Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Казань – 2007

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова - Ленина

Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Казань

2007

УДК 517.9

Рецензенты: профессор кафедры высшей математики КГЭУ, д.ф.-м.н С. А. Григорян; доцент кафедры теории относительности и гравитации КГУ, к.ф. -м.н Р. А. Даишев.

Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева
Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков. -Казань, 2007. - 51 с.
Библиогр.: 6 назв.

Данное методическое пособие посвящено изучению методов решения дифференциальных уравнений высших порядков, изучаемых в рамках курса "Дифференциальные уравнения" на физико - математическом факультете филиала КГУ г. Зеленодольска. Это пособие предлагается студентам для более эффективного освоения изучаемого материала, а так же преподавателям для проведения практических занятий. В каждом разделе приводятся необходимые теоретические сведения и подробно разбираются типовые примеры. В конце раздела предлагаются задачи для самостоятельной работы.

Оглавление

Глава 1. Уравнения, допускающие понижение порядка

1.1 Уравнения, содержащие только независимую переменную и производную порядка n.

Уравнения, разрешенные относительно производной

Рассмотрим уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x). \tag{1.1}$$

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b). Тогда существует единственное решение задачи Коши, причем начальные данные y_0, y_0',…, $y_0^{(n-1)}$ можно задавать любые, а x_0 должно принадлежать интервалу (a, b). Это решение будет частным и будет определено во всем интервале (a, b). Особых решений уравнение (1.1) не имеет.

Интегрируя последовательно уравнение (1.1), получаем общее решение

$$y = \underbrace{\int\int\cdots\int}_{n \text{ раз}} f(x)dxdx\cdots dx + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_nx + C_n \tag{1.2}$$

в области

$$a < x < b, \quad |y| < +\infty, \quad |y'| < +\infty, \ldots, \quad |y^{(n-1)}| < +\infty. \tag{1.3}$$

$C_1, \quad C_2, \ldots, \quad C_n$ - произвольные постоянные.

Общее решение можно записать так же в форме Коши:

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}}_{n \text{ раз}} f(x)dxdx\cdots dx + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)} +$$

$$+\frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{(n-2)} + \ldots + y_0'(x-x_0) + y_0, \tag{1.4}$$

где x_0 - фиксированное число из интервала (a,b), а y_0, y_0',..., $y_0^{(n-1)}$ играют роль произвольных постоянных, которые здесь могут принимать любые значения. Учитывая, что

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}}_{n \text{ раз}} f(x)dxdx\cdots dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt,$$

общее решение можно записать в следующих формах:

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \\ + \ldots + C_nx + C_n, \tag{1.5}$$

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)} + \\ + \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{(n-2)} + \ldots + y_0'(x-x_0) + y_0. \tag{1.6}$$

Если известно какое-нибудь частное решение y_1 уравнения (1.1), то общее решение имеет вид

$$y = y_1 + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_nx + C_n.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y'' = xe^x \tag{1.7}$$

и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Интегрируем последовательно уравнение (1.7), получаем общее решение:

$$\begin{cases} y' = (x-1)e^x + C_1, \\ y = (x-2)e^x + C_1x + C_2. \end{cases} \tag{1.8}$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям. Подставим начальные данные $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y_0' = 0$ в систему (1.8):

$$\begin{cases} 0 = -1 + C_1, \\ 1 = -2 + C_2, \end{cases}$$

получим $C_1 = 1$, $C_2 = 3$, отсюда частное решение

$$y = (x-2)e^x + x + 3. \tag{1.9}$$

Это же частное решение можно получить, используя формулу общего решения в форме Коши (1.6). Положим в ней $n = 2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y_0' = 0$:

$$y = \int_0^x te^t(x-t)dt + 1.$$

Выполнив интегрирование, вновь получим решение (1.9).

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y''^2 + 5y'' + 6 = 0. \tag{1.10}$$

Решение. Это квадратное уравнение относительно производной y''. Разрешаем его: $y'' = -2$, $y'' = -3$. Интегрируем эти уравнения:

$$y' = -2x + C_1, \quad y = -x^2 + C_1x + C_2;$$
$$y' = -3x + C_1, \quad y = -\frac{3}{2}x^2 + C_1x + C_2.$$

Совокупность этих общих решений образует общий интеграл уравнения (1.10). Его можно записать в виде одного соотношения

$$(y + x^2 - C_1x - C_2)(y + \frac{3}{2}x^2 - C_1x - C_2) = 0:$$

Уравнения, не разрешенные относительно производной.

Рассмотрим уравнение вида

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \tag{1.11}$$

Если его можно разрешить в элементарных функциях относительно $y^{(n)}$, мы получим одно или несколько уравнений рассмотренного выше вида (смотри пример (2)).

Иногда уравнения можно разрешить относительно независимой переменной x:

$$x = f(y^{(n)}).$$

В этом случае удается найти общее решение в параметрической форме. Вводим параметр $y^{(n)} = t$, тогда $x = f(t)$. Так как x уже выражено через параметр t, то задача сводится к тому, чтобы выразить y через t. Находим дифференциал независимой переменной $dx = f'(t)dt$. Тогда $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = tf'(t)dt$, откуда

$$y^{(n-1)} = \int tf'(t)dt + C_1 \equiv \varphi_1(t, C_1).$$

Аналогично найдем выражение для $y^{(n-2)}$ и т.д. Наконец для y получим выражение вида $y = \varphi_n(t,\, C_1,\, C_2, \ldots C_n)$, следовательно,

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = \varphi_n(t,\, C_1,\, C_2, \ldots,\, C_n). \end{cases} \tag{1.12}$$

Уравнение (1.12) будем называть *общим решением* уравнения (1.11) *в параметрической форме.*

Пример 1. Найти решение уравнения

$$x - e^{y''} + y''^2 = 0. \tag{1.13}$$

Решение. Уравнение неразрешимо относительно y''. Зато оно разрешимо относительно x: $x = e^{y''} - y''^2$. Приняв y'' за t, получим параметрическое представление уравнения (1.13) в виде $x = e^t - t^2$, $y'' = t$. Далее, $dx = (e^t - 2t)dt$, $dy' = y''dx = t(e^t - 2t)dt$, откуда

$$y' = \int t(e^t - 2t)dt + C_1 = e^t(t-1) - \frac{2}{3}t^3 + C_1.$$

Поэтому

$$dy = y'dx = \left(e^t(t-1) - \frac{2}{3}t^3 + C_1\right)(e^t - 2t)dt$$

или

$$dy = \left(e^{2t}(t-1) - \left(\frac{2}{3}t^3 + 2t^2 - 2t - C_1\right)e^t + \frac{4}{3}t^4 - 2C_1 t\right)dt.$$

Интегрируем и получаем решение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} y = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2t} - \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t + 2 - C_1\right)e^t + \frac{4}{15}t^5 - C_1 t^2 + C_2, \\ x = e^t - t^2. \end{cases}$$

Пусть уравнение (1.11) допускает такое параметрическое представление:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y^{(n)} = \psi(t), \end{cases}$$

тогда

$$dx = \varphi'(t)dt, \quad dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \psi(t)\varphi'(t)dt,$$
$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1 \equiv \psi_1(t, C_1).$$

Рассуждая так же как и в выше рассмотренном типе уравнения, получим общее решение в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi_n(t,\, C_1,\, C_2, \ldots,\, C_n). \end{cases}$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y''^2 - 8y'' + x^2 - 6x + 24 = 0. \tag{1.14}$$

Решение. Представим уравнение в виде

$$(x-3)^2 + (y''-4)^2 = 1.$$

Оно допускает следующую параметризацию:

$$\begin{cases} x = \cos t + 3, \\ y'' = \sin t + 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\sin t dt, \\ dy' = y'' dx. \end{cases}$$

Исключаем dx из последней системы уравнений:

$$dy' = -(\sin t + 4)\sin t dt = -(\sin^2 t + 4\sin t)dt,$$

откуда

$$y' = -\int (\sin^2 t + 4\sin t)dt + C_1 = -\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + 4\cos t + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy = \left(-\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + 4\cos t + C_1\right) dx = -\left(-\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + 4\cos t + C_1\right)\sin t dt.$$

Интегрируем, находим решение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \cos t + 3 \\ y = -\frac{t\cos t}{2} + \frac{\sin t}{2} - \frac{\sin^3 t}{6} + 2\cos^2 t + C_1 \cos t + C_2. \end{cases}$$

1.2 Уравнения, не содержащие искомой функции

Этот тип уравнения имеет вид

$$F(x,\, y^{(k)},\, y^{(k+1)}, \ldots,\, y^{(n)}) = 0\,(1 \le k < n).$$

С помощью подстановки $y^{(k)} = z$, где z - новая неизвестная функция, уравнение рассматриваемого типа приводится к уравнению $(n-k)$ - го порядка:

$$F(x,\, z,\, z', \ldots,\, z^{(n-k)}) = 0. \tag{1.15}$$

Если (1.15) интегрируется в квадратуре так, что мы найдем

$$z = \varphi(x,\, C_1, \ldots,\, C_{n-k}) \quad \text{или} \quad \Phi(x,\, z,\, C_1, \ldots,\, C_{n-k}) = 0,$$

то, возвращаясь к переменной y, соответственно,

$$y^{(k)} = \varphi(x,\, C_1, \ldots,\, C_{n-k}) \quad \text{или} \quad \Phi(x,\, y^{(k)},\, C_1, \ldots,\, C_{n-k}) = 0.$$

Это уравнение рассмотренного выше вида.

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \frac{2y'^2}{x^2} = 0. \tag{1.16}$$

Решение. Полагая $y' = z$, получаем

$$z' + \frac{2z^2}{x^2} = 0,$$

откуда

$$\frac{dz}{z^2} = -\frac{2dx}{x^2}, \quad -\frac{1}{z} = \frac{2}{x} + C_0, \quad z = -\frac{x}{2 + C_0 x}.$$

Потерянное решение – $z = 0$. Заменяем z на y':

$$y' = -\frac{x}{2 + C_0 x}, \quad dy = -\frac{xdx}{2 + C_0 x}.$$

Здесь возможны два случая:

1. $C_0 \neq 0$. Разложим dy на простейшие дроби:

$$dy = \frac{1}{C_0}\left(\frac{2dx}{2 + C_0 x} - dx\right) \Rightarrow y = \frac{2}{C_0^2}\ln|2 + C_0 x| - \frac{x}{C_0} + C_1.$$

2. $C_0 = 0$. Отсюда

$$dy = -xdx/2 \Rightarrow y = -x^2/4 + C.$$

Потерянное решение –

$$z = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C.$$

1.3 Уравнения, не содержащие независимой переменной

Будем рассматривать уравнение вида

$$F(y,\, y', \ldots,\, y^{(n)}) = 0. \tag{1.17}$$

Делаем замену $y' = z$, приняв y за новую независимую переменную – $z = z(y)$. При этом y'', y''', …, $y^{(n)}$ преобразуются так:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}z = \left(\frac{d^2z}{dy^2}z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)z,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n)} = \omega\left(z,\, \frac{dz}{dy}, \ldots,\, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right).$$

Подставляя выражение для y', y'', y''', …, $y^{(n)}$ в уравнение (1.17), получаем уравнение $(n-1)$ - го порядка с искомой функцией z от независимой переменной y.

Принимая y за независимую переменную, мы могли потерять решение вида $y = \text{const}$. Непосредственной подстановкой в уравнение (1.17) можно выяснить, имеет ли оно решение такого вида.

Если уравнение имеет вид

$$F(y^{(k)},\, y^{(k+1)}, \ldots ,\, y^{(n)}) = 0\,(1 \le k < n), \tag{1.18}$$

то делаем замену $y^{(k)} = z(x)$. Тогда уравнение (1.18) примет вид уравнения (1.17):

$$F(z,\, z', \ldots ,\, z^{(n-k)}) = 0\,(1 \le k < n).$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения

$$2yy'' = y'^2 + y^2. \tag{1.19}$$

Решение. Положим $y'_x = z(y)$ и, приняв y за новую переменную, получим $y''_{xx} = z'_y y'_x = z'_y z$. Тогда уравнение (1.19) можно записать в виде

$$2yz\frac{dz}{dy} = z^2 + y^2.$$

Полагая $z^2 = u$ и учитывая, что $2z\frac{dz}{dy} = \frac{dz^2}{dy}$, получим

$$yu'_y = u + y^2.$$

Получили линейное уравнение. Решаем его:

$$u = C_1 y + y^2.$$

Следовательно, $z^2 = C_1 y + y^2$, $y'^2 = C_1 y + y^2$, откуда

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1 y + y^2}} = \pm dx \Rightarrow \ln|y + C_1/2 + \sqrt{C_1 y + y^2}| = \pm x + C_2.$$

Потерянное решение:

$$y = 0.$$

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$yy'' + 1 = y'^2. \tag{1.20}$$

Решение. Положим $y'_x = z(y)$, получим $y''_{xx} = z'_y y'_x = z'_y z$. Тогда из (1.20) следует

$$yzz'_y = z^2 - 1 \Rightarrow z^2 - 1 = Cy^2 \Rightarrow y' = \pm\sqrt{Cy^2 - 1}.$$

Здесь возникает три возможности:

1. $C=0$. В этом случае $dy=\pm x \Rightarrow y=A\pm x$;

2. $C<0$, $C=-C_1^2$. Отсюда

$$\frac{dy}{\sqrt{1-(C_1y)^2}}=\pm dx \Rightarrow C_1y=\sin(C_0+C_1x);$$

3. $C>0$, $C=C_1^2$. Отсюда

$$\frac{dy}{\sqrt{1+(C_1y)^2}}=\pm dx \Rightarrow C_1y=\pm\operatorname{sh}(C_0+C_1x).$$

Рассмотрим некоторые частные случаи вида уравнения (1.18).

1.4 Уравнения вида $F(y^{(n-1)}, y^{(n)})=0$

Уравнения, разрешенные относительно $y^{(n)}$

Рассмотрим уравнение вида $y^{(n)}$:

$$y^{(n)}=f(y^{(n-1)}). \tag{1.21}$$

Делаем замену $y^{(n-1)}=z(x)$, получаем уравнение

$$z'_x=f(z) \quad \text{или} \quad \frac{dz}{f(z)}=dx \tag{1.22}$$

Интегрируем

$$\int\frac{dz}{f(z)}=x+C_1. \tag{1.23}$$

Если возможно, полученное решение (1.23) разрешаем относительно z: $z=\omega(x, C)$. Делаем обратную замену: $y^{(n-1)}=\omega(x,C)$. Этот тип уравнения был рассмотрен выше.

Если разрешить уравнение (1.23) относительно z нельзя, то поступаем следующим образом. Принимаем z за новую независимую переменную:

$$\begin{cases} dy^{(n-2)}=y^{(n-1)}dx=\frac{zdz}{f(z)}, \\ y^{(n-2)}=\int\frac{zdz}{f(z)}=\varphi_2(z, C_2), \\ dy^{(n-3)}=y^{(n-2)}dx=\frac{\varphi_2(z,C_2)dz}{f(z)}, \\ y^{(n-3)}=\int\frac{\varphi_2(z,C_2)dz}{f(z)}=\varphi_3(z, C_2, C_3), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y=\varphi_n(z, C_2,\dots, C_n). \end{cases} \tag{1.24}$$

В результате получаем решение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} \int \frac{dz}{f(z)} = x + C_1, \\ y = \varphi_n(z, C_2, \ldots, C_n). \end{cases}$$

Пример 7. Найти общее решение уравнения

$$y'''(3y''^2 + 2y'') = 1. \tag{1.25}$$

Решение. Разрешаем уравнение (1.25) относительно y''' и делаем замену $y'' = z$:

$$y''' = \frac{1}{3y''^2 + 2y''}, \quad z' = \frac{1}{3z^2 + 2z}.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$(3z^2 + 2z)dz = dx,$$

$$x = z^3 + z^2 + C_1. \tag{1.26}$$

Проводим цепь расчетов по формуле (1.24):

$$dy' = y''dx = z(3z^2 + 2z)dz,$$
$$y' = \int z(3z^2 + 2z)dz = \frac{3z^4}{4} + \frac{2z^3}{3} + C_2,$$
$$dy = y'dx = \left(\frac{3z^4}{4} + \frac{2z^3}{3} + C_2\right)(3z^2 + 2z)dz,$$
$$y = \int \left(\frac{3z^4}{4} + \frac{2z^3}{3} + C_2\right)(3z^2 + 2z)dz = \frac{9z^7}{28} + \frac{7z^6}{12} + \frac{4z^5}{15} + C_2(z^3 + z^2) + C_3.$$

Получаем решение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = z^3 + z^2 + C_1, \\ y = \frac{9z^7}{28} + \frac{7z^6}{12} + \frac{4z^5}{15} + C_2(z^3 + z^2) + C_3. \end{cases}$$

Уравнения, разрешенные относительно $y^{(n-1)}$

Рассмотрим уравнение вида

$$y^{(n-1)} = f(y^{(n)}). \tag{1.27}$$

Делаем замену $y^{(n-1)} = z(x)$, получаем уравнение

$$z = f(z'_x). \tag{1.28}$$

Введем параметр $z' = \frac{dz}{dx} = p$, откуда $dz = pdx$, $z = f(p)$. Дифференцируем последнее выражение по $p : dz = f'(p)dp = pdx$. Отсюда

$$dx = \frac{f'(p)dp}{p} \Rightarrow x = \int \frac{f'(p)dp}{p} + C_1. \tag{1.29}$$

Уравнение (1.28) можно переписать как

$$y^{(n-1)} = f(p). \tag{1.30}$$

Учитывая уравнения (1.29) и (1.30), применим цепь расчетов по формуле (1.24) (вместо параметра z фигурирует параметр p). В результате получаем решение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \int \frac{f'(p)dp}{p} + C_1, \\ y = \varphi_n(p, C_2, \ldots, C_n). \end{cases}$$

Уравнения, допускающие параметрическое представление

Пусть данный тип уравнения допускает параметрическое представление:

$$y^{(n-1)} = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t).$$

Принимая во внимание $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$, получим

$$dx = \frac{y^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}, \quad x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + C_1.$$

По формуле (1.24) находим решение в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + C_1, \\ y = \phi(t, C_2, \ldots, C_n). \end{cases}$$

1.5 Уравнения вида $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$

Уравнения, разрешенные относительно $y^{(n)}$

Рассмотрим уравнение вида

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)}).$$

Делаем замену $y^{(n-2)} = z(x)$, получаем уравнение

$$z''_{xx} = f(z). \tag{1.31}$$

Расписываем $z'' = \dfrac{dz'}{dx}$, умножаем обе части уравнения (1.31) на $2z'dx$ и, имея в виду, что $z'dx = dz$, получим

$$2z'dz' = 2f(z)dz.$$

Интегрируем:

$$z'^2 = \int 2f(z)dz + C_1.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\int 2f(z)dz + C_1}, \quad x = \int \frac{dz}{\sqrt{\int 2f(z)dz + C_1}} + C_2 \tag{1.32}$$

Далее можно получить решение в параметрической форме, либо уравнение (1.32) свести к уравнению вида $y^{(n-2)} = \omega(x, C_1, C_2)$.

Уравнения, разрешенные относительно $y^{(n-2)}$

Рассмотрим уравнение вида

$$y^{(n-2)} = f(y^{(n)}).$$

Делаем замену $y^{(n-2)} = z(x)$, получаем уравнение

$$z = f(z''_{xx}). \tag{1.33}$$

Положим $z'' = u$: $z = f(u)$. Отсюда

$$dz = f'_u du. \tag{1.34}$$

С другой стороны,

$$dz'^2 = 2z'dz' = 2z'z''dx = 2z''dz = 2udz = 2uf'_u du. \tag{1.35}$$

Интегрируем

$$z' = \sqrt{\int 2uf'_u du + C_1}, \quad dx = \frac{dz}{\sqrt{\int 2uf'_u du + C_1}}.$$

Подставляем формулу (1.34) и интегрируем

$$x = \int \frac{f'_u du}{\sqrt{\int 2uf'_u du + C_1}} + C_2. \tag{1.36}$$

Далее можно получить решение в параметрической форме, либо уравнение (1.36) свести к уравнению вида $y^{(n-2)} = \omega(x, C_1, C_2)$.

1.6 Уравнения, однородные относительно искомой функции и ее производных

Определение 1.1. Уравнение

$$F(x,\, y,\, y',\ldots,\, y^{(n)}) = 0 \tag{1.37}$$

называется однородным относительно искомой функции и ее производных, если при замене $y \to ky$, $y' \to ky'$, ... , $y^{(n)} \to ky^{(n)}$ выполняется условие

$$F(x,\, ky,\, ky',\ldots,\, ky^{(n)}) = k^m F(x,\, y,\, y',\ldots,\, y^{(n)}).$$

Уравнение (1.37) понижается на единицу, если положить

$$y' = yz, \tag{1.38}$$

где z - новая неизвестная функция: $z = z(x)$.

