Устойчивость и повышение эффективности явных схем решения задач теории упругости и теории оболочек (2)

Д.Т. Чекмарев

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

МЕТОД ГАРМОНИК. УСТОЙЧИВОСТЬ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ “КРЕСТ”

Исследуем на устойчивость схему “крест” для одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t)$$

Схема крест:

$$\frac{1}{\tau^2}\left(u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}\right) - \frac{c^2}{h^2}\left(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k\right) = 0.$$

Для исследования на устойчивость нужно сделать следующее:

- перейти к однородному уравнению, т. е. положить $f(x,t) = 0$;
- подставить в полученное уравнение $u_j^k = \lambda^k e^{i\alpha j}$,
- применить условие устойчивости $|\lambda| \le 1$.

Получаем

$$\frac{1}{\tau^2}\left(\lambda^{k+1}e^{i\alpha j}-2\lambda^k e^{i\alpha j}+\lambda^{k-1}e^{i\alpha j}\right)-\frac{c^2}{h^2}\left(\lambda^k e^{i\alpha(j+1)}-2\lambda^k e^{i\alpha j}+\lambda^k e^{i\alpha(j-1)}\right)=0.$$

$$\lambda^2-2\lambda+1=\frac{\tau^2c^2}{h^2}\left(e^{i\alpha}-2+e^{-i\alpha}\right)\lambda.$$

Или

$$\lambda^2+\left(4\frac{\tau^2c^2}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\right)\lambda+1=0.$$

По теореме Виета произведение корней равно единице. Значит, схема устойчива, если

$$|\lambda_1|=|\lambda_2|=1.$$

А это выполняется, когда дискриминант уравнения (3.2) меньше нуля:

$$D = \left(4\frac{\tau^2 c^2}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2\right)^2 - 4 \le 0 \quad \textit{для } \forall\alpha,$$

$$\left|4\frac{\tau^2 c^2}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2\right| \le 2,$$

$$\left|2\frac{\tau^2 c^2}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1\right| \le 1,$$

$$\left|\frac{\tau^2 c^2}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right| \le 1.$$

$$\left|\sin^2\frac{\alpha}{2}\right| \le 1 \Rightarrow \frac{\tau^2 c^2}{h^2} \le 1 \Rightarrow \frac{\tau\, c}{h} \le 1 \Rightarrow$$

Окончательно получаем $\tau \le \dfrac{h}{c}.$ (условие Куранта)

Схемы "крест" могут быть представлены с помощью операторного уравнения

$$A_h u^k - D_{tt} u^k = f,$$

где u^k – неизвестная сеточная функция, k – номер временного слоя, A_h – неположительный сеточный линейный оператор, действующий в пределах одного временного слоя. Пусть $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots\}$ - полная система собственных функций оператора A_h, $\{\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ - набор соответствующих им собственных значений или спектр оператора A_h. Исследование устойчивости сводится к анализу устойчивости решений вида

$$u^k = \varphi_n \exp(Z_n k), \quad n \in N, \tag{3.5}$$

где $Z_n \in C$. Так как оператор A_h неположительный, то все собственные числа этого оператора будут неположительными:

$$A_h\varphi_n = -\xi_n\varphi_n, \quad \xi_n \geq 0.$$

Решение будет устойчивым при выполнении условия

$$\operatorname{Re} Z_n \leq 0 \left(\Leftrightarrow |\lambda| \leq 1\right).$$

Подставляя решение в однородное уравнение, получим:

$$A_h\varphi_n \exp(Z_n k) - D_{tt} \exp(Z_n k) = -\xi_n\varphi_n \exp(Z_n k) -$$

$$-\frac{1}{\tau^2}\left(\varphi_n \exp(Z_n(k+1)) - 2\varphi_n \exp(Z_n k) + \varphi_n \exp(Z_n(k-1))\right) = 0,$$

откуда получим $$-\xi_n - \frac{1}{\tau^2}\left(\exp(Z_n) - 2 + \exp(-Z_n)\right) = 0.$$

Последнее равенство приводится к квадратному уравнению относительно $\exp(Z_n)$:

$$\left(\exp(Z_n)\right)^2 - \left(2 - \xi_n\tau^2\right)\left(\exp(Z_n)\right) + 1 = 0.$$

Из теоремы Виета следует, что каждому корню уравнения $\exp(Z_n)$ соответствует другой корень: $\exp(-Z_n)$. Таким образом, решение будет устойчиво только при чисто мнимых Z_n. Отсюда получаем условие на дискриминант:

$$D = \left(2 - \xi_n \tau^2\right)^2 - 4 \le 0.$$

Последнее неравенство эквивалентно условию на шаг интегрирования по времени

$$\tau \le \frac{2}{\sqrt{\xi_n}}, \quad n \in N.$$

Пусть $\alpha \le \xi_n \le \beta$, то есть $[\alpha, \beta]$ - отрезок, содержащий спектр оператора. Тогда последнее неравенство перепишется в виде:

$$\tau \le \frac{2}{\sqrt{\xi_{\max}}}.$$

Таким образом, получили условие устойчивости Неймана

$$\tau \le 2/\sqrt{\beta},$$

где β - верхняя граница спектра оператора A_h.

Представляется более удобным рассматривать эквивалентную задачу нахождения собственной частоты колебаний полудискретной системы уравнений

$$A_h u - \ddot{u} = 0.$$

Решение рассмотрим в виде

$$u_n = \varphi_n \exp(i\omega t).$$

Подставляем это решение в полудискретную систему уравнений, имея в виду, что оператор A_h неположительный, тогда

$$-\xi_n \varphi_n = (i\omega)^2 \varphi_n \Rightarrow \xi_n = \omega^2.$$

Получаем, что

$$\tau \le \frac{2}{\sqrt{\xi_{\max}}} = \frac{2}{\sqrt{\omega_{\max}^2}} = \frac{2}{\omega_{\max}}.$$

Таким образом, условие устойчивости схемы (3.4) запишется в виде

$$\tau \le 2/\omega_{\max}. \tag{3.8}$$

(Легко видеть, что $\omega_{\max} = \sqrt{\beta}$, откуда следует эквивалентность неравенств (3.7) и (3.8)).

ГЛАВА 4. ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Система динамических уравнений теории упругости для изотропной среды

$$(\lambda+\mu)\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\, u+\mu\Delta u=\rho\partial^2 u/\partial t^2$$

может быть преобразована к виду отдельных скалярных волновых уравнений.

Применяя к системе оператор дивергенции, получим волновое уравнение

$$(\lambda+2\mu)\Delta p=\rho\partial^2 p/\partial t^2\ ,$$

где $p=\mathrm{div}\ u.$ Аналогично, применяя оператор ротора, получим

$$\mu\Delta q_i=\rho\partial^2 q_i/\partial t^2\,(i=1,2,3),$$

где $q=(q_1,q_2,q_3)=\mathrm{rot}\ u.$. Полученные уравнения описывают распространение волн сжатия и сдвига в изотропной упругой среде.

Проведем аналогичные преобразования с разностной схемой, построенной вариационно-разностным методом

$$(\lambda+\mu)\begin{vmatrix} D_{11}u_1+D_{12}u_2+D_{13}u_3 \\ D_{21}u_1+D_{22}u_2+D_{23}u_3 \\ D_{31}u_1+D_{32}u_2+D_{33}u_3 \end{vmatrix}+\mu D_{\Delta}\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}=\rho D_{tt}\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix},$$

здесь $\left(D_{\Delta}=D_{11}+D_{22}+D_{33}\right)$. Применим к первому уравнению системы разностный оператор D_{01}, ко второму - D_{02}, к третьему - D_{03} и сложим все три уравнения. Получим сеточное уравнение для одной неизвестной функции

$$(\lambda+2\mu)D_{\Delta}\,p=\rho\,D_{tt}\,p,$$

где $p=D_{01}\,u_1+D_{02}\,u_2+D_{03}\,u_3$ - сеточный аналог дивергенции. Аналогично получаются скалярные сеточные уравнения для компонент ротора. В результате получаем три скалярных сеточных уравнения

$$\mu D_{\Delta}q_i=D_{tt}q_i,\quad (i=1,2,3),$$

где $q = (q_1, q_2, q_3) = (D_{30}u_2 - D_{20}u_2,\ D_{10}u_3 - D_{30}u_1,\ D_{20}u_1 - D_{10}u_2)$ - сеточный аналог ротора.

Рассмотрим устойчивость вариационно-разностных схем решения плоской задачи теории упругости. Получим схему на четырехугольных ячейках, которая совпадает с «ажурной» схемой на треугольных ячейках, записанную в безразмерных величинах. В данном случае будет иметь вид:

$$\begin{cases} (\lambda + \mu)(D_{11}u_1 + D_{12}u_2) + \mu D_\Delta u_1 = \rho D_{tt} u_1, \\ (\lambda + \mu)(D_{21}u_1 + D_{22}u_2) + \mu D_\Delta u_2 = \rho D_{tt} u_2, \end{cases}$$

где оператор Лапласа $D_\Delta = D_{11} + D_{22}$.

Система в безразмерном виде:

$$D_\Delta u + \frac{1}{2(1-\nu)}\left(D_{12}\mathrm{v} - D_{22}u\right) - D_{\text{тт}} u = 0,$$

$$D_\Delta \mathrm{v} + \frac{1}{2(1-\nu)}\left(D_{21}u - D_{11}\mathrm{v}\right) - D_{\text{тт}} \mathrm{v} = 0,$$

Данная схема сводится к двум отдельным сеточным волновым уравнениям.

$$\begin{aligned} D_{\Delta} u + \frac{1}{2(1-\nu)}\left(D_{12}\mathrm{v} - D_{22}u\right) - D_{\text{тт}} u = 0, \\ D_{\Delta}\mathrm{v} + \frac{1}{2(1-\nu)}\left(D_{21}u - D_{11}\mathrm{v}\right) - D_{\text{тт}}\mathrm{v} = 0, \end{aligned} .$$

где $p_0 = D_{01}u + D_{02}\mathrm{v}$, $q_0 = D_{20}u - D_{10}\mathrm{v}$.

Очевидно, что для исследования устойчивости достаточно рассмотреть только первое из них, поскольку они отличаются только коэффициентом при сеточном операторе Лапласа и собственные числа оператора первого уравнения больше. Поэтому анализ устойчивости сводится к нахождению максимальной собственной частоты полудискретного уравнения

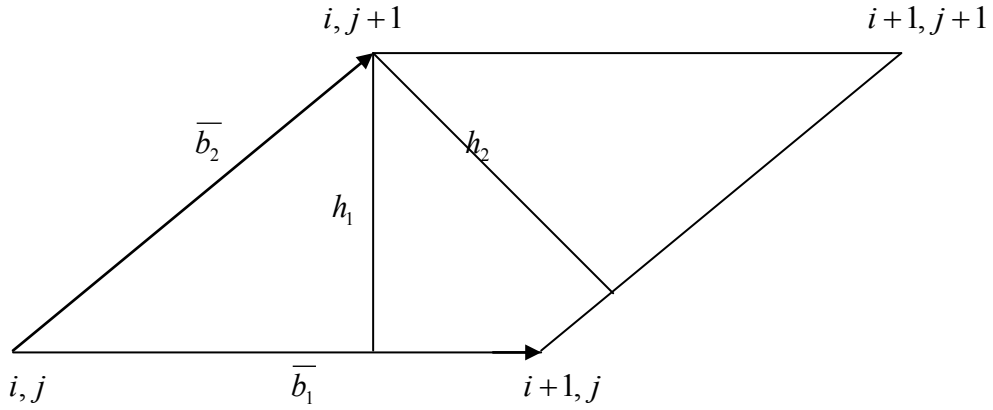
$$D_{\Delta} p_0 - \frac{\partial^2 p_0}{\partial \mathrm{т}^2} = 0 \ . \tag{4.7}$$

Рассмотрим косоугольных сетки с произвольной невырожденной матрицей

$$B_h = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим схему на четырехугольных ячейках. Ячейка параллелограммной сетки приведена на рисунке

Здесь h_1, h_2 - высоты, а $\left|\overline{b_1}\right|$ и $\left|\overline{b_2}\right|$ - стороны параллелограммной ячейки.



Введем обозначения для столбцов матрицы B_h

$$\bar{b}_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}, \bar{b}_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

есть площадь интересующей нас ячейки.

Для сеточного оператора Лапласа получим выражение:

$$\left(D_{\Delta} f\right)_{ij} = \left(d_1^{+} d_1^{-} f + d_2^{+} d_2^{-} f\right)_{ij} =$$

$$= \frac{1}{4|B|^2}\Big[\left(f_{i-1j-1} + f_{i+1j+1}\right)\left((b_{11} - b_{12})^2 + (b_{21} - b_{22})^2\right) + \left(f_{i-1j+1} + f_{i+1j-1}\right)\left((b_{11} + b_{12})^2 + (b_{21} + b_{22})^2\right) +$$

$$+ 2\left(f_{i-1j} + f_{i+1j}\right)\left(-b_{11}^2 - b_{21}^2 + b_{12}^2 + b_{22}^2\right) + 2\left(f_{ij-1} + f_{ij+1}\right)\left(b_{11}^2 + b_{21}^2 - b_{12}^2 - b_{22}^2\right) -$$

$$- 4 f_{ij}\left(b_{11}^2 + b_{21}^2 + b_{12}^2 + b_{22}^2\right)\Big] =$$

$$= \frac{1}{4|B|^2}\Big[\left(f_{i-1j-1} + f_{i+1j+1}\right)\left(\bar{b}_1 - \bar{b}_2\right)^2 + \left(f_{i-1j+1} + f_{i+1j-1}\right)\left(\bar{b}_1 + \bar{b}_2\right)^2 +$$

$$+ 2\left(f_{i-1j} + f_{i+1j}\right)\left(\bar{b}_2^{\,2} - \bar{b}_1^{\,2}\right) + 2\left(f_{ij-1} + f_{ij+1}\right)\left(\bar{b}_1^{\,2} - \bar{b}_2^{\,2}\right) - 2 f_{ij}\left(\left(\bar{b}_1 - \bar{b}_2\right)^2 + \left(\bar{b}_1 + \bar{b}_2\right)^2\right)\Big]$$

Подставляя в сеточное волновое уравнение решение в виде $p_{jk} = \exp\left(i[\alpha j + \beta k + \omega t]\right)$, после некоторых преобразований получим

$$\frac{1}{4|B|^2}\Big[\left(\bar{b}_1-\bar{b}_2\right)^2\left(\exp\left(-i\left(\alpha+\beta\right)\right)+\exp\left(i\left(\alpha+\beta\right)\right)\right)+\left(\bar{b}_1+\bar{b}_2\right)^2\left(\exp\left(-i\left(\alpha-\beta\right)\right)+\exp\left(i\left(\alpha-\beta\right)\right)\right)+$$

$$+2\left(\bar{b}_2^2-\bar{b}_1^2\right)\left(\exp\left(-i\alpha\right)+\exp\left(i\alpha\right)\right)+2\left(\bar{b}_1^2-\bar{b}_2^2\right)\left(\exp\left(-i\beta\right)+\exp\left(i\beta\right)\right)-2\left(\left(\bar{b}_1-\bar{b}_2\right)^2+\left(\bar{b}_1+\bar{b}_2\right)^2\right)\Big]=-\omega^2.$$

Или

$$\frac{1}{4|B|^2}\Big[2\left(\bar{b}_1^2-2\left(\bar{b}_1,\bar{b}_2\right)+\bar{b}_2^2\right)\left(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\right)+2\left(\bar{b}_1^2+2\left(\bar{b}_1,\bar{b}_2\right)+\bar{b}_2^2\right)\left(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\right)+$$

$$+4\left(\bar{b}_2^2-\bar{b}_1^2\right)\cos\alpha+4\left(\bar{b}_1^2-\bar{b}_2^2\right)\cos\beta-2\left(\left(\bar{b}_1-\bar{b}_2\right)^2+\left(\bar{b}_1+\bar{b}_2\right)^2\right)\Big]=-\omega^2,$$

$$\frac{1}{4|B|^2}\Big[4\left(\bar{b}_1^2+\bar{b}_2^2\right)\cos\alpha\cos\beta+8\left(\bar{b}_1,\bar{b}_2\right)\sin\alpha\sin\beta+4\left(\bar{b}_2^2-\bar{b}_1^2\right)\cos\alpha+4\left(\bar{b}_1^2-\bar{b}_2^2\right)\cos\beta-4\left(\bar{b}_1^2+\bar{b}_2^2\right)\Big]=-\omega^2,$$

$$\frac{1}{|B|^2}\Big[-\bar{b}_1^2\left(1+\cos\alpha\right)\left(1-\cos\beta\right)-\bar{b}_2^2\left(1+\cos\beta\right)\left(1-\cos\alpha\right)+2\left(\bar{b}_1,\bar{b}_2\right)\sin\alpha\sin\beta\Big]=-\omega^2.$$

В итоге получаем оценку устойчивости

$$\tau\le\min\left(h_1,h_2\right).$$

Аналогично получим для схемы на треугольных ячейках.

$$\tau \le \sqrt{\frac{8}{9}} \min\left(h_1, h_2, h_3\right) \tag{4.22}$$

Приведем все полученные оценки в размерных величинах. Для схемы на четырехугольных ячейках получим

$$\tau \le \min\left(h_1, h_2\right) / c \ , \tag{4.23}$$

где h_1, h_2 - высоты параллелограммной ячейки.

Для схемы на прямоугольных или тупоугольных треугольных ячейках получим

$$\tau \le \min\left(h_1, h_2, h_3\right) / c \ , \tag{4.24}$$

где h_1, h_2, h_3 - высоты треугольника. Для схемы на остроугольных треугольниках приведем приближенную оценку

$$\tau \le \sqrt{\frac{8}{9}} \min\left(h_1, h_2, h_3\right) / c \ , \tag{4.25}$$

То же для трехмерной задачи теории упругости.

Рассмотрим схему

$$\left(\lambda+G\right)\begin{vmatrix} D_{11}\ u_1+D_{12}\ u_2+D_{13}\ u_3 \\ D_{21}\ u_1+D_{22}\ u_2+D_{23}\ u_3 \\ D_{31}\ u_1+D_{32}\ u_2+D_{33}\ u_3 \end{vmatrix}+G\ D_{\Delta}\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}=D_{tt}\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}$$

на шестигранных ячейках для случая равномерной сетки в R^3 вида

$$\begin{bmatrix} X^1_{jkl} \\ X^2_{jkl} \\ X^3_{jkl} \end{bmatrix}=B\begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} X^1_0 \\ X^2_0 \\ X^3_0 \end{bmatrix}.$$

Исследование устойчивости схемы (4.5) сводится к нахождению максимальной собственной частоты уравнений

$$\left(\lambda+2G\right)D_{\Delta}p=\rho\frac{\partial^2\ p}{\partial\ t^2},\quad GD_{\Delta}q_1=\rho\frac{\partial^2\ q_1}{\partial\ t^2}\qquad \left(i=1,2,3,\right),$$

Оператор $D_\Delta = D_{11} + D_{22} + D_{33}$ имеет вид:

$$\left(D_\Delta f\right)_{jkl} = \frac{1}{16|B|^2}\Big\{\overline{N}_1^2\left(f_{j-1k-1l-1} + f_{j+1k+1l+1}\right) + \overline{N}_2^2\left(f_{j-1k-1l+1} + f_{j+1k+1l-1}\right) + \overline{N}_3^2\left(f_{j-1k+1l-1} + f_{j+1k-1l+1}\right)$$

$$+ \overline{N}_4^2\left(f_{j+1k-1l-1} + f_{j-1k+1l+1}\right) - 2\Big[\left(\overline{N}_1, \overline{N}_2\right)\left(f_{j-1k-1l} + f_{j+1k+1l}\right) + \left(\overline{N}_1, \overline{N}_3\right)\left(f_{j-1kl-1} + f_{j+1kl+1}\right) +$$

$$+ \left(\overline{N}_1, \overline{N}_4\right)\left(f_{jk-1l-1} + f_{jk+1l+1}\right) + \left(\overline{N}_2, \overline{N}_3\right)\left(f_{jk+1l-1} + f_{jk-1l+1}\right) + \left(\overline{N}_2, \overline{N}_4\right)\left(f_{j-1kl+1} + f_{j+1kl-1}\right) + +$$

$$+ \left(\overline{N}_3, \overline{N}_4\right)\left(f_{j-1k+1l} + f_{j+1k-1l}\right)\Big] + 2\Big[\left(\left(\overline{N}_1, \overline{N}_4\right) + \left(\overline{N}_2, \overline{N}_3\right)\right)\left(f_{j-1kl} + f_{j+1kl}\right) +$$

$$+ \left(\left(\overline{N}_2, \overline{N}_4\right) + \left(\overline{N}_1, \overline{N}_3\right)\right)\left(f_{jk-1l} + f_{jk+1l}\right) + \left(\left(\overline{N}_1, \overline{N}_2\right) + \left(\overline{N}_3, \overline{N}_4\right)\right)\left(f_{jkl-1} + f_{jkl+1}\right)\Big] -$$

$$- 2\left(\overline{N}_1^2 + \overline{N}_2^2 + \overline{N}_3^2 + \overline{N}_4^2\right) f_{jkl}\Big\},$$

Подставляя в уравнение функцию p в виде одного члена ряда Фурье

$$p_{jkl} = \exp\left[2 \cdot i\left(\alpha j + \beta k + \gamma l + \omega t / 2\right)\right],$$

получим

$$\tau \le \min\left(h_1, h_2, h_3\right)/c \qquad (4.32)$$

(условие Куранта для ячейки), где h_i *(i=1,2,3)* - высоты ячейки разностной сетки.

Рассмотрим «ажурную» схему на тетраэдральных ячейках.

Оператор D_Δ имеет вид:

$$\left(D_\Delta f\right)_{jkl} = -\frac{1}{|B|^2}\Big[\left(\overline{N_1}, \overline{N_2}\right)\left(f_{j+1kl} + f_{j-1kl}\right) + \left(\overline{N_1}, \overline{N_3}\right)\left(f_{jk+1l} + f_{jk-1l}\right) +$$

$$+\left(\overline{N_1}, \overline{N_4}\right)\left(f_{jkl-1} + f_{jkl+1}\right) + \left(\overline{N_2}, \overline{N_3}\right)\left(f_{j-1k+1l} + f_{j+1k-1l}\right) + \left(\overline{N_2}, \overline{N_4}\right)\left(f_{j-1kl+1} + f_{j+1kl-1}\right) + \qquad (4.33)$$

$$+\left(\overline{N_3}, \overline{N_4}\right)\left(f_{jk-1l+1} + f_{jk+1l-1}\right) + \left(\overline{N}_1^2 + \overline{N}_2^2 + \overline{N}_3^2 + \overline{N}_4^2\right) f_{jkl}\Big]$$

Оценка устойчивости

$$\tau \le \frac{\min\left(h_1, h_2, h_3, h_4, l_1, l_2, l_3\right)}{c}$$

ГЛАВА 5. ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОМЕРНЫХ И ДВУМЕРНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ТЕОРИИ ПЛАСТИН ТИПА ТИМОШЕНКО

Система уравнений теории пластин типа Тимошенко:

$$\begin{cases} a\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial^2 w}{\partial \text{т}^2}=0, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\dfrac{12a}{\eta^2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)-\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \text{т}^2}=0. \end{cases}$$

Системе эквивалентно уравнение

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{12a}{\eta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \text{т}^2}-\left(1+\frac{1}{a}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \text{т}^2}+\frac{1}{a}\frac{\partial^4 w}{\partial \text{т}^4}=0.$$

конечно-разностная схема

$$\Phi(w,\psi) = a(D_{11}w + D_{01}\psi) - D_{\text{тт}}w = 0$$

$$\Lambda(w,\psi) = D_{11}\psi - \frac{12a}{\eta^2}(D_{01}w + \psi) - D_{\text{тт}}w = 0$$

вариационно-разностная схема

$$\Phi(w,\psi) = a(D_{11}w + D_{01}\psi) - D_{\text{тт}}w = 0$$

$$\Lambda'(w,\psi) = D_{11}\psi - \frac{12a}{\eta^2}(D_{01}w + D_{00}\psi) - D_{\text{тт}}w = 0 \quad ,$$

и схема линейного конечного элемента

$$\Phi(w,\psi) = a(D_{11}w + D_{01}\psi) - D_{\text{тт}}w = 0$$

$$\Lambda''(w,\psi) = D_{11}\psi - \frac{12a}{\eta^2}\left(D_{01}w + D_{00}\psi - \frac{h_1^2}{12}D_{11}\psi\right) - D_{\text{тт}}w = 0$$

где D_{00}, $D_{01} = D_{10}$, D_{11} – система разностных операторов:

$$\left(D_{00}f\right)_j = \frac{1}{4}\left(f_{j-1} + 2f_j + f_{j+1}\right), \quad \left(D_{01}f\right)_j = \frac{1}{2\Delta x}\left(f_{j+1} - f_{j-1}\right), \quad \left(D_{11}f\right)_j = \frac{1}{\Delta x^2}\left(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}\right)$$

.

Преобразуем системы сеточных уравнений в одно сеточное уравнение:

Конечно-разностная схема:

$$\left(1 + 3a\left(\frac{\Delta x}{\eta}\right)^2\right)D_{11}D_{11}w + \frac{12}{\eta^2}D_{\text{тт}}w - \left(1 + \frac{1}{a}\right)D_{11}D_{\text{тт}}w + \frac{1}{a}D_{\text{тт}}D_{\text{тт}}w = 0. \qquad (5.6)$$

Вариационно-разностная схема:

$$D_{11}D_{11}w + \frac{12}{\eta^2}D_{00}D_{\text{тт}}w - \left(1 + \frac{1}{a}\right)D_{11}D_{\text{тт}}w + \frac{1}{a}D_{\text{тт}}D_{\text{тт}}w = 0. \qquad (5.7)$$

Схема линейного КЭ:

$$\left(1 + a\left(\frac{\Delta x}{\eta}\right)^2\right)D_{11}D_{11}w + \frac{12}{\eta^2}D_0^*D_{\text{тт}}w - \left(1 + \frac{1}{a}\right)D_{11}D_{\text{тт}}w + \frac{1}{a}D_{\text{тт}}D_{\text{тт}}w = 0. \qquad (5.8)$$

Исследуем устойчивость уравнений методом гармоник. Будем искать решение в виде

$$w_j = \exp\left(i\left[\alpha j + \omega \tau\right]\right).$$

Конечно-разностная схема:

Оценка устойчивости:

$$\tau \le \frac{2}{\omega\left(\lambda^*\right)}.$$

где $\lambda^* = \dfrac{12a(a+1)}{\eta^2\left[\dfrac{4a}{\Delta x^2}\left(1+3a\left(\dfrac{\Delta x}{\eta}\right)^2\right)-\left(\dfrac{a+1}{\Delta x^2}\right)^2\right]}.$

Вариационно-разностная схема:

.

оценка устойчивости:

$$\tau \le \begin{cases} \Delta x, & \dfrac{\Delta x}{\eta} \le \left(\dfrac{1}{3a} - \dfrac{1}{3}\right)^{1/2} \\ \eta/\sqrt{3a}, & \dfrac{\Delta x}{\eta} \ge \left(\dfrac{1}{3a} + \dