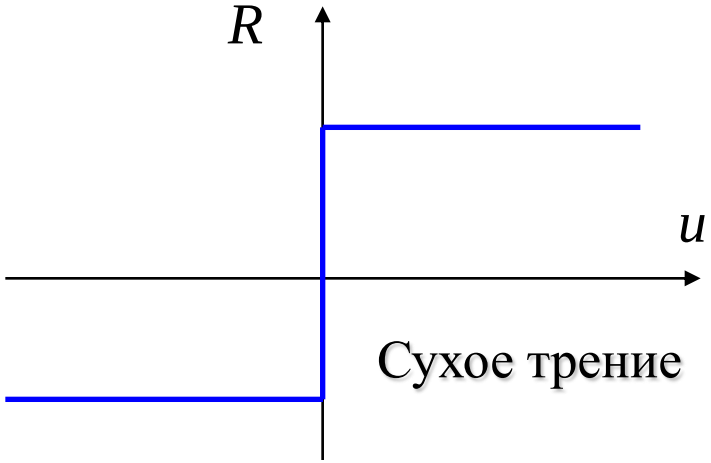
$\Phi^*(u)$ - МВМ $\Phi(u)$

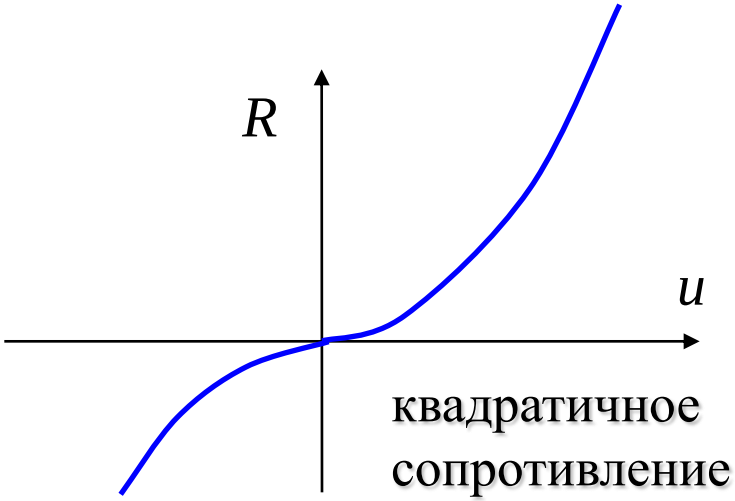
$$\langle \Phi(u) \rangle \ge \langle \Phi^*(u) \rangle \ge \Phi^*(\langle u \rangle)$$

$$\Phi^*(U) = \frac{U_-\Delta_+ + U_+\Delta_-}{\Delta_+ + \Delta_-}$$

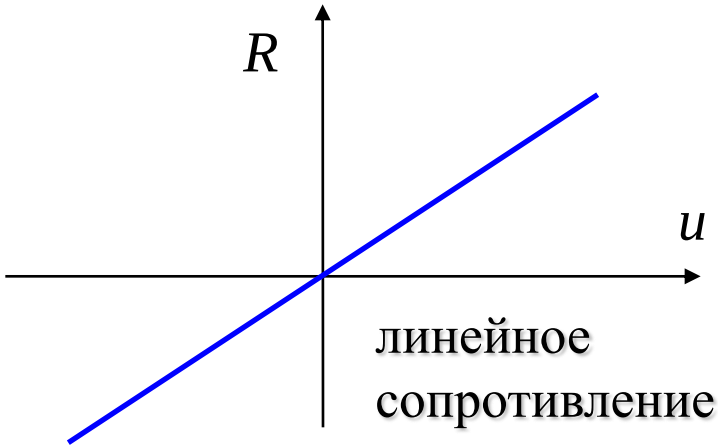


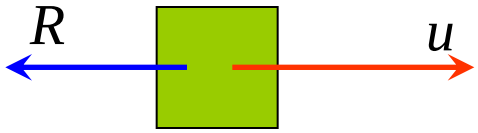
7. ЗАКОНЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ





движение в воде
средние и большие скорости

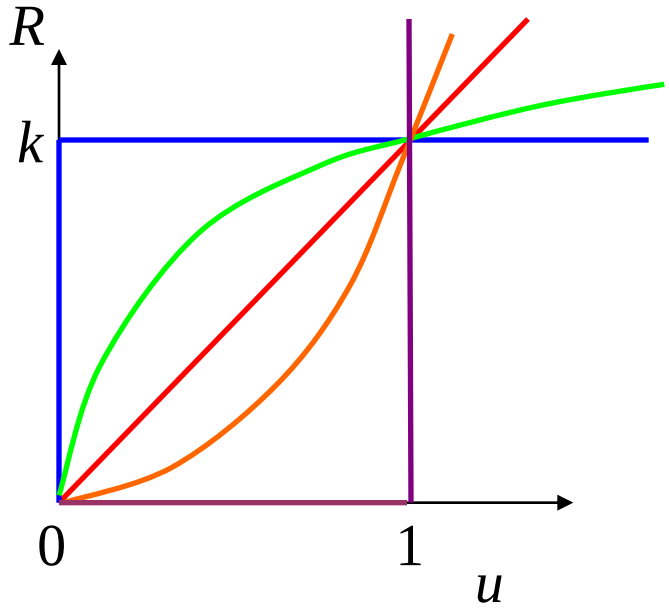




движение в воде, малые скорости

8. ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЙ ЗАКОН СОПРОТИВЛЕНИЯ

$$-F_{\text{сопр}} = R = k|u|^{\alpha}\,\mathrm{sign}(u)$$



$\alpha = 0$ сухое трение

$\alpha = 1$ линейное сопротивление

$\alpha = 2$ квадратичное сопротивление

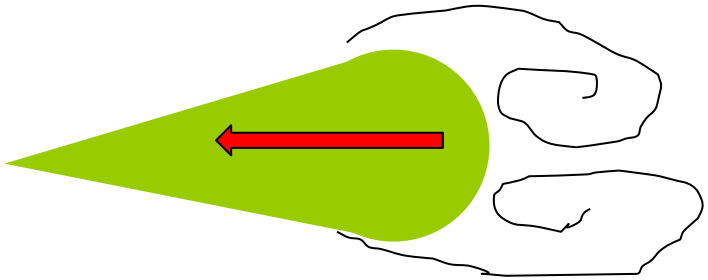
вода

другие (неньютоновские) жидкости

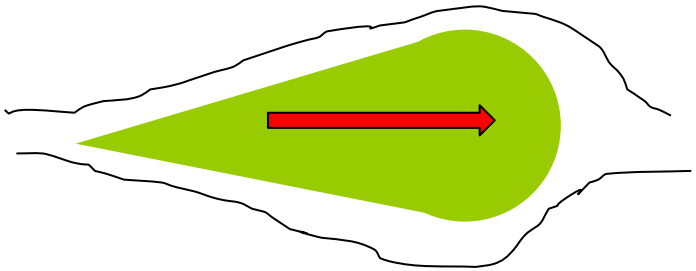
$0 < \alpha < 1$ псевдопластические

$1 < \alpha < \infty$ дилатантные

$\alpha = \infty$ идеально-дилатантная

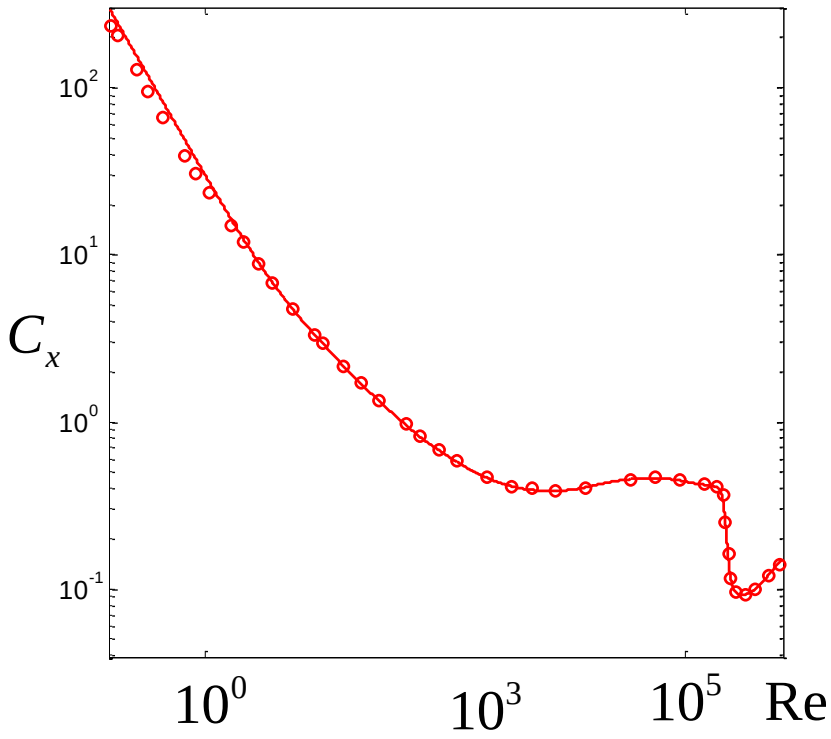


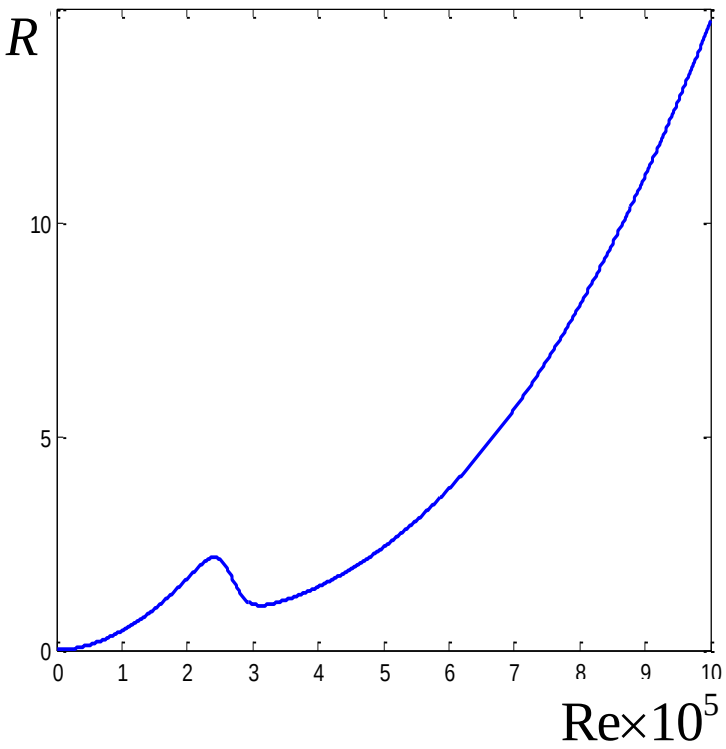
$$k = \begin{cases} 1 & u > 0 \\ \kappa & u < 0 \end{cases}$$



9. РЕАЛЬНЫЙ ЗАКОН СОПРОТИВЛЕНИЯ

Обтекание шара ньютоновской жидкостью

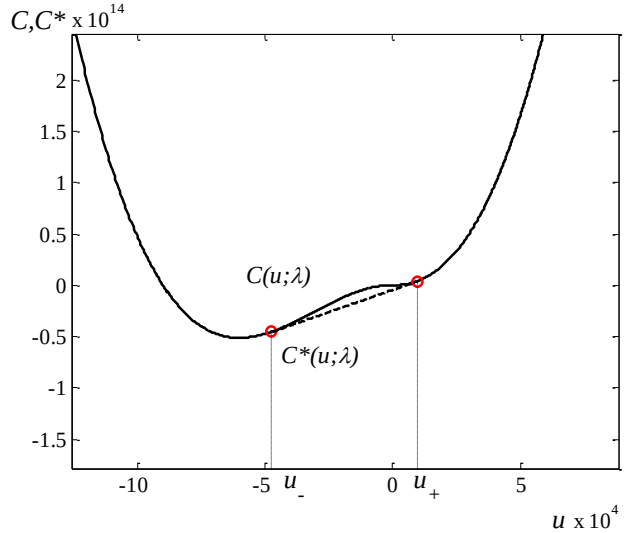


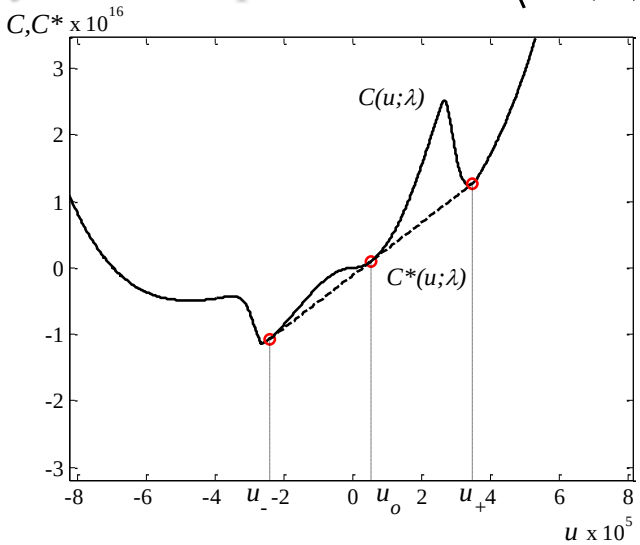


10. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 1

Решение сводится к овыпуклению функции $C(u,\lambda)=\Phi(u)+\lambda R(u)$

λ -множитель Лагранжа, соответствующий ограничению $\langle R(u)\rangle=0$





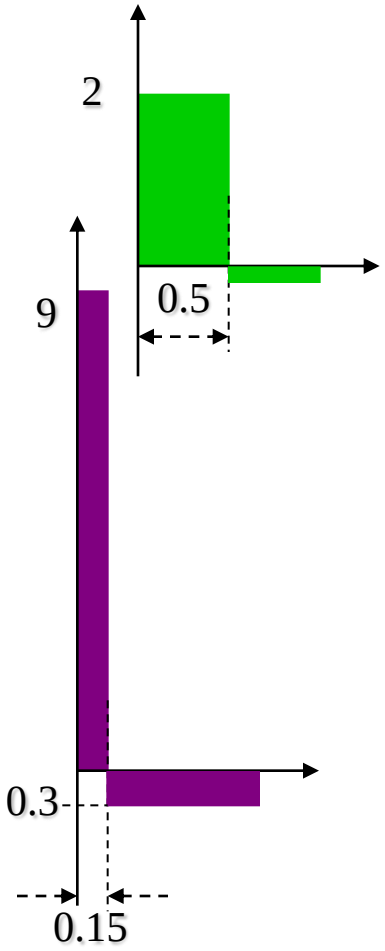
Ситуация общего положения
(двухфазное движение)

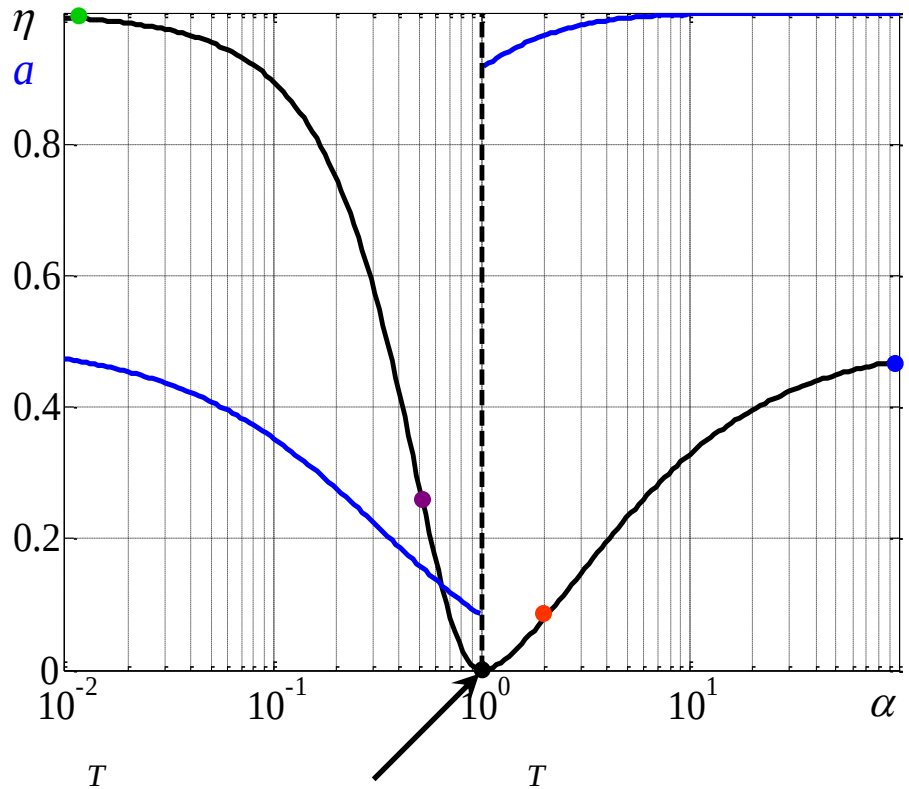
$$\lambda \to U = au_+ + (1-a)u_-$$

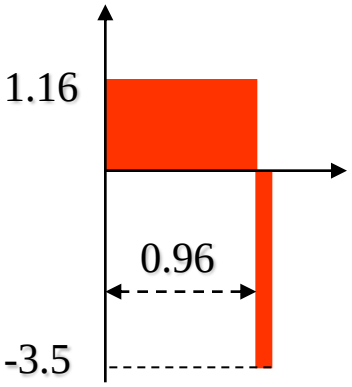
Особые случаи
(трехфазное движение)

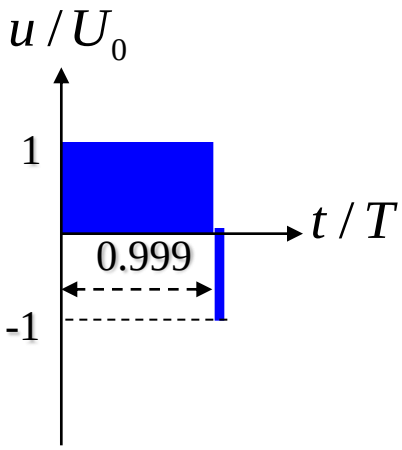
$$\lambda \to U = a\left(bu_+ + (1-b)u_0\right) + (1-a)u_-$$

11. КПД ДЛЯ ИДЕАЛИЗИРОВАННОГО ЗАКОНА





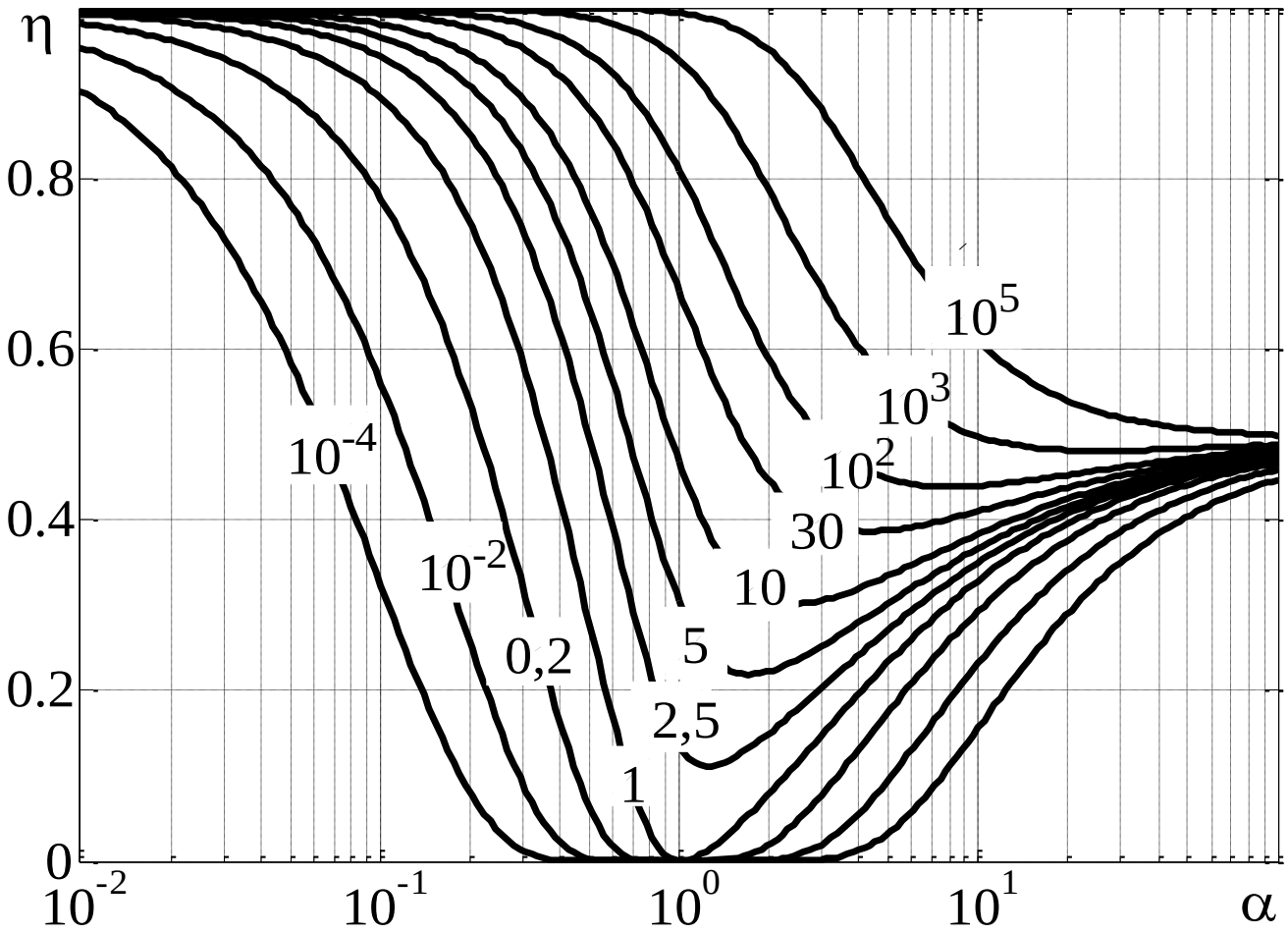




$$\int_0^T R(u)dt = 0 \xrightarrow{\alpha=1} \int_0^T udt = 0$$

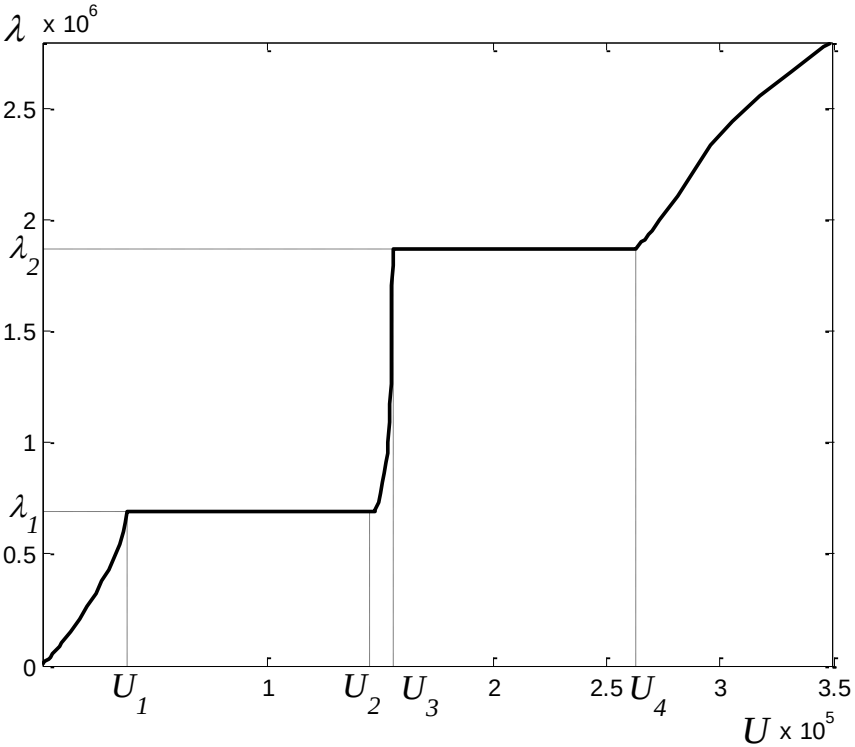
СИММЕТРИЧНОЕ ТЕЛО $\kappa = 1$

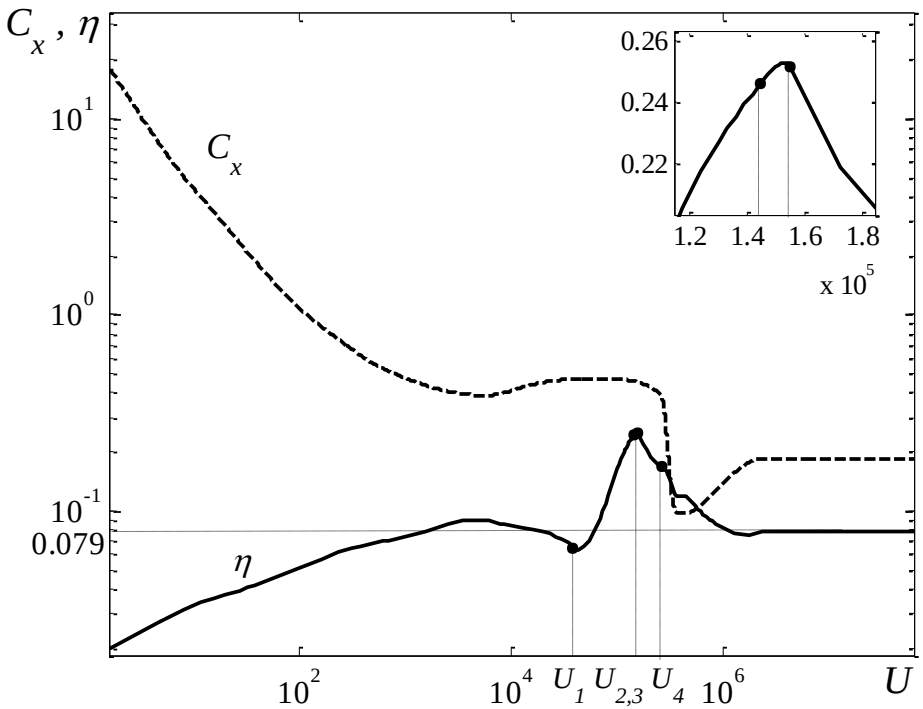
12. КПД ДЛЯ ИДЕАЛИЗИРОВАННОГО ЗАКОНА



НЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЛО $\kappa \neq 1$

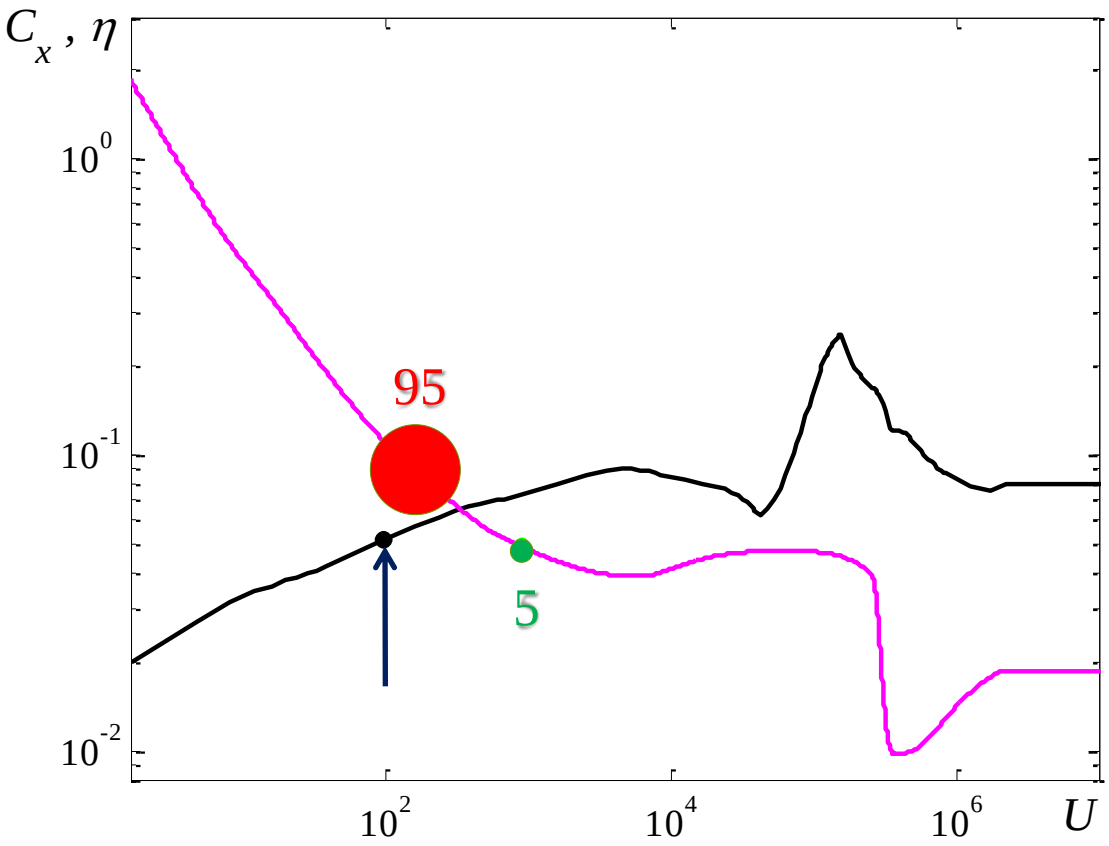
13. ШАР В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ





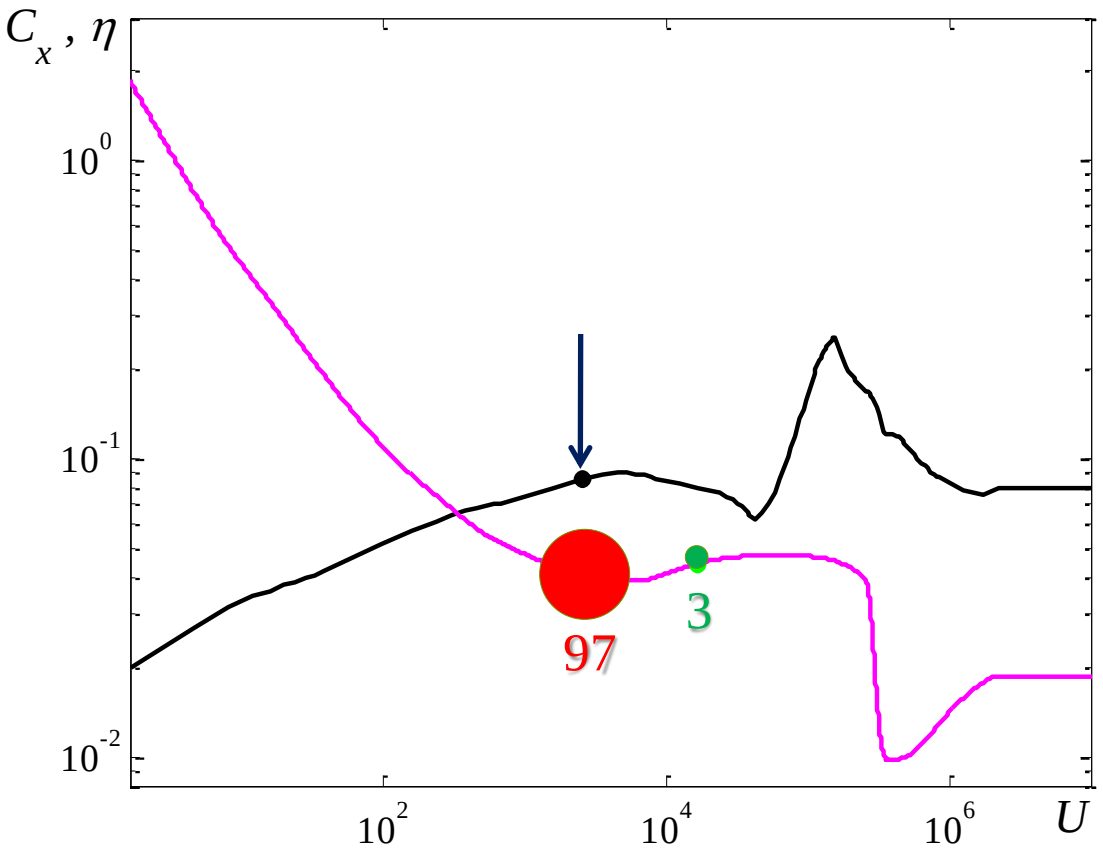
$$U_1 = 3.76 \cdot 10^4 \qquad U_2 = 1.44 \cdot 10^5 \qquad U_3 = 1.55 \cdot 10^5 \qquad U_4 = 2.63 \cdot 10^5$$

14а. КАК ЭТО УСТРОЕНО



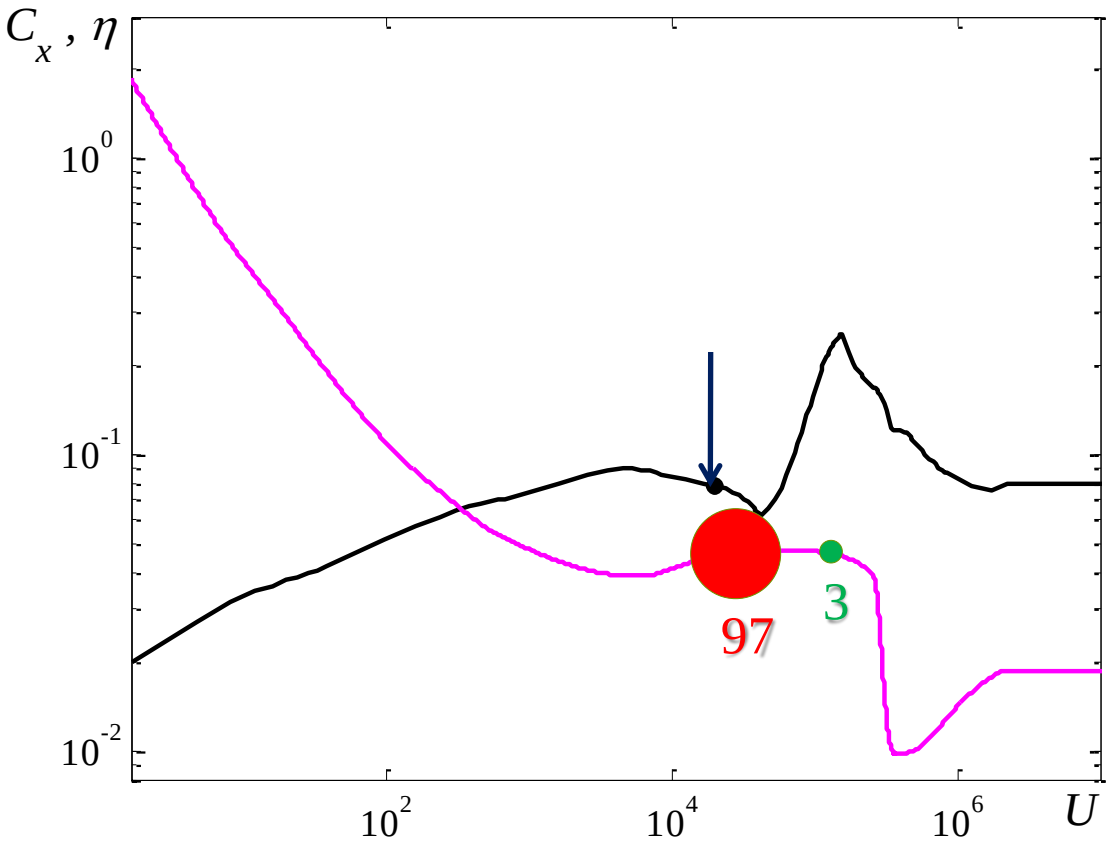
$$U = 95, \eta = 0.051, u_+ = 141.7, u_- = -911.9, \ a_+ = 0.95566, a_- = 0.044345$$

14b. КАК ЭТО УСТРОЕНО



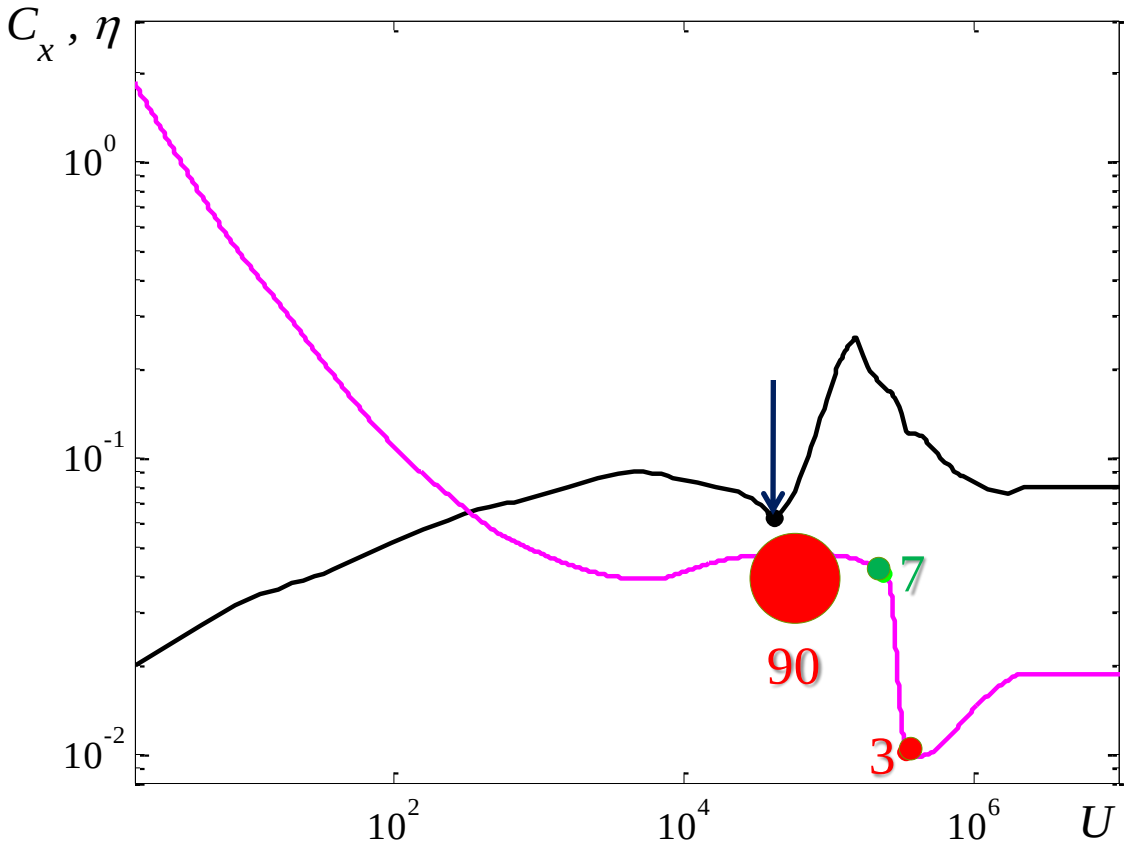
$$U = 2.57 \cdot 10^3, \eta = 0.085, u_+ = 3.26 \cdot 10^3, u_- = -1.65 \cdot 10^4, \ a_+ = 0.96461, a_- = 0.035389$$

14c. КАК ЭТО УСТРОЕНО

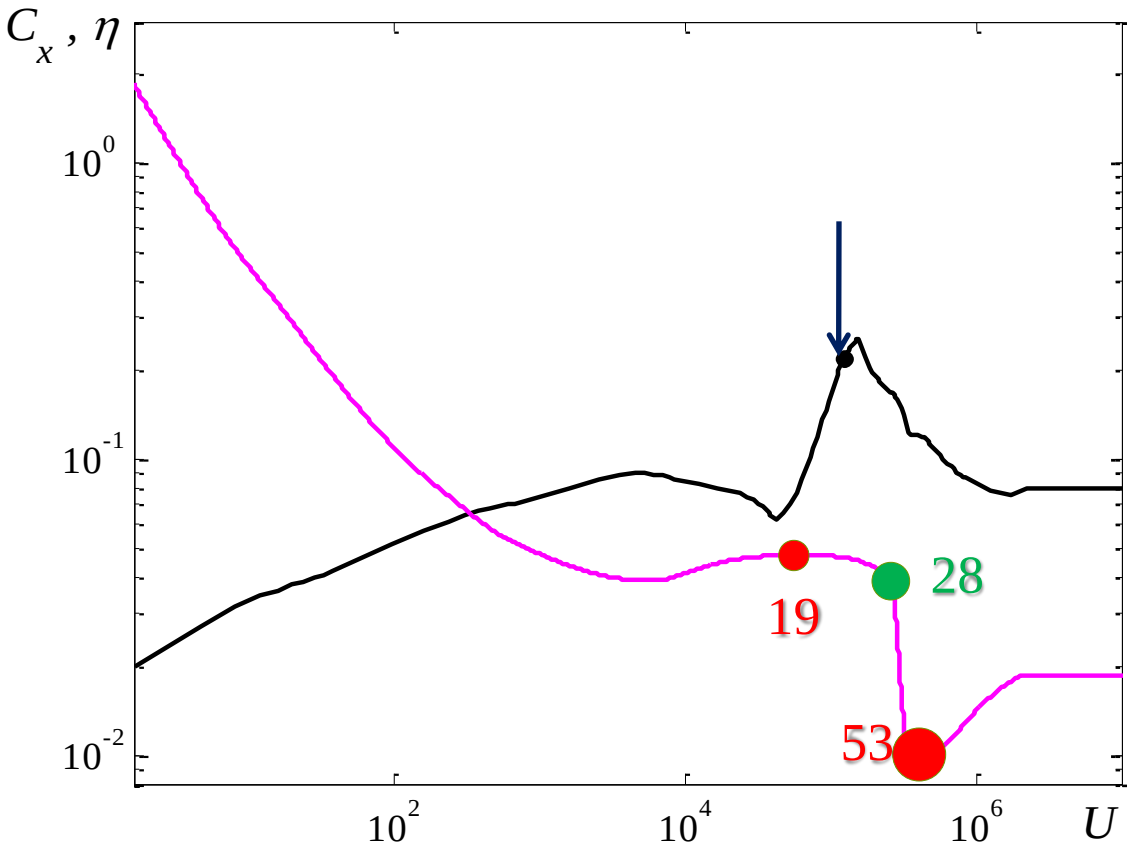


$$U = 2\cdot 10^4, \eta = 0.078, u_+ = 2.57\cdot 10^4, u_- = -1.33\cdot 10^5, a_+ = 0.96475, a_- = 0.035249$$

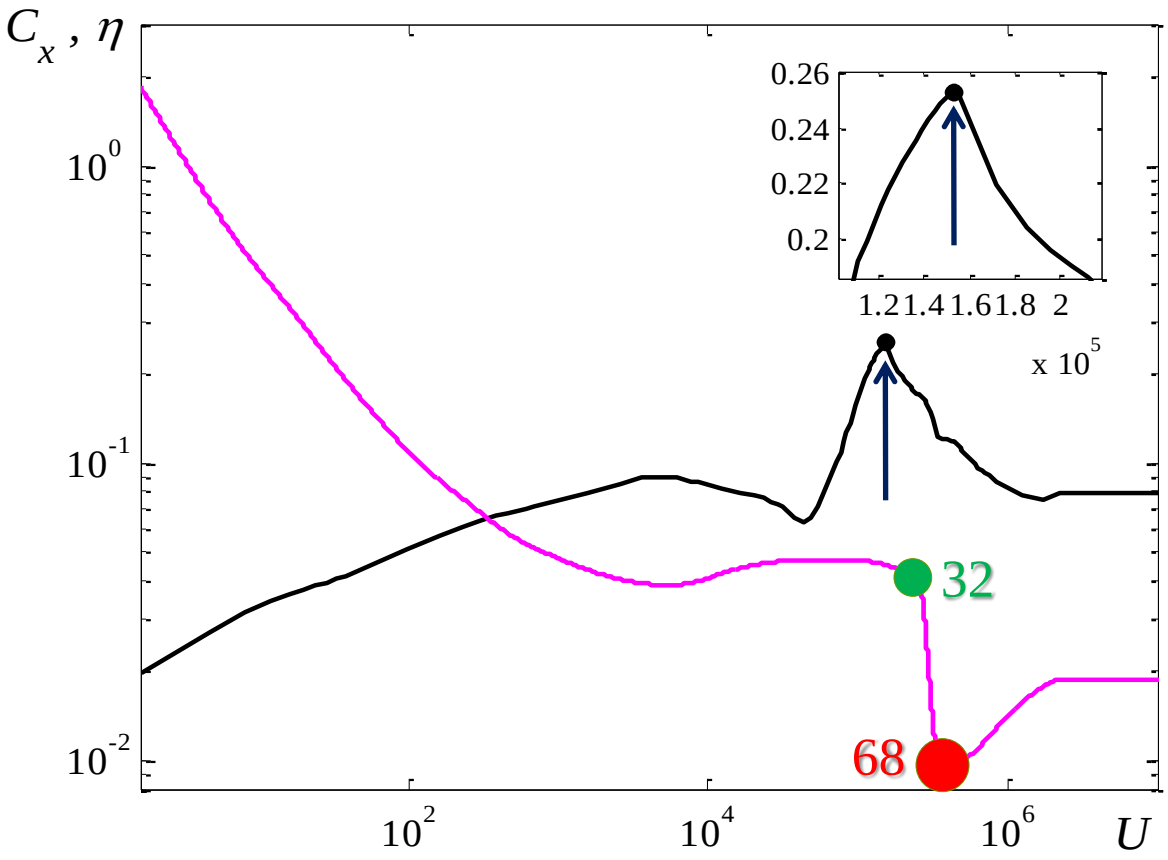
14d. КАК ЭТО УСТРОЕНО



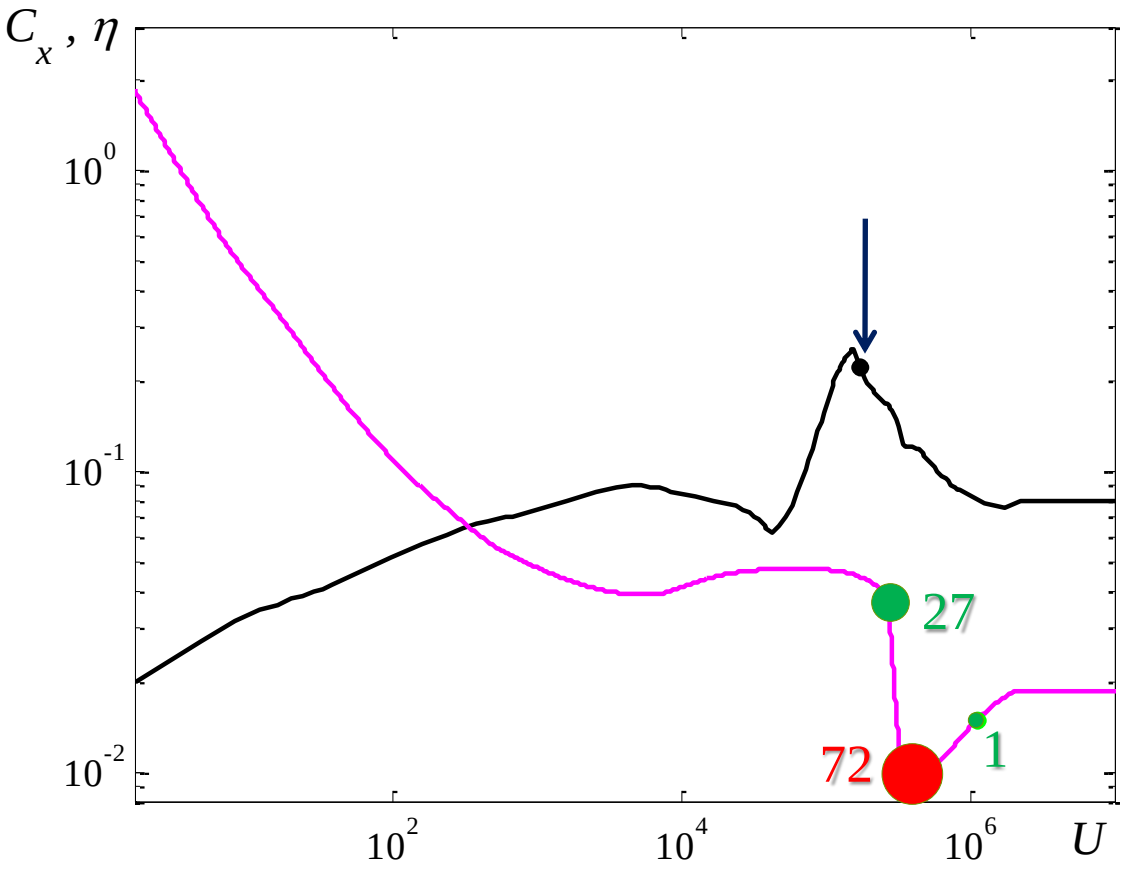
14е. КАК ЭТО УСТРОЕНО



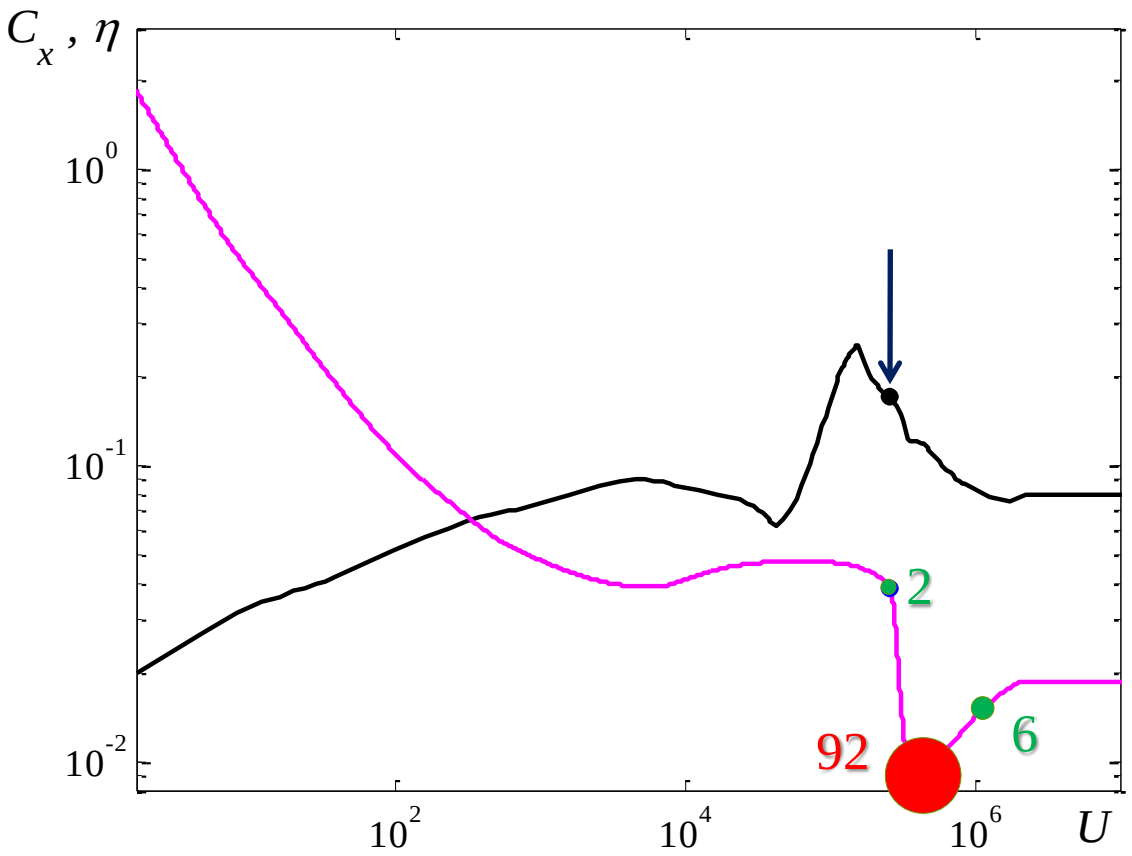
14f. КАК ЭТО УСТРОЕНО



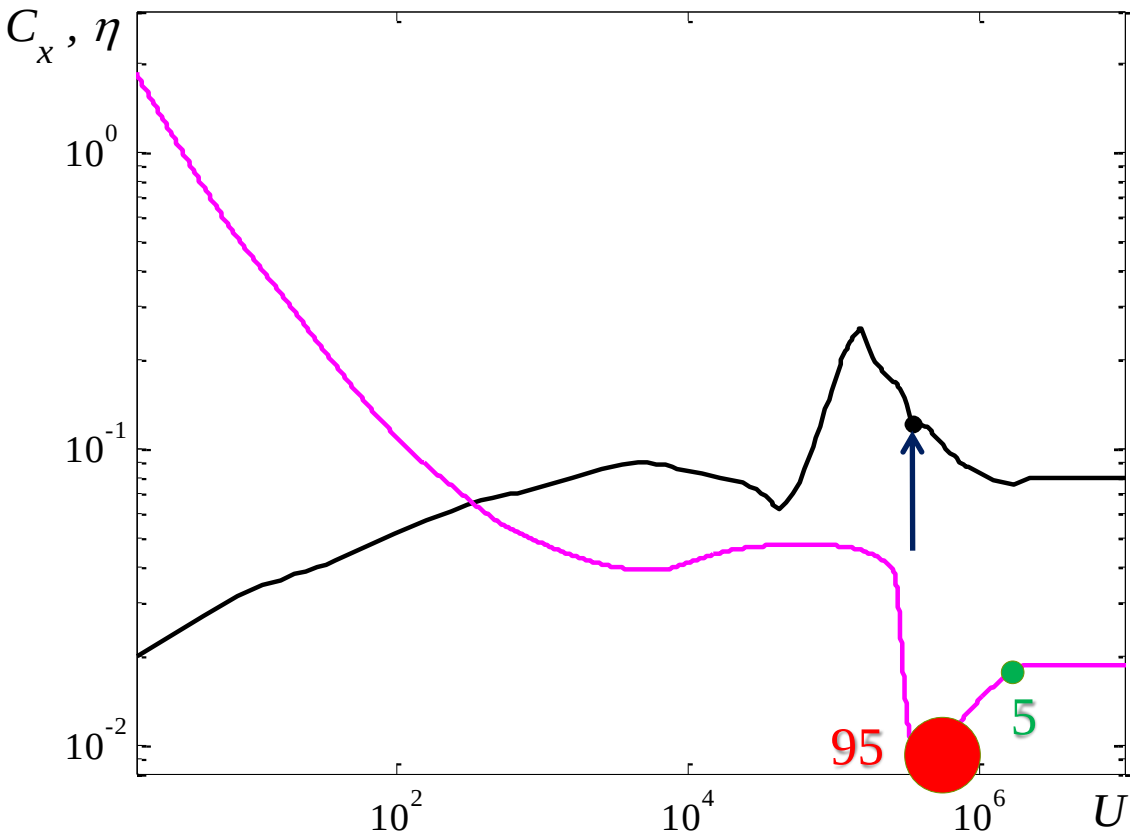
14g. КАК ЭТО УСТРОЕНО



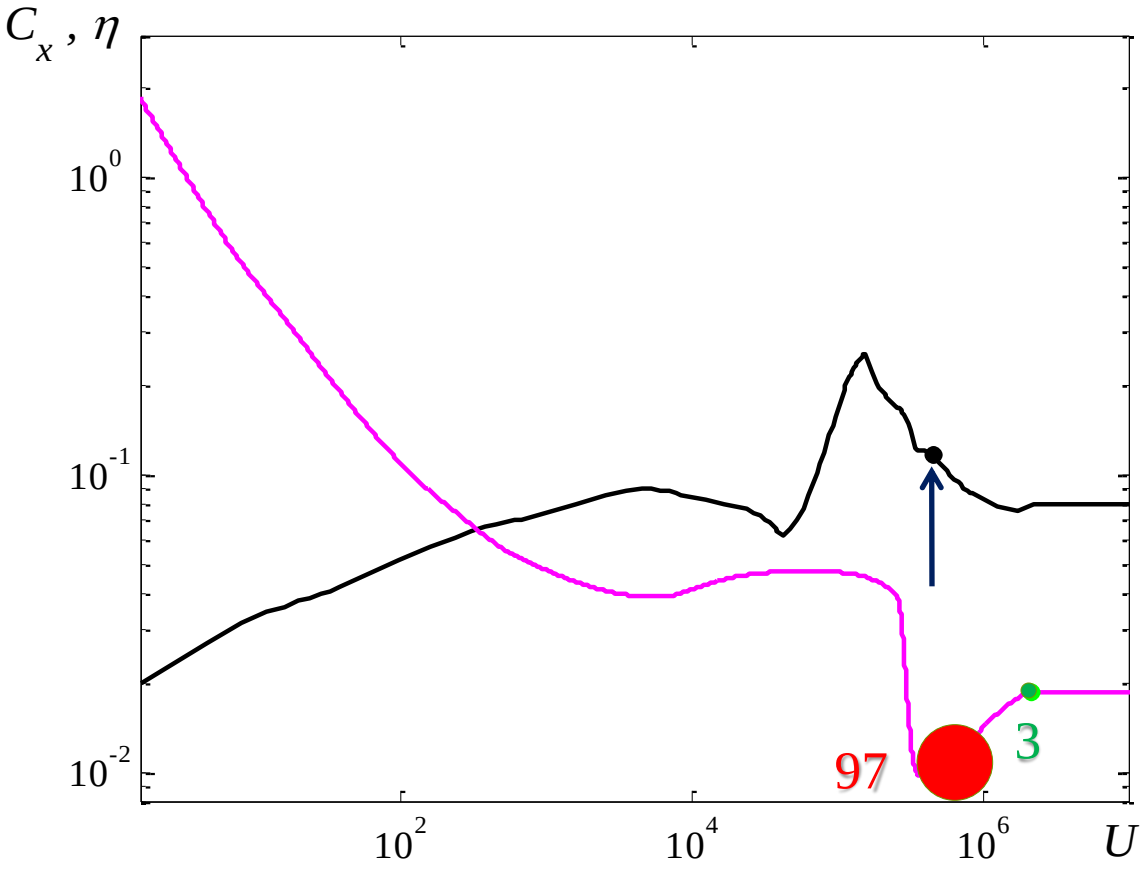
14h. КАК ЭТО УСТРОЕНО



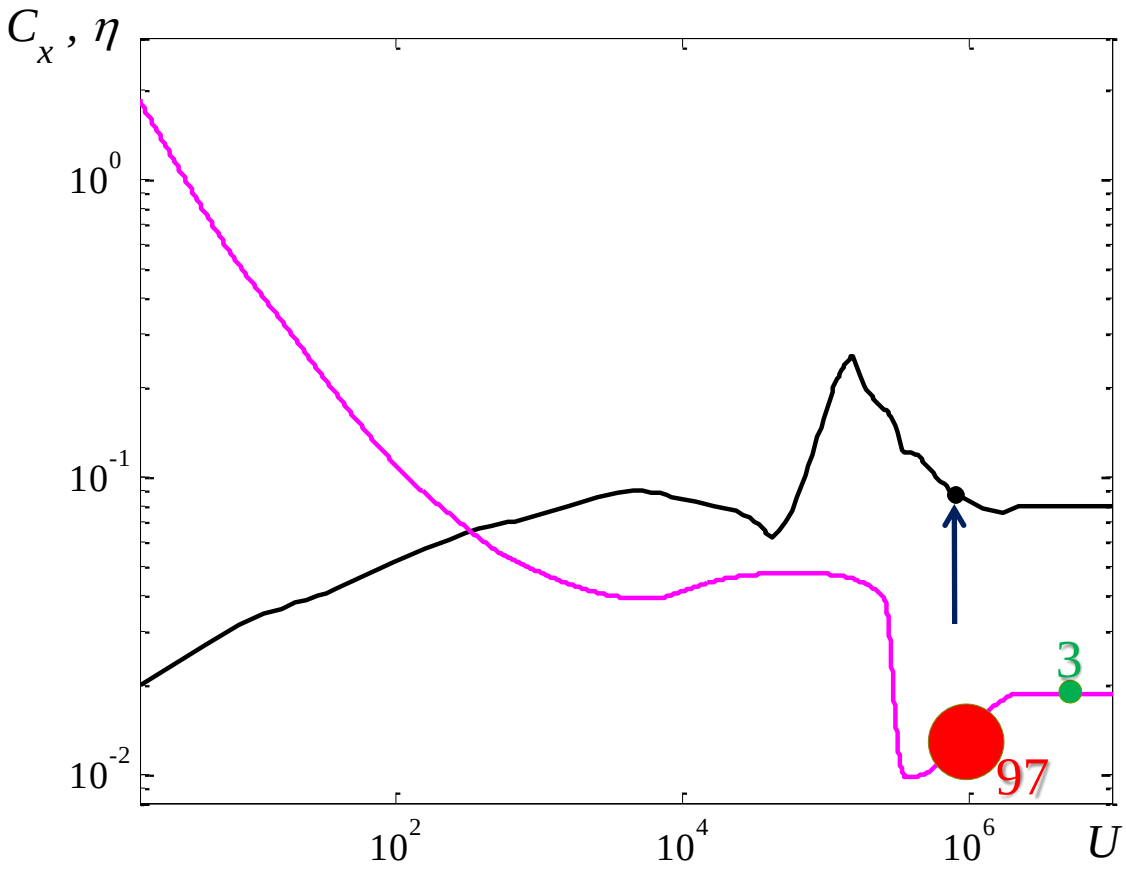
14i. КАК ЭТО УСТРОЕНО



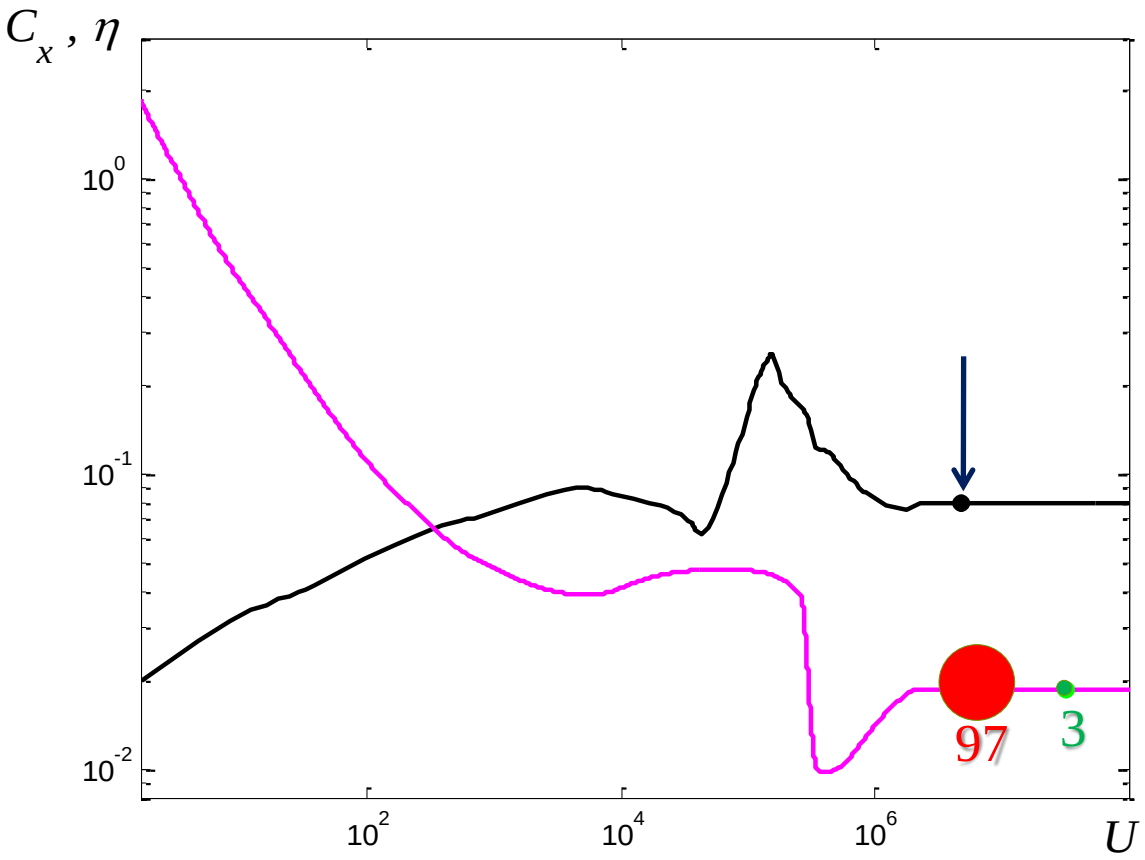
14k. КАК ЭТО УСТРОЕНО



14I. КАК ЭТО УСТРОЕНО



14m. КАК ЭТО УСТРОЕНО



15. ОТКАЗ ОТ УСЛОВИЯ КВАЗИСТАЦИОНАРНОСТИ

1. До сих пор оптимизационные задачи рассматривались в квазистационарной постановке, когда сопротивление R полностью определялось текущей скоростью тела
2. Гидродинамические силы сопротивления движению корпуса в вязкой жидкости определяются теми течениями, которые были сформированы телом в жидкости за все время движения. В общем случае они не могут быть описаны исключительно в терминах мгновенной скорости, но должны определяться всей предысторией движения.
3. В простейшей нестационарной модели предыстория учитывается силами Бассэ

16. ПОСТАНОВКА ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ

$$R = \underbrace{\frac{1}{2} C_x \pi \rho a^2 |u| u}_{\text{квазистационарная часть}} + \underbrace{6\pi\rho\nu a^2 \int_{-\infty}^{t} \frac{du/d\tau}{\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}} d\tau}_{\text{силы Бассе}} + \underbrace{\frac{2}{3}\pi a^3 \rho}_{\text{Присоединенная масса}} \frac{du}{dt}$$

$$N_{\min} = \min\left(N_V(u) + sN_H(u)\right)$$

$$\langle u \rangle = 1$$

$$\langle u|u| \rangle = 0$$

$$N_V = \left\langle |u|^3 \right\rangle, \quad N_H = \langle u R_H \rangle, \quad R_H = \int_{-\infty}^{t} \frac{\dot{u}(\tau) d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}}$$

$$s = \frac{12}{C_x U} \sqrt{\frac{\nu}{\pi T}}$$ Единственный безразмерный параметр задачи

17. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

$$\boxed{3|u|u + s\int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(\tau)\frac{\operatorname{sign}(t-\tau)}{\sqrt{|t-\tau|}}d\tau + \lambda|u| - \mu = 0} \qquad (1)$$

1) В силу инвариантности задачи относительно сдвига и обращения времени можно рассматривать ее на полупериоде , задав на его концах условия симметрии $\dot{u}(0) = \dot{u}(1/2) = 0$

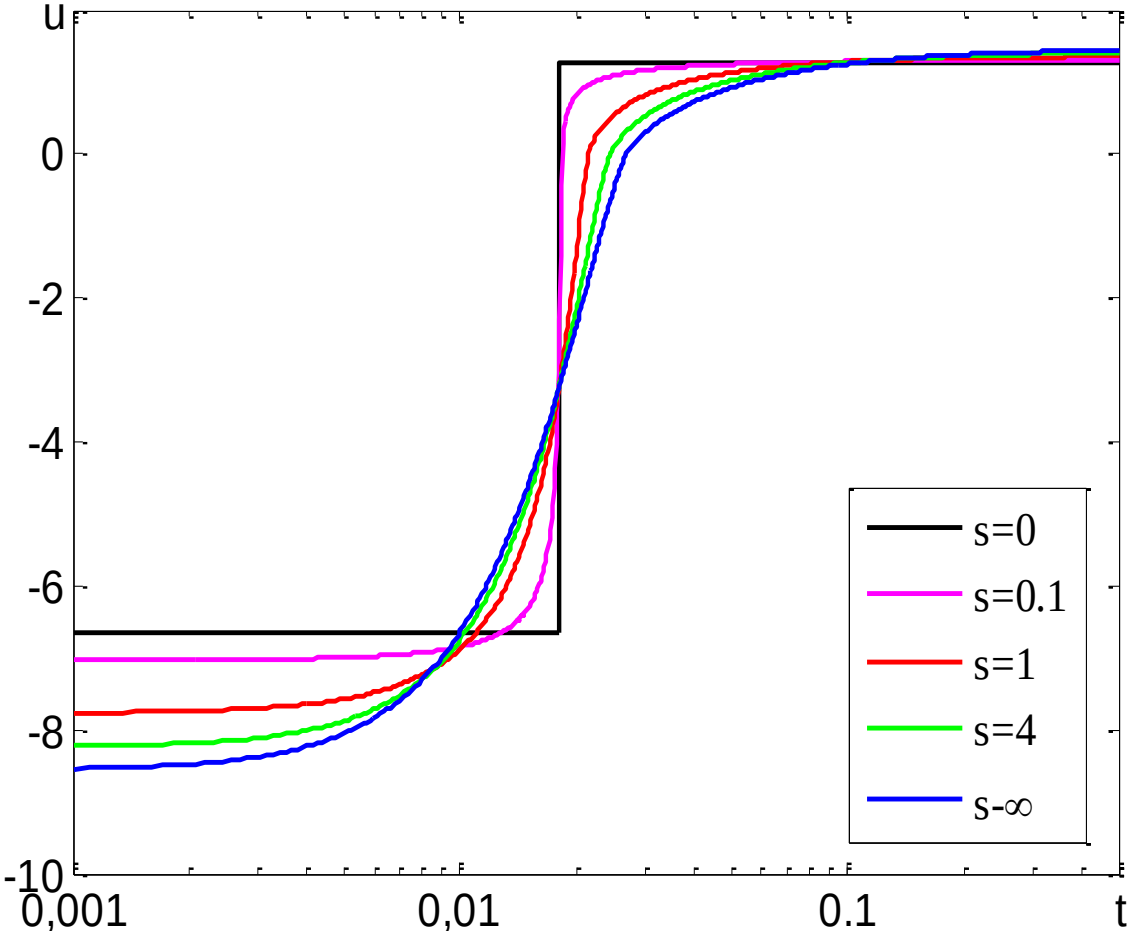
2) . Интегрирование (1) по периоду дает выражение μ через λ : $\mu = \lambda\langle|u|\rangle$

3) Множитель Лагранжа λ выбирался равным единице. Полученное при этом решение после простой перенормировки удовлетворяло условию $\langle u\rangle = 1$

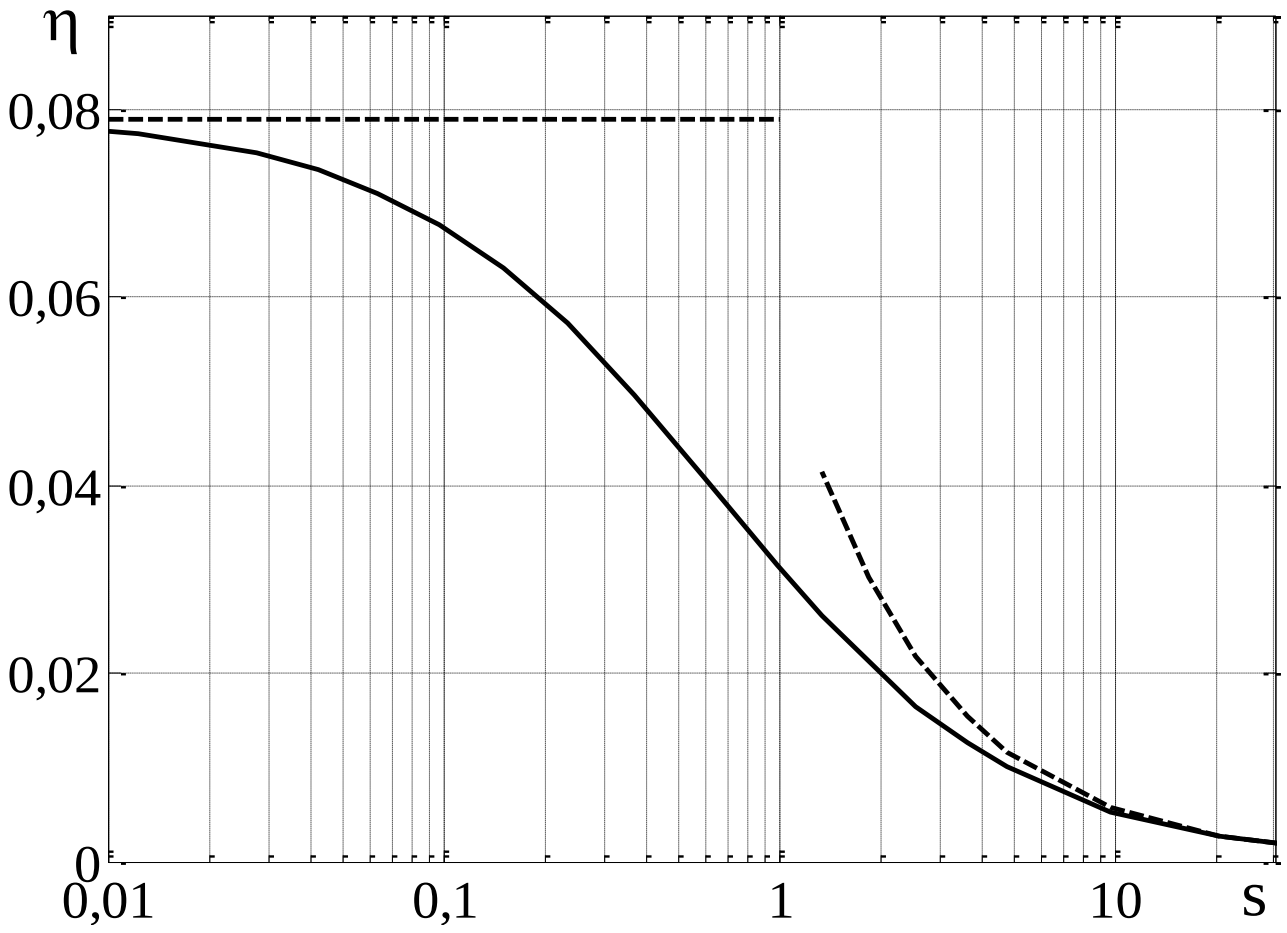
4) Нелинейное интегральное уравнение (1) с $\lambda = 1, \mu = \langle|u|\rangle$ решалось численно на сетке с 4000 узлов.

5) Решение (1) не единственно. Для того, чтобы получать отвечающие глобальному минимуму (5) базовые (т.е. не имеющие на выделенном полупериоде других точек экстремума кроме 0 и ½) решения, необходимо, чтобы начальное приближение попадало в их окрестность. Это гарантировалось постепенным продвижением по параметру s

18. ОПТИМАЛЬНЫЕ СКОРОСТИ



19. КОЭФФИЦИЕНТ ЭФФЕКТИВНОСТИ



20. ОПТИМАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВНУТРЕННЕЙ МАССЫ

Физический интерес представляет случай, когда

1) Размах L колебаний внутренней массы не превосходит диаметра 2a корпуса
2) Числа Рейнольдса лежат в диапазоне квадратичности закона сопротивления 800<Re<30000

При этом реализуется инерционный режим движения внутренней массы

$$m\dot{v} = -\left(m + M + M_0\right)\dot{u} - \cancel{R(u)}$$

$$v(t) = \frac{m + M + M_0}{m}\left(U - u(t)\right)$$

$$\boxed{UT = \frac{3.28m}{m + M + M_0}L}$$