Дифференцируем последовательно формулу (1.38) и заменяем каждый раз y' на yz:

$$\begin{cases} y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z'), \\ y''' = y(z^3 + 3zz' + z''), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n)} = y\omega(z,\, z',\ldots,\, z^{(n-1)}). \end{cases}$$

Подставляем выражение для $y',\, y'',\ldots,\, y^{(n)}$ в уравнение (1.37):

$$F(x,\, y,\, yz, y(z^2 + z'),\ldots,\, y\omega(z,\, z',\ldots,\, z^{(n-1)})) = 0.$$

Это уравнение вследствие предположения однородности функции F можно записать так:

$$y^m F(x,\, 1,\, z, (z^2 + z'),\ldots,\, \omega(z,\, z',\ldots,\, z^{(n-1)})) = 0.$$

Делим на y^m (при этом потери решения $y = 0$ не происходит), получаем

$$F(x,\, 1,\, z, (z^2 + z'),\ldots,\, \omega(z,\, z',\ldots,\, z^{(n-1)})) = 0.$$

Это уравнение $(n-1)$ - го порядка. Если мы найдем его общее решение

$$z = \varphi(x,\, C_1,\, C_2,\ldots,\, C_{n-1}),$$

то, заменив z на y'/y, получим

$$y'/y = \varphi(x,\, C_1,\, C_2,\ldots,\, C_{n-1}).$$

Интегрируем

$$y = C_n exp\left(\int \varphi(x,\, C_1,\, C_2,\ldots,\, C_{n-1}) dx\right).$$

Это *общее решение* уравнения (1.37).

Пример 8. Найти общее решение уравнения

$$xyy'' - xy'^2 - yy' = 0. \tag{1.39}$$

Решение. Проверим, является ли это уравнение однородным. Делаем замену $y \to ky\,, y' \to ky'\,, y'' \to ky$ в уравнении (1.39):

$$k^2yy'' - k^2xy'^2 - k^2yy' = 0.$$

Делим уравнение на k^2, получаем исходное уравнение

$$xyy'' - xy'^2 - yy' = 0.$$

Уравнение однородно.

Полагая $y' = yz$, получаем $y'' = y(z^2 + z')$. Подставляя выражения для y' и y'' в уравнение (1.39) и сокращая на y^2, получаем

$$x(z^2 + z') - xz^2 - z = 0 \quad \text{или} \quad xz' - z = 0.$$

Интегрируем последнее уравнение $z = C_1x$. Заменим z на y'/y: $y'/y = C_1$. Интегрируем еще раз, получаем

$$y = C_2e^{(C_1/2)x^2}.$$

1.7 Обобщенно-однородные уравнения

Определение 1.2. Уравнение

$$F(x,\, y,\, y' \ldots,\, y^{(n)}) = 0, \tag{1.40}$$

называется обобщенно-однородным, если при замене

$$x \to kx\,, y \to k^m y\,, y' \to k^{m-1}y'\,, \ldots,\, y^{(n)} \to k^{m-n}y^{(n)} \tag{1.41}$$

выполняется условие

$$F(kx,\, k^my,\, k^{m-1}y', \ldots,\, k^{m-n}y^{(n)}) = k^sF(x,\, y,\, y', \ldots,\, y^{(n)}).$$

Чтобы найти число m, надо приравнять друг к другу показатели степеней, в которых число k будет входить в каждый член уравнения после замены (1.41).

После того, как число m найдено, надо сделать замену

$$x = e^t,\, y = ze^{mt}, \tag{1.42}$$

где t – новая независимая переменная и z – новая неизвестная функция. Так как $\frac{d}{dx} = e^{-t}\frac{d}{dt}$, то производные y'_x, $y''_x \ldots$, $y_x^{(n)}$ преобразуются следующим образом:

$$\left\{\begin{array}{l} y'_x = \frac{dy}{dt}e^{-t} = \left(\frac{dz}{dt}e^{mt} + mze^{mt}\right) = \left(\frac{dz}{dt} + mz\right)e^{mt}, \\ y''_x = \frac{dy'}{dt}e^{-t} = \left(\frac{d^2z}{dt^2} + (2m-1)\frac{dz}{dt} + m(m-1)z\right)e^{(m-2)t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_x^{(n)} = \omega\left(z,\, \frac{dz}{dt}, \ldots,\, \frac{d^nz}{dt^n}\right)e^{(m-n)t}. \end{array}\right. \tag{1.43}$$

Выполнив теперь в уравнение (1.40) подстановку (1.42) и сделав замену по формуле (1.43), получим уравнение, которое после сокращения на e^{mt} обратится в уравнение, не содержащее t. Это уравнение допускает понижение порядка на единицу.

Если в уравнении (1.40) $x < 0$, то следует положить $x = -e^t$.

Пример 9. Найти общее решение уравнения

$$x^4y'' + (xy' - y)^3 = 0. \tag{1.44}$$

Решение. Покажем, что это уравнение обобщенно-однородное, т.е найдем число m. Приравниваем измерения всех членов, считая, что x, y, y', y'' соответствуют 1, m, $(m-1)$ и $(m-2)$ измерения, тогда $4 + m - 2 = 3(1 + m - 1) = 3m$, откуда $m = 1$. Теперь делаем подстановку $x = e^t$, $y = ze^t$. Так как

$$\left\{\begin{array}{l} y' = \frac{dy}{dt}e^{-t} = \left(\frac{dz}{dt} + z\right), \\ y'' = \frac{dy'}{dt}e^{-t} = \left(\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\right)e^{-t}, \end{array}\right.$$

то уравнение (1.44) примет вид

$$e^{4t}\left(\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\right)e^{-t} + \left(e^t\left(\frac{dz}{dt} + z\right) - ze^t\right)^3 = 0 \Rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} + \left(\frac{dz}{dt}\right)^3 = 0.$$

Положим здесь $\frac{dz}{dt} = u(z)$ и z за независимую переменную. Тогда

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{du}{dz}u.$$

Поэтому уравнение перепишется так:

$$\frac{du}{dz}u + u + u^3 = 0 \Rightarrow \frac{du}{dz} + 1 + u^2 = 0.$$

Интегрируем $u = \operatorname{tg}(C_1 - z)$. Заменим u на $\frac{dz}{dt}$:

$$\frac{dz}{dt} = \operatorname{tg}(C_1 - z) \Rightarrow \frac{dz}{-\operatorname{tg}(z - C_1)} = dt \Rightarrow \ln|\sin(z - C_1)| = -t + \ln|C_2|.$$

Возвращаемся к переменным x и y:

$$\ln|\sin(y/x - C_1)| = -\ln x + \ln|C_2| \Rightarrow y = x(C_1 + \arcsin(C_2/x)).$$

1.8 Метод интегрируемых комбинаций

Определение 1.3. Если в уравнении

$$F(x,\, y,\, y',\dots,\, y^{(n)}) = 0 \tag{1.45}$$

левая часть является точной производной от некоторой функции $\Phi(x,\, y,\, y',\dots,\, y^{(n-1)})$, т.е.

$$F(x,\, y,\, y',\dots,\, y^{(n-1)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x,\, y,\, y',\dots,\, y^{(n-1)}),$$

то

$$\Phi(x,\, y,\, y',\dots,\, y^{(n-1)}) = C_1 \tag{1.46}$$

будет *первым интегралом* уравнения (1.45). Может случится, что уравнение (1.46), в свою очередь, является уравнением в точных производных. Тогда мы найдем *второй интеграл* уравнения (1.45).

Если уравнение (1.45) не является уравнением в точных производных, то нужно попытаться подобрать такую функцию $\mu = \mu(x,\, y,\, y',\dots,\, y^{(n-1)})$ - *интегрирующий множитель* уравнения (1.45), чтобы после умножения на нее уравнение (1.45) стало уравнением в точных производных.

Пример 10. Найти общее решение уравнения

$$\frac{y''}{y'} - \frac{2yy'}{1+y^2} = 0. \tag{1.47}$$

Решение. Так как в левой части у каждой из дробей в числителе стоит производная от знаменателя, то мы имеем

$$\frac{y''}{y'} - \frac{2yy'}{1+y^2} = (\ln|y'| - \ln(1+y^2))',$$

т.е. уравнение (1.47) является уравнением в точных производных. Оно имеет первый интеграл

$$\ln|y'| - \ln(1+y^2) = \ln|C_1| \quad \text{или} \quad y' = A(1+y^2), \quad A = \pm C_1.$$

Интегрируя еще раз, находим

$$\operatorname{arctg} y = Ax + B.$$

Это общий интеграл уравнения (1.47).

Пример 11. Найти общее решение уравнения

$$yy'' = y'^2. \tag{1.48}$$

Решение. Это уравнение не является уравнением в точных производных, но, умножив обе его части на функцию $\mu = 1/(yy')$, получим уравнение в точных производных

$$y''/y' = y'/y.$$

Его первым интегралом будет $y' = C_1 y$, откуда

$$y = C_2 e^{C_1 x}.$$

Найти решения уравнений:

1. $y'' = xe^x, y(1) = 1, y'(1) = 2.$

2. $x^3 y^{IV} = 1$; $y = 2x(\ln x - 1) + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$

3. $x = e^{-y''} + y''.$

4. $x - \sin y'' + 2y'' = 0.$

5.$y''' \operatorname{tg} 3x = 3y''.$

6. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 2x.$

7. $x^4 y'' + x^3 y' = 1.$

8. $y'' = 2yy'.$

9. $y^3 y'' = 1.$

10. $y'' = 8\sin^3 y \cos y, y(1) = \pi/2, y'(1) = 2.$

11. $y^3 y'' = 4(y^4 - 1), y(0) = \sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}.$

12. $y''' + y''^3 = 0.$

13. $y''^2 - 3y' + 2 = 0.$

14. $y'''^2 + y''^2 = 1.$

15. $yy' = \sqrt{y^2 + y'^2}\, y'' - y'y''.$

16. $x^2 y'' y - (x^2 + 1)y'^2 = 0.$

17. $x^2 yy'' = (y - xy')^2.$

18. $yy' + xyy'' - xy'^2 = x^3.$

19. $y'' = \left(2xy - \frac{5}{x}\right) y' + 4y^2 - \frac{4y}{x^2}.$

20. $y'' = y'^2 y.$

21. $(1 + y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0.$

22. $y'' + y' \cos x - y \sin x = 0.$

Ответы:

1. $y = e^x(x - 2) + 2x + e - 1.$

2. $y = 2x(\ln x - 1) + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$

3. $\begin{cases} x = e^{-t} + t, \\ y = \left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\right) e^{-2t} + \left(\frac{t^2}{2} - 1 + C_1\right) e^{-t} + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \sin t - 2t, \\ y = \frac{3}{8}\sin 2t - \frac{t}{4}\cos 2t + (C_1 - 2 - t^2)\sin t + \left(-2C_1 + \frac{1}{2}\right)t + \frac{2t^3}{3} + C_2. \end{cases}$

5. $y = -\frac{C_0}{9}\sin 3x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3.$

6. $y = x + C_0 \operatorname{arctg} x + C_1.$

7. $y = \frac{1}{4x^2} + C_0 \ln x + C_1.$

8. $\ln \frac{y - C_1}{y + C_2} = 2C_1 x + C_2.$

9. $\sqrt{C_0^2 y^2 - 1} = \pm C_0^2 x + C_1.$

10. $\operatorname{ctg} y = 2(1 - x).$

11. $y^2 - 1 = e^{4x}.$

12. $y = t^{-3}/3 + C_1 t^{-2}/2 + C_3, \quad x = t^{-2}/2 + C_1.$

13. $y = \frac{2}{3}x + C,$ $\begin{cases} x = \frac{2}{3}p + C_1, \\ y = \frac{2p^3}{27} + \frac{4}{9}p + C_0. \end{cases}$

14. $y = \sin(x + C_1) + C_2 x + C_3.$

15. $y = \frac{C_1(1 + C_2 e^x)}{1 - C_2 e^x}$, $y = C.$

16. $\ln y = x/C_1 - \frac{\ln|1 + C_1 x|}{C_1^2} + C_2$, $y = C_0 e^{x^2/2}.$

17. $y = C_2 x e^{-C_1/x}.$

18. $2C_1 C_2 y = C_2^2 |x|^{2+C_1} + |x|^{2-C_1}.$

19. $x^2 y = C_1 \operatorname{tg}(C_1 \ln C_2 x)$, $C_2(x^2 y + C_1)|x|^{2C_1} = x^2 y - C_1.$

20. $\int e^{-y^2/2} dy = C_1 x + C_2.$

21. $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = C_3^2.$

22. $y = e^{-\sin x}\left(C_2 + C_1 \int e^{\sin x} dx\right).$

Глава 2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

2.1 Однородные уравнения. Метод Эйлера

Определение 2.1. Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{2.1}$$

где a_1, $a_2, \ldots, a_n$ - постоянные вещественные числа, называется линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами.

Это уравнение имеет фундаментальную систему решений y_1, $y_2, \ldots, y_n$, определенную при всех x и состоящую из степенных, показательных и тригонометрических функций. Ей соответствует общее решение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n.$$

Чтобы решить уравнение (2.1), надо составить *характеристическое уравнение*

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \tag{2.2}$$

и найти его корни - *характеристические числа* уравнения (2.2).

Структура фундаментальной системы уравнений зависит от вида характеристических чисел уравнения (2.2). Различают три случая.

1. *Все корни характеристического уравнения различны и вещественны.* Обозначим их через λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тогда фундаментальной системой решений будет $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots$, $y_n = e^{\lambda_n x}$, а общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

2. *Все корни характеристического уравнения различны, но среди них имеются комплексные.* Пусть $\lambda_1 = a + bi$ - комплексный корень характеристического уравнения. Тогда

$\lambda_2 = a - bi$ тоже будет корнем этого уравнения. Этим двум корням соответствуют два линейно независимых частных решения:

$$y_1 = e^{ax}\cos bx, \quad y_2 = e^{ax}\sin bx.$$

Записав линейно независимые частные решения, соответствующие другим сопряженным парам комплексных корней и всем вещественным корням, получим фундаментальную систему решений. Линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами даст общее решение уравнения (2.1). При этом корням $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ в формуле общего решения соответствует выражение вида

$$e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx).$$

3. *Среди корней характеристического уравнения имеются кратные.* Пусть λ_1 - вещественный k - кратный корень. Тогда ему соответствует k линейно независимых частных решений вида $e^{\lambda_1 x}$, $xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$, в формуле общего решения - выражение вида $e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1})$.

Если $\lambda_1 = a+bi$ - комплексный корень характеристического уравнения кратности k, то ему и сопряженному с ним корню $\lambda_2 = a - bi$ той же кратности соответствует $2k$ линейно независимых частных решения вида

$$\left\{\begin{array}{l} e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{ax}\cos bx, \\ e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{ax}\sin bx. \end{array}\right.$$

В формуле общего решения этим корням соответствует выражение вида

$$e^{ax}((C_1 + C_2x + \ldots + C_k x^{k-1})\cos bx + (C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1})\sin bx).$$

Записав линейно независимые частные решения указанного выше вида, соответствующие всем простым и кратным вещественным корням, а также сопряженным парам простых и кратных комплексных корней, получим фундаментальную систему решений.

Линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами даст общее решение уравнения (2.1).

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 3y'' + 2y' = 0. \tag{2.3}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

имеет различные вещественные корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, поэтому совокупность функций $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{2x}$ будет фундаментальной системой решений, а

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$$

является общим решением уравнения (2.3).

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0. \tag{2.4}$$

Решение. Его характеристическим уравнением будет

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 13 = 0.$$

Разлагаем левую часть на множители:

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 13) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0.$$

Найдем корни уравнения $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$. Здесь $a = 1$, $b = 4$ и $c = 13$. Дискриминант $D = b^2 - 4ac = -36$, корни $\lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = -2 + \sqrt{-36}/2 = -2 + 3\sqrt{-1} = -2 + 3i$ и $\lambda_3 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = -2 - \sqrt{-36}/2 = -2 - 3i$.

Таким образом, характеристическое уравнение имеет один вещественный корень $\lambda_1 = 1$ и два комплексно-сопряженных корня $\lambda_2 = -2+3i$, $\lambda_3 = -2-3i$. Поэтому функции $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-2x}\cos 3x$, $y_3 = e^{-2x}\sin 3x$ образуют фундаментальную систему решений, а

$$y = C_1 e^x + e^{-2x}(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x)$$

является общим решением уравнения (2.4).

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

Разлагаем левую часть на множители:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0,$$

отсюда характеристические корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Один корень простой, другой – двукратный. Поэтому $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = xe^{2x}$. Общее решение

$$y = C_1 e^x + e^{2x}(C_2 + C_3 x).$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0.$$

Разлагаем левую часть на множители:

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 + i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1 - i$ – это случай двукратных комплексно-сопряженных корней. Поэтому

$$\begin{cases} y_1 = e^{-x}\cos x,\ y_2 = xe^{-x}\cos x, \\ y_3 = e^{-x}\sin x,\ y_3 = xe^{-x}\sin x \end{cases}$$

и

$$y = e^{-x}((C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x).$$

Пример 5. Найти решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$\begin{cases} y(2) = 1, \\ y'(2) = -2. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Разлагаем левую часть на множители:

$$(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Уравнение имеет один вещественный корень $\lambda = 1$ кратности $k = 2$. Поэтому общее решение имеет вид

$$y = (C_1 + C_2x)e^x.$$

Подставив в общее решение поочередно начальные условия, получим систему уравнений на C_1 и C_2:

$$\begin{cases} (C_1 + 2C_2)e^2 = 1, \\ (C_1 + C_2 + 2C_2)e^2 = -2 \end{cases}$$

Решаем систему $C_1 = 7e^{-2}$, $C_2 = -3e^{-2}$. Подставляем значения C_1 и C_2 в общее решение и получаем искомое

$$y = (7 - 3x)e^{x-2}.$$

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$y^{IV} + 16y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda = (-16)^{1/4}.$$

Извлечем степень $1/4$ из числа -16. Для этого сначала запишем число -16 в тригонометрической форме, используя формулу перехода

$$z = x + iy = r[\cos(\varphi + 2\pi n) + i\sin(\varphi + 2\pi n)],$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad x < 0, \quad y \geq 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad x < 0, \quad y < 0; \\ \pi/2, \quad x = 0, \quad y > 0; \\ -\pi/2, \quad x = 0, \quad y < 0; \end{cases}$$

и формулу

$$\omega_n = r^{1/k}\left[\cos\frac{\varphi + 2\pi n}{k} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi n}{k}\right], \quad n = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Отсюда найдем

$$-16 = 16[\cos(\pi + 2\pi n) + i\sin(\pi + 2\pi n)];$$

$$\lambda_n = \{(-16)^{1/4}\}_n = 2\left[\cos\frac{\pi + 2\pi n}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi n}{4}\right], \quad n = 0, 1, 2, 3. \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} n = 0: &\quad \lambda_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \\ n = 1: &\quad \lambda_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \\ n = 2: &\quad \lambda_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \\ n = 3: &\quad \lambda_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Паре комплексно сопряженных чисел λ_0 и λ_3 соответствуют два частных решения:

$$y_1 = e^{\sqrt{2}x}\sin\sqrt{2}x, \quad y_2 = e^{\sqrt{2}x}\cos\sqrt{2}x.$$

Для λ_1 и λ_2

$$y_3 = e^{-\sqrt{2}x}\sin\sqrt{2}x, \quad y_4 = e^{-\sqrt{2}x}\cos\sqrt{2}x.$$

Общее решение

$$y = C_1e^{\sqrt{2}x}\sin\sqrt{2}x + C_2e^{\sqrt{2}x}\cos\sqrt{2}x + C_3e^{-\sqrt{2}x}\sin\sqrt{2}x + C_4e^{-\sqrt{2}x}\cos\sqrt{2}x.$$

Найти решения уравнений:

23. $y'' - 6y' + 8y = 0.$

24. $y'' - 16y = 0.$

25. $y'' - y' - 2y = 0.$

26. $y'' + y' = 0.$

27. $y'' - y' + y = 0.$

28. $y'' + 2y' + 2y = 0.$

29. $y'' + \pi^2 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

30. $y'' + 4y' + 4y = 0.$

31. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0.$

32. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0.$

33. $y''' + 8y = 0.$

34. $y^{IV} - y = 0.$

Ответы: 23. $y = C_1e^{4x} + C_2e^{2x}$. **24.** $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{4x}$. **25.** $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$. **26.** $y = C_1 + C_2e^{-x}$. **27.** $y = e^{x/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. **28.** $y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$. **29.** $y = -\frac{1}{\pi}\sin\pi x$. **30.** $y = e^{-2x}(C_1 + C_2x)$. **31.** $y = e^{-x}(C_1 + C_2x) + C_3 + C_4x$. **32.** $y = (C_1 + C_2x)\cos 2x + (C_3 + C_4x)\sin 2x$. **33.** $y = e^{x}\left(C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\sin\sqrt{3}x\right) + C_3e^{-2x}$. **34.** $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$.

2.2 Неоднородные уравнения

Неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x) \tag{2.5}$$

решается в два этапа. На первом этапе находится общее решение y_0 соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0.$$

На втором этапе находится частное решение y_1 уравнения (2.5). Сумма

$$y = y_0 + y_1$$

есть общее решение уравнения (2.5). Здесь будет рассмотрено два метода нахождения частного решения неоднородного уравнения – метод неопределенных коэффициентов и метод вариации постоянных.

Метод неопределенных коэффициентов

Этот метод можно использовать в следующих случаях:

1. $f(x) = P(x)$, где $P(x)$ - полином от x. Данной функции соответствует число $\gamma = 0$. Если число $\gamma = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (2.5) можно найти в виде $y_1 = Q(x)$, где $Q(x)$ - полином той же степени, что и $P(x)$, но с неопределенными коэффициентами. Если число γ является корнем характеристического уравнения кратности k, то $y_1 = x^k Q(x)$;

2. $f(x) = P(x)e^{ax}$. Функции этого вида соответствует число $\gamma = a$. Если число $\gamma = a$ не является корнем характеристического уравнения, то $y_1 = Q(x)e^{ax}$. Если γ есть корень характеристического уравнения кратности k, то $y_1 = x^k Q(x)$;

3. $f(x) = e^{ax}(P_1(x)\cos bx + P_2(x)\sin bx)$, $P_1(x)$ и $P_2(x)$ - полиномы от x. Соответствующие числа — $\gamma = a \pm ib$. Пусть m есть наивысшая из степеней полиномов $P_1(x)$ и $P_2(x)$. Если число γ не является корнем характеристического уравнения, то

$$y_1 = e^{ax}(Q_1(x)\cos bx + Q_2(x)\sin bx),$$

где $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ - полиномы степени m с неопределенными коэффициентами. Если γ есть корень характеристического уравнения кратности k, то

$$y_1 = x^k e^{ax}(Q_1(x)\cos bx + Q_2(x)\sin bx);$$

4. $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x)$, где $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_m(x)$ - функции вида, рассмотренного в пп. $1-3$. Если $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_m(x)$ - частные решения, соответствующие функциям $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_m(x)$, то

$$Y_1 = y_1(x) + y_2(x) + \ldots + y_m(x)$$

является частным решением всего уравнения (2.5).

Примеры соответствия:

$x^2 + x - 1 \to \gamma = 0$;

$(x^3 + x)e^{2x} \to \gamma = 2$;

$(x + 2)\cos 3x \to \gamma = \pm 3i$; $5\cos 3x - 4\sin 3x \to \gamma = \pm 3i$;

$e^x(5\cos 2x - 4\sin 2x) \to \gamma = 1 \pm 2i;$

$e^x + x^2 - x \to \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 0;$

$e^x + xe^{-x} \to \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = -1;$

$e^x \sin x + e^{-x}\cos x \to \gamma_1 = 1 \pm i, \quad \gamma_2 = -1 \pm i;$

$\sin 2x + \cos 3x \to \gamma_1 = \pm 2i, \quad \gamma_2 = \pm 3i;$

Пример 7. Найти общее решение уравнения

$$y'' - y = x^2. \tag{2.6}$$

Решение. Соответствующим однородным уравнением будет

$$y'' - y = 0. \tag{2.7}$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 1 = 0 \tag{2.8}$$

имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Поэтому

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \tag{2.9}$$

Найдем частное решение уравнения (2.6). Правой части уравнения (2.6) соответствует число $\gamma = 0$, которое не является корнем характеристического уравнения (2.8). Следовательно, ищем частное решение в виде

$$y_1 = Ax^2 + Bx + C.$$

Подставляем y_1'' и y_1 в уравнение (2.8), имеем

$$2A - Ax^2 - Bx - C = x^2.$$

Приравниваем коэффициенты при подобных степенях и получаем систему уравнений на A, B и C:

$$\begin{aligned} &\text{при } x^0\text{:} \quad 2A - C = 0, \\ &\text{при } x\text{:} \quad -B = 0, \\ &\text{при } x^2\text{:} \quad -A = 1. \end{aligned}$$

Отсюда $A = -1$, $B = 0$, $C = -2$. Частное решение –

$$y_1 = -x^2 - 2. \tag{2.10}$$

Прибавляя к этому частному решению общее решение (2.9) уравнения (2.7), получаем общее решение уравнения (2.6):

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 - 2.$$

Пример 8. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = 4xe^x. \tag{2.11}$$

Решение. Соответствующим однородным уравнением будет

$$y'' + y = 0. \tag{2.12}$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 1 = 0 \tag{2.13}$$

имеет корни $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Поэтому

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \tag{2.14}$$

Найдем частное решение уравнения (2.11). Функции $4xe^x$ соответствует число $\gamma = 1$, которое не является корнем характеристического уравнения (2.13), значит частное решение ищем в виде

$$y_1 = e^x(Ax + B). \tag{2.15}$$

Подставляем y_1 и y_1'' в уравнение (2.11), получаем

$$e^x(2Ax + 2A + 2B) = 4xe^x.$$

Приравниваем коэффициенты при подобных степенях и получаем систему уравнений на A и B:

$$\begin{aligned} &\text{при } x^0: \quad 2A + 2B = 0, \\ &\text{при } x: \quad 2A = 4. \end{aligned}$$

Отсюда $A = 2$, $B = -2$. Частное решение –

$$y_1 = (2x - 2)e^x.$$

Общее решение уравнения (2.11) –

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (2x - 2)e^x.$$

Пример 9. Найти общее решение уравнения

$$y'' - y' = e^x + e^{2x} + x. \tag{2.16}$$

Решение. Соответствующим однородным уравнением будет

$$y'' - y' = 0. \tag{2.17}$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \tag{2.18}$$

имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Поэтому

$$y_0 = C_1 + C_2 e^x. \tag{2.19}$$

Найдем частное решение уравнения (2.16). Для этого отыщем сначала частные решения для каждого из трех уравнений:

$$y'' - y' = e^x, \quad y'' - y' = e^{2x}, \quad y'' - y' = x.$$

Рассмотрим уравнение

$$y'' - y' = e^x \tag{2.20}$$

Функции e^x соответствует число $\gamma = 1$, которое является корнем характеристического уравнения кратности 1, следовательно, частное решение ищем в виде

$$y_1 = Axe^x. \tag{2.21}$$

Подставляем функцию (2.21) в уравнение (2.20), получаем $Ae^x = e^x$. Отсюда $A = 1$. Следовательно,

$$y_1 = xe^x. \tag{2.22}$$

Уравнение

$$y'' - y' = e^{2x} \tag{2.23}$$

имеет частное решение вида

$$y_2 = Ae^{2x}, \tag{2.24}$$

ибо число $\gamma = 2$ не является корнем характеристического уравнения. Подставив функцию (2.24) в уравнение (2.23), найдем $A = 1/2$, так что

$$y_2 = \frac{1}{2}e^{2x}. \tag{2.25}$$

Уравнение

$$y'' - y' = x \tag{2.26}$$

имеет частное решение вида

$$y_3 = x(Ax + B), \tag{2.27}$$

так как число $\gamma = 0$ является простым корнем характеристического уравнения. Подставляя функцию (2.27) в уравнение (2.26), имеем:

$$-2Ax - B + 2A = x \Rightarrow -2A = 1, \quad -B + 2A = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, \quad B = -1,$$

следовательно,

$$y_3 = -x\left(\frac{1}{2}x + 1\right). \tag{2.28}$$

Теперь, складывая частные решения (2.22), (2.25) и (2.28), находим частное решение Y_1 всего уравнения (2.16) в виде

$$Y_1 = xe^x + \frac{1}{2}e^{2x} - x\left(\frac{1}{2}x + 1\right).$$

Прибавляя к этому частному решению общее решение (2.19) уравнения (2.17), получаем общее решение уравнения (2.16):

$$y = xe^x + \frac{1}{2}e^{2x} - x\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + C_1 + C_2e^x.$$

Пример 10. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = \sin x + e^x \cos 2x. \tag{2.29}$$

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + y = 0; \quad \lambda^2 + 1 = 0; \quad \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i;$$

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Найдем частное решение для уравнения

$$y'' + y = \sin x. \tag{2.30}$$

Так как функции $\sin x$ соответствует число $\gamma = \pm i$, которое является корнем характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде

$$y_1 = x(A\cos x + B\sin x). \tag{2.31}$$

Подставляем функцию (2.31) в уравнение (2.30):

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \sin x.$$

Приравниваем коэффициенты при подобных функциях и получаем систему уравнений на A и B:

$$\begin{aligned} &\text{при } \cos x\text{:} \quad 2B = 0, \\ &\text{при } \sin x\text{:} \quad -2A = 1. \end{aligned}$$

Отсюда $A = -1/2$, $B = 0$. Частное решение

$$y_1 = -\frac{1}{2}x\cos x.$$

Для уравнения

$$y'' + y = e^x \cos 2x \tag{2.32}$$

имеем частное решение

$$y_2 = e^x (A \cos 2x + B \sin 2x), \tag{2.33}$$

ибо здесь число $\gamma = 1 \pm i \cdot 2$ не является корнем характеристического уравнения.

Подставив функцию (2.33) в уравнение (2.32), найдем $A = -1/10$, $B = 1/5$, так что

$$y_2 = e^x \left(-\frac{1}{10} \cos 2x + \frac{1}{5} \sin 2x \right).$$

Теперь мы можем записать общее решение уравнение (2.29) в виде

$$y = -\frac{1}{2} x \cos x + e^x \left(-\frac{1}{10} \cos 2x + \frac{1}{5} \sin 2x \right) + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Найти решения уравнений:

36. $y'' - 4y' + 4y = x^2$.

37. $y''' + y'' = 10 - 24x$.

38. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \dfrac{1}{9} e^{2x}$.

39. $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$.

40. $y'' - 7y' + 12y = e^{2x}(1 - 2x)$.

41. $y'' + 9y = 2 \cos 3x - 3 \sin 3x$.

42. $y'' - y = 2x \sin x$.

43. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 4x$.

44. $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$.

45. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + x/2$.

46. $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x$.

47. $y'' - 2y' - 8y = e^x - 8 \cos 2x$.

Ответы: 36. $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \dfrac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3)$. **37.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 + C_3 x - 4x^3 + 17x^2$. **38.** $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \dfrac{1}{9} e^{2x}$. **39.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + x \left(\dfrac{x}{10} - \dfrac{1}{25} \right) e^{2x}$. **40.** $y = C_1 e^{4x} + C_1 e^{3x} - e^{2x}(x + 1)$. **41.** $y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x + x \left(\dfrac{1}{2} \cos 3x + \dfrac{1}{3} \sin 3x \right)$. **42.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x \sin x - \cos x$. **43.** $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \dfrac{1}{12} e^{-3x} \cos 4x$. **44.** $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - \dfrac{e^{2x}}{20}(\sin 2x + 2 \cos 2x)$. **45.** $y = (C_1 + C_2 x + x^2)e^{2x} + \dfrac{x+1}{8}$. **46.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 + C_3 x + \dfrac{3}{2} x^2 - \dfrac{1}{3} x^3 + \dfrac{1}{12} x^4 + e^x \left(\dfrac{3}{2} x - \dfrac{15}{4} \right)$. **47.** $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} - \dfrac{1}{9} e^x + \dfrac{1}{5}(3 \cos 2x + \sin 2x)$.

Метод вариации постоянных

Неоднородное уравнение (2.5) с любой правой частью $f(x)$ может быть решено методом вариации постоянных. Сначала находим общее решение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

соответствующего однородного уравнения. Тогда общее решение уравнения (2.5) ищется в виде

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \ldots + C_n(x) y_n.$$

Функции $C_i(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Пример 11. Найти общее решение уравнения

$$y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}. \tag{2.34}$$

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Поэтому

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Общее решение (2.34) ищем в виде

$$y = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}. \tag{2.35}$$

Составим систему уравнений на функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{-x} = 0, \\ C_1'(x) e^x - C_2'(x) e^{-x} = \frac{e^x}{e^x+1}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{e^x+1}, \\ C_2'(x) = -\frac{1}{2} \frac{e^{2x}}{e^x+1}. \end{cases}$$

Интегрируя, имеем

$$\begin{cases} C_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(e^x+1) + C_1, \\ C_2(x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\ln(e^x+1) + C_2. \end{cases}$$

Подставляем эти значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу (2.35), получаем общее решение уравнения (2.34) в виде

$$y = \frac{1}{2}((x - \ln(e^x+1))e^x + (-1 + \ln(e^x+1))e^{-x}) + C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

Найти решения уравнений:

48. $y'' + y = 1/\sin x$.

49. $y'' + 2y' + y = e^{-x}/x$.

50. $y'' + 6y' + 8y = 4e^{-2x}(2 + e^{2x})^{-1}$.

Ответы: 48. $y = (C_1 + \ln|\sin x|)\sin x + (C_2 - x)\cos x$. **49.** $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + xe^{-x}\ln|x|$. **50.** $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-4x} - e^{-2x}\ln[(e^{2x}+2)e^{2x}] - e^{-4x}\ln(e^{2x}+2)$.

2.3 Уравнение Эйлера

Определение 2.2. Уравнение вида

$$x^n y^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + a_2x^{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_ny = f(x) \qquad (2.36)$$

называется уравнением Эйлера.

Уравнение Эйлера сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимого переменного $x = e^t$ при $x > 0$ (или $x = -e^t$ при $x < 0$). Для полученного уравнения с постоянными коэффициентами характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+1) + \ldots + a_{n-2}\lambda(\lambda-1) + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

При составлении этого уравнения каждое произведение $x^ky^{(k)}$ в уравнении (2.36) заменяется на произведение k убывающих на 1 чисел: $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-k+1)$.

Пример 12. Найти общее решение уравнения

$$x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3. \qquad (2.37)$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение и решаем его:

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - \lambda(\lambda-1) + 2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \qquad (2.38)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2.$$

Отсюда общее решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y_0 = (C_1 + C_2t)e^t + C_3e^{2t}.$$

Чтобы решить неоднородное уравнение (2.37), сначала раскроем скобки в выражении (2.38):

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + +5\lambda - 2 = 0.$$

Используя это характеристическое уравнение, составляем левую часть дифференциального уравнения, а правую часть получаем из правой части (2.37) заменой $x = e^t$:

$$y_t''' - 4y_t'' + 5y_t' - 2y = e^{3t}.$$

Функции e^{3t} соответствует число 3, которое не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение ищем в виде $y_1 = Ae^{3t}$. Подставляя y_1 в уравнение, находим $A = 1/4$.

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = (C_1 + C_2t)e^t + C_3e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t} = (C_1 + C_2 \ln x)x + C_3x^2 + \frac{1}{4}x^3 \quad (x > 0).$$

При $x < 0$ получается аналогичная формула, но с $\ln|x|$ вместо $\ln x$.

Найти решения уравнений:

51. $x^2y'' - xy' - 3y = 0.$

52. $x^2y'' + xy' + 4y = 0.$

53. $x^2y'' - xy' + y = 8x^3.$

54. $x^2y'' - 2y = \sin\ln x.$

55. $(2x+3)^3y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0.$

Ответы: 51. $y = C_1x^3 + \dfrac{C_2}{x}.$

52. $y = C_1\cos(2\ln x) + C_2\sin(2\ln x).$

53. $y = x(C_1 + C_2\ln|x|) + 2x^3.$

54. $y = C_1x^2 + C_2x^{-1} + 0,1\cos\ln x - 0,3\sin\ln x.$

55. $y = C_1\left(x + \dfrac{3}{2}\right) + C_2\left|x + \dfrac{3}{2}\right|^{3/2} + C_3\left|x + \dfrac{3}{2}\right|^{1/2}.$

Глава 3. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

3.1 Формула Остроградского - Лиувилля

Для однородного уравнения

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \tag{3.1}$$

не существует общих методов построения фундаментальной системы решений. Иногда одно или несколько частных решений удается угадать.

Если известно частное решение $y_1(x)$ уравнения (3.1), то его порядок можно понизить, сохраняя линейность уравнения. Для этого в уравнение надо подставить $y = y_1 z$ и затем сделать замену $z' = u$.

В случае уравнения второго порядка

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{3.2}$$

можно также воспользоваться формулой Остроградского - Лиувилля

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Cexp\left(-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right), \tag{3.3}$$

где y_1 и y_2 - любые два решения данного уравнения.

Для уравнения n - го порядка (3.1) формула Остраградского - Лиувилля имеет вид

$$\begin{vmatrix} y_1 \ldots y_n \\ y_1' \ldots y_n' \\ y_1^{(n-1)} \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = Cexp\left(-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right), \tag{3.4}$$

где набор функций

$$y_1(x),\, y_2(x), \ldots,\, y_n(x) \tag{3.5}$$

есть фундаментальная система решений.

Если известна фундаментальная система решений (3.5) уравнения (3.1), то общее решение неоднородного уравнения

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \tag{3.6}$$

может быть получено методом вариации постоянных. Общее решение неоднородного уравнения находится в виде

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n.$$

Функции $C_i(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_0(x)}. \end{cases}$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 0, \tag{3.7}$$

если известно частное решение $y_1 = x + 2$.

Решение. По формуле Остроградского - Лиувилля (3.3)

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C_1 exp\left(-\int \frac{x+2}{x(x+1)}dx\right); \quad y_1y_2' - y_1'y_2 = C_1 exp\left(-\int\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx\right).$$

Разделив обе части уравнения на y_1^2, получим слева производную от дроби y_2/y_1

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{y_1^2} = \frac{C_1 exp\left(-\int\frac{x+2}{x(x+1)}dx\right)}{y_1^2} \Rightarrow \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{C_1}{y_1^2}\cdot\frac{x+1}{x^2}.$$

Так как $y_1 = x + 2$, то

$$\frac{y_2}{y_1} = C_1\int\frac{x+1}{x^2(x+2)^2}dx + C_2 = \frac{C_1}{4}\int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+2)^2}\right)dx + C_2 =$$

$$= \frac{C_1}{4}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{(x+2)}\right) + C_2.$$

Общее решение уравнения (3.7) имеет вид

$$y_2(x) = -\frac{C_1}{2x} + C_2(x+2).$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0, \tag{3.8}$$

если известны частные решения $y_1 = 1/x$ и $y_2 = x$.

Решение. Делаем замену $y = y_2 z = xz$, затем $u = z'$. В результате уравнение (3.8) примет вид

$$x^2(2x-1)u'' + (10x^2-6x)u' + (6x-6)z' = 0.$$

Частное решение y_1 после замены примет вид $u_1 = -\frac{2}{x^3}$.

По формуле Остроградского - Лиувилля (3.3):

$$\begin{vmatrix} u_1 & u \\ u_1' & u' \end{vmatrix} = Cexp\left(-\int \frac{10x^2-6x}{x^2(2x-1)}dx\right).$$

Выделим производную $\left(\frac{u}{u_1}\right)'$ и проинтегрируем выражение в показателе экспоненты

$$\left(\frac{u}{u_1}\right)' = \frac{C}{u_1^2} \cdot \frac{(2x-1)}{x^6}.$$

Подставим u_1 и проинтегрируем

$$u = -\frac{C_1}{x^3}(2x-1)^2 + \frac{C_2}{x^3}.$$

Возвращаемся к переменной z:

$$z = -C_1 \int \frac{(2x-1)^2}{x^3}dx + C_2 \int \frac{dx}{x^3} + C_3 =$$

$$= C_1\left(\ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{8x^2}\right) + \frac{C_2}{x^2} + C_3.$$

Возвращаемся к старой функции y и получаем общее решение уравнения (3.8):

$$y = C_1(x\ln|x| + 1) + \frac{C_2}{x} + xC_3.$$

Для решения неоднородного уравнения (3.6) можно использовать следующее замечание:

Замечание 1. Пусть функции u_1 и u_2 являются частными решениям неоднородного уравнения (3.6), тогда их разность $y = u_1 - u_2$ есть решение соответствующего однородного уравнения (3.1).

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 6x, \tag{3.9}$$

если известны частные решения $u_1 = x$ и $u_2 = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$(x^2-1)y''+4xy'+2y=0. \tag{3.10}$$

Учитывая замечание (1), находим частное решение уравнения (3.10):

$$y_1=u_2-u_1=\frac{1}{x+1}.$$

Используя формулу Остроградского - Лиувилля (3.3), запишем общее решение уравнения (3.10):

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)'=C_1(x+1)^2exp\left(-\int\frac{4xdx}{x^2-1}\right)\Rightarrow\left(\frac{y}{y_1}\right)'=\frac{C_1}{(x-1)^2}\Rightarrow y=\frac{C_1}{x+1}+\frac{C_2}{x-1}.$$

Для нахождения общего решения неоднородного уравнения (3.9) используем метод вариации постоянных. Решение ищем в виде

$$y=\frac{C_1(x)}{x+1}+\frac{C_2(x)}{x-1}. \tag{3.11}$$

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определим из системы

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{C_1'(x)}{x+1}+\frac{C_2'(x)}{x-1}=0,\\ -\frac{C_1'(x)}{(x+1)^2}-\frac{C_2'(x)}{(x-1)^2}=\frac{6x}{x^2-1}.\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}C_1'=3x(x+1),\\ C_2'=3x(x-1).\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}C_1(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2+C_1,\\ C_2(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2+C_2.\end{array}\right.$$

Подставим $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу (3.11) и получим искомое решение:

$$y=\frac{C_1}{x+1}+\frac{C_2}{x-1}+\frac{x^3}{x^2-1}.$$

Найти решения уравнений:

56. $xy''+2y'-xy=0, y_1=e^x/x.$

57. $y''-2(1+\operatorname{tg}^2 x)y=0, y_1=\operatorname{tg} x.$

58. $xy'''-y''-xy'+y=0, y_1=x, y_2=e^x.$

59. $x^2(2x-1)y'''+(4x-3)xy''-2xy'+2y=0,\ y_1=x,\ y_2=1/x.$

60. $(3x^3+x)y''+2y'-6xy=4-12x^2,\ y_1=2x,\ y_2=(x+1)^2.$

Ответы:

56. $xy=C_1e^{-x}+C_2e^x.$

57. $y=C_1\operatorname{tg} x+C_2(1+x)\operatorname{tg} x.$

58. $y=C_1x+C_2e^x+C_3e^{-x}.$

59. $y=C_1x+C_2x^{-1}+C_3(x\ln|x|+1).$

60. $y=C_1(x^2+1)+C_2x^{-1}+2x.$

3.2 Методы нахождения частных решений

В некоторых случаях частное решение удается найти путем подбора.

Пример 3. Найти частное решение уравнения

$$(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0, \tag{3.12}$$

являющееся алгебраическим многочленом (если такое решение существует).

Решение. Определим степень многочлена. Пусть

$$y = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n x + a_n.$$

Подставим y в уравнение, получим

$$(2x+1)[n(n-1)x^{n-2} + \ldots] + (4x-2)[nx^{n-1} + \ldots] - 8[x^n + \ldots] = 0.$$

Приравниваем нулю коэффициент при самой старшей степени x^n, будем иметь

$$4n - 8 = 0,$$

откуда $n = 2$. Таким образом, многочлен может быть лишь второй степени, то есть $y = x^2 + ax + b$. Подставляем в уравнение (3.13):

$$4ax + 2 - 2a - 8b = 0.$$

Следовательно, $a = 0$, $2 - 2a - 8b = 0$. Отсюда $b = 1/4$. Частное решение имеет вид

$$y = x^2 + \frac{1}{4}.$$

Пример 4. Найти частное решение уравнения

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0. \tag{3.13}$$

Решение. Предположим, что частное решение имеет вид многочлена относительно x:

$$y = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n x + a_n.$$

Подставим y в уравнение, получим

$$x[n(n-1)x^{n-2} + \ldots] - (2x+1)[nx^{n-1} + \ldots] + (x+1)[x^n + \ldots] = 0.$$

Приравниваем нулю коэффициент при старшей степени x^{n+1}

$$1 = 0.$$

Так как получили противоречие, то частного решения в виде многочлена не существует.

Будем искать решение в виде

$$y = e^{kx}.$$

Подставим в уравнение

$$x(k-1)^2 - (k-1) = 0 \Rightarrow k = 1.$$

Частное решение имеет вид

$$y = e^{x}.$$

Найти решения уравнений:

61. $xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0.$

62. $(x^2-1)y'' + (x-3)y' - y = 0.$

63. $x(x^2+6)y'' - 4(x^2+3y' + 6xy = 0.$

64. $x^2 \ln xy'' - xy' + y = 0.$

Ответы:

61. $y = C_1 e^{2x} + C_2(3x+1)e^{-x}.$

62. $y = C_1(x-3) + \dfrac{C_2}{x+1}.$

63. $y = C_1(x^2+2) + C_2 x^3.$

64. $y = C_1 x + C_2(\ln x + 1).$

Глава 4. Интегрирование линейных уравнений методом степенных рядов

4.1 Нахождение решений однородных линейных уравнений второго порядка в виде степенных рядов

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{4.1}$$

с начальными условиями

$$y = y_0,\ y' = y_0' \quad \text{при} \quad x = x_0, \tag{4.2}$$

где y_0, y_0' - произвольные вещественные числа.

Теорема 1. Пусть функции $p(x)$ и $q(x)$ - голоморфны в окрестности точки x_0, то есть разлагаются в степенные ряды вида

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k; \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k, \tag{4.3}$$

сходящиеся на интервале $|x - x_0| < r$. Тогда задача Коши для уравнения (4.1) с начальными условиями (4.2) имеет единственное решение $y = y(x)$, которое разлагается в степенной ряд

$$y(x) = y_0 + y_0'(x_0)(x - x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} C_k (x - x_0)^k, \tag{4.4}$$

сходящийся, по крайней мере, на том же интервале, что и ряды (4.3).

Если заданы числа y_0 и y_0', коэффициенты C_k ряда (4.4) определяются однозначно, например, подстановкой ряда (4.4) в уравнение (4.1) и приравниванием нулю коэффициентов при различных степенях $x - x_0$ в левой части полученного равенства *(метод неопределенных коэффициентов)*.

В приложениях чаще всего встречаются случаи, когда $p(x)$ и $q(x)$ либо полиномы, либо отношение полиномов. В первом случае ряд (4.4) сходится при всех значениях x. Во втором случае его радиус сходимости совпадает с расстоянием от точки x_0 до ближайшего из полюсов функций $p(z)$ и $q(z)$, рассматриваемых на комплексной плоскости z.

Для построения общего решения уравнения (4.1) достаточно найти два линейно независимых частных решения y_1 и y_2. Обычно строят фундаментальную систему решений y_1 и y_2, нормированную в точке $x = x_0$, так что $y_1 = 1$, $y_1' = 0$ при $x = x_0$; $y_2 = 0$, $y_2' = 1$ при $x = x_0$.

Если ряд (4.4), представляющий решение уравнения (4.1), удается просуммировать, т. е. выразить его сумму через элементарные функции, то второе частное решение можно найти по формуле (3.3).

Метод степенных рядов применяется и для решения линейных уравнений произвольного порядка n

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

с голоморфными коэффициентами $a_1(x)$, $a_2(x), \ldots, a_n(x)$ и правой частью $f(x)$. При этом решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y = y_0,\ y' = y_0', \ldots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0,$$

записывается так:

$$y = y_o + y_0'(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{(n-1)} + \sum_{k=n}^{\infty} C_k (x - x_0)^k,$$

где $|x - x_0| < r$.

Пример 1. Найти методом степенных рядов решение задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 1;\ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Решение. Согласно формуле (4.4), решение задачи Коши можно представить в форме

$$y(x) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} C_k x^k. \tag{4.6}$$

Коэффициенты C_k находим методом неопределенных коэффициентов. Подставив ряд (4.6) в уравнение (4.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
&\text{при } x^0: \quad 2C_2 + 1 = 0,\\
&\text{при } x: \quad C_3 = 0,\\
&\text{при } x^2: \quad 4 \cdot 3 \cdot C_4 + C_2 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\text{при } x^k: \quad k(k-1)C_k + C_{k-2} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Последовательно вычисляя коэффициенты, найдем, что

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!},\ C_{2k+1} = 0,\ k = 0,\ 1,\ 2, \dots$$

Таким образом, решение задачи Коши определяется рядом

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Этот ряд сходится на всей вещественной оси к функции $y = \cos x$, которая является решением поставленной задачи Коши.

Пример 2. Найти методом степенных рядов линейно независимые решения уравнения

$$y'' - xy = 0. \tag{4.7}$$

Найдем два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, удовлетворяющие начальным условиям

$$y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0;\ y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1.$$

Они будут линейно независимы. По формуле (4.4)

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k, \tag{4.8}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=2}^{\infty} b_k x^k. \tag{4.9}$$

Найдем $y_1(x)$. Подставляя ряд (4.8) в уравнение (4.7), получаем

$$\sum_{k=2}^{\infty} [a_k k(k-1)x^{k-2} - a_k x^{k+1}] - x = 0.$$

Поэтому коэффициенты a_k определяются из системы

$$
\begin{aligned}
&\text{при } x^0: \quad a_2 = 0,\\
&\text{при } x: \quad 3\cdot 2\cdot a_3 = 1,\\
&\text{при } x^2: \quad a_4 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\text{при } x^k: \quad k(k-1)a_k - a_{k-3} = 0;\ k = 5,\, 6, \dots
\end{aligned}
$$

и имеют вид

$$a_{3k} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\dots(3k-1)3k}, \quad a_{3k+1} = a_{3k+2} = 0.$$

Таким образом,

$$y_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\dots(3k-1)3k} + 1.$$

Аналогично находим $y_2(x)$:

$$y_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\dots 3k(3k+1)} + x.$$

Общее решение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где C_1и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 3. Найти фундаментальную систему решений y_1, y_2, нормированную в точке $x = 0$, методом степенных рядов и построить общее решение для уравнения

$$(1 - x^2)y'' - xy' - y = 0. \tag{4.10}$$

Задача сводится к нахождению двух частных решений y_1 и y_2, удовлетворяющих начальным условиям

$$y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0;\ y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1.$$

Убедимся, что решения y_1 и y_2 существуют. Перепишем уравнение (4.10) в виде

$$y'' - \frac{x}{1-x^2}y' - \frac{1}{1-x^2}y = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения разлагаются в ряды по степеням x, сходящиеся в области $|x| < 1$. Поэтому y_1 и y_2 существуют, причем ряды, представляющие их, сходятся, по крайне мере, при $|x| < 1$.

По формуле (4.4)

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k, \tag{4.11}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=2}^{\infty} b_k x^k. \tag{4.12}$$

Найдем $y_1(x)$. Подставляя ряд (4.11) в уравнение (4.10), получаем

$$\sum_{k=2}^{\infty}[-a_k(k^2+1)x^k + a_k k(k-1)x^{k-2}] - 1 = 0.$$

Поэтому коэффициенты a_k определяются из системы

$$\text{при } x^0: \quad -1 + 2\cdot 1 a_2 = 0,\ a_2 = \frac{1}{2!};$$

$$\text{при } x: \quad 3\cdot 2\cdot a_3 = 0,\ a_3 = 0;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\text{при } x^k: \quad (k+2)(k+1)a_{k+2} - (k^2+1)a_k = 0,\ k \geq 2$$

и имеют вид

$$a_5 = a_7 = \ldots = a_{2m+1} = \ldots = 0,$$

$$a_2 = \frac{1+2^2}{4!},\ a_6 = \frac{(1+2^2)(1+4^2)}{6!}, \ldots,$$

$$a_{2m} = \frac{(1+2^2)(1+4^2)\cdots(1+(2m-2)^2)}{(2m)!}.$$

Таким образом,

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1+2^2}{4!}x^4 + \ldots + \frac{(1+2^2)(1+4^2)\cdots(1+(2m-2)^2)}{(2m)!}x^{2m} + \ldots,$$

где $|x| < 1$.

Аналогично находим $y_2(x)$:

$$y_2 = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{2(1+3^2)}{5!}x^5 + \ldots + \frac{2(1+3^2)\ldots(1+(2m-1)^2)}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \ldots,$$

где $|x| < 1$.

Общее решение уравнения (4.10) –

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Найти решения уравнений:

65. $y'' + xy' - (2x^2+1)y = 0.$

66. $(1-x)y''+y=0$.

Ответы: 65. $y_1 = 1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{3x^4}{4!}+\ldots$, $y_2 = x+\dfrac{12}{5!}x^5+\ldots$, $y = C_1y_1+C_2y_2$. **66.** $y_1 = 1-\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}-\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{2x^5}{5!}-\ldots$, $y_2 = x-\dfrac{x^3}{3!}-\dfrac{2x^4}{4!}-\dfrac{5x^5}{5!}+\ldots$

4.2 Нахождение решений однородных линейных уравнений второго порядка в виде обобщенных степенных рядов

Определение 4.1. Ряд вида

$$(x-x_0)^r\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k\ (c_0\neq 0), \tag{4.13}$$

где r - заданное число, и степенной ряд сходится в некоторой области $|x-x_0|<R$, называется *обобщенным степенным рядом.*

Если r - целое неотрицательное число, то обобщенный степенной ряд (4.13) обращается в обычный степенной ряд.

Если точка x_0 является особой точкой для функций $p(x)$ и $q(x)$ в уравнении (4.1), то теорема (1) не применима. В этом случае могут существовать решения уравнения (4.1) в виде обобщенных степенных рядов (4.13). Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Если коэффициенты уравнения (4.1) представимы в окрестности особой точки $x=x_0$ в виде

$$p(x)=\frac{\sum_{k=0}^{\infty}p_k(x-x_0)^k}{x-x_0},\quad q(x)=\frac{\sum_{k=0}^{\infty}q_k(x-x_0)^k}{(x-x_0)^2}, \tag{4.14}$$

где $p_0^2+q_0^2+q_1^2\neq 0$ и ряды в числителях сходятся в некоторой области $|x-x_0|<R$, то уравнение (4.1) имеет хотя бы одно решение в виде обобщенного степенного ряда:

$$y(x)=(x-x_0)^r\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k\ (c_0\neq 0), \tag{4.15}$$

причем входящий в это решение степенной ряд сходится, по крайней мере, в той же области $|x-x_0|<R$, что и ряды в формулах (4.14).

Замечание 1. Если хотя бы одна из функций $p(x)$ и $q(x)$ имеет в знаменателе более высокую степень $x-x_0$, чем это указано в теореме (2), то решение в виде обобщенного степенного ряда не существует. В этом случае, по крайне мере, одно решение имеет вид обобщенного ряда Лорана

$$(x-x_0)^r\sum_{-\infty}^{\infty}c_k(x-x_0)^k,$$

причем обязательно бесконечно много коэффициентов C_k с отрицательными номерами отлично от нуля.

Для определения коэффициентов c_k нужно подставить ряд (4.15) в уравнение (4.1) и приравнять нулю коэффициенты при различных степенях $x - x_0$. Число r находится из так называемого *определяющего уравнения* в особой точке $x = x_0$:

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0. \tag{4.16}$$

Коэффициенты p_0 и q_0 можно найти по формулам

$$p_0 = \lim_{x\to x_0}(x - x_0)p(x), \quad q_0 = \lim_{x\to x_0}(x - x_0)^2 q(x). \tag{4.17}$$

Уравнение на r можно так же получить, приравняв к нулю коэффициенты при наименьшей степени $x - x_0$. В случае, когда корни r_1 и r_2 определяющего уравнения (4.16) различны, уравнение (4.1) всегда имеет решение вида (4.15), где r есть тот из корней r_1 и r_2, который имеет большую вещественную часть. Если r_1 этот корень, то решение имеет вид

$$y = (x - x_0)^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)}(x - x_0)^k \; (c_0^{(1)} \neq 0).$$

Утверждение 1. Если разность $r_1 - r_2$ не является целым числом, то уравнение (4.1) имеет два линейно независимых решения y_1 и y_2 в виде обобщенных степенных рядов

$$y_1 = (x - x_0)^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)}(x - x_0)^k \; (c_0^{(1)} \neq 0), \tag{4.18}$$

$$y_2 = (x - x_0)^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)}(x - x_0)^k \; (c_0^{(2)} \neq 0). \tag{4.19}$$

Утверждение 2. Если разность $r_1 - r_2$ - целое число, то существует решение y_1, являющееся обобщенным степенным рядом вида (4.18), а второе линейно независимое решение имеет вид

$$y_2 = (x - x_0)^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)}(x - x_0)^k + \gamma y_1(x)\ln(x - x_0), \tag{4.20}$$

причем при $r_1 - r_2 = 0$ коэффициент $\gamma \neq 0$, то есть в этом случае $y_2(x)$ обязательно содержит $\ln(x - x_0)$.

Пример 4. Найти те решения уравнения, которые выражаются через обобщенные степенные ряды:

$$2x^2y'' + (3x - 2x^2)y' - (x+1)y = 0. \tag{4.21}$$

Представим уравнение (4.21) в следующем виде:

$$y'' + \frac{(3/2 - x)}{x}y' + \frac{(-1/2 - x/2)}{x^2}y = 0. \tag{4.22}$$

Коэффициенты $p(x) = \frac{(3/2-x)}{x}$ и $q(x) = \frac{(-1/2-x/2)}{x^2}$ имеют особенность в точке $x_0 = 0$, следовательно, $p(x)$ и $q(x)$ разлагаются в ряд (4.14). По теореме (2) имеется хотя бы одно решение в виде обобщенного степенного ряда.

По формуле (4.17)

$$p_0 = \lim_{x\to 0} x\frac{(3/2-x)}{x} = 3/2, \quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\frac{(-1/2-x/2)}{x^2} = -1/2.$$

Составим определяющее уравнение (4.16):

$$r(r-1) + 3/2r - 1/2 = 0,$$

откуда $r_1 = 1/2$ и $r_2 = -1$. Разность r_1 и r_2 равна $3/2$, не является целым числом, следовательно, из утверждения (1) получается, что имеются два линейно независимых решения y_1 и y_2 в виде обобщенных степенных рядов:

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} x^{k+1/2}, \quad y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} x^{k-1}. \tag{4.23}$$

Подставляем y_1 в уравнение (4.21):

$$2x^2\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)}(k+1/2)(k-1/2)x^{k-3/2} + 3x\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)}(k+1/2)x^{k-1/2} -$$

$$-2x^2\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)}(k+1/2)x^{k-1/2} - x\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)}x^{k+1/2} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)}x^{k+1/2} = 0.$$

Получаем систему уравнений на $c_k^{(1)}$:

при $x^{1/2}$: $0 \equiv 0$, т.е $c_0^{(1)}$ - произвольное;

при $x^{3/2}$: $2c_1^{(1)}\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} + 3c_1^{(1)}\frac{3}{2} - 2c_0^{(1)}\frac{1}{2} - c_0^{(1)} - c_1^{(1)} = 0;$

при $x^{5/2}$: $2c_2^{(1)}\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2} + 3c_2^{(1)}\frac{5}{2} - 2c_1^{(1)}\frac{3}{2} - c_1^{(1)} - c_2^{(1)} = 0;$

....

при $x^{k+1/2}$: $c_k^{(1)}(k+1/2)(k-1/2) + 3c_k^{(1)}(k+1/2) - 2c_{k-1}^{(1)}(k-1/2)-$
$- c_{k-1}^{(1)} - c_k^{(1)} = 0.$

Тогда коэффициенты имеют вид

$$c_1^{(1)} = \frac{2}{5}c_0^{(1)}, \quad c_2^{(1)} = \frac{2}{7}c_1^{(1)} = \frac{2^2}{5\cdot 7}c_0^{(1)}, \ldots, \quad c_k^{(1)} = \frac{2c_{k-1}^{(1)}}{2k+3} = \frac{2^k c_0^{(1)}}{5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2k+3)}.$$

Положим $c_0^{(1)} = 1$ и подставим коэффициенты $c_k^{(1)}$ в (4.23):

$$y_1 = |x|^{1/2}\left(1 + \frac{2x}{5} + \frac{(2x)^2}{5\cdot 7} + \frac{(2x)^3}{5\cdot 7\cdot 9} + \ldots + \frac{(2x)^k}{5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2k+3)}\ldots\right).$$

Аналогично находим y_2:

$$y_2 = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots + \frac{x^{k-1}}{k!} + \ldots = \frac{e^x}{x}.$$

Найти решения уравнений:

66. $9x^2y'' - (x^2-2)y = 0.$

67. $x^2y'' + 2xy' - (x^2+2x+2)y = 0.$

68. $xy'' + y' - xy = 0.$

Ответы:

66. $y_1 = x^{1/3}\Big(1 + \dfrac{x^2}{5\cdot 6} + \dfrac{x^4}{5\cdot 6\cdot 11\cdot 12} + \ldots\Big)$, $y_2 = x^{2/3}\Big(1 + \dfrac{x^2}{6\cdot 7} + \dfrac{x^4}{6\cdot 7\cdot 12\cdot 13} + \ldots\Big)$.

67. $y_1 = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{40} + \dfrac{7x^4}{720}\ldots$, $y_2 = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{5} + \dfrac{x^4}{20} + \ldots$.

68. $y_1 = 1 + \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \dfrac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \ldots$, $y_2 = \left(1 + \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \ldots\right)\ln|x| - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{3x^4}{128} - \ldots$.

Литература

[1] Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Минск.: Изд. Виша шк. 1980.

[2] А.М. Самойленко, С. А. Кривошея , Н. А. Перестюк. Дифференциальные уравнения: Примеры и задачи. Киев.: Изд. Виша шк. 1984.

[3] Филиппов А. Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.; Ижевск.: Изд. РХД, 2000.

[4] Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Изд. "Едиториал УРСС", 2004.

[5] Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями. М.: Изд. УРСС, 2002.

[6] А. А. Есипов, Л. И Сазанов, В. И. Юдович. Руководство к решению по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ростов- на-Дону: Изд. Ростовского университета, 1989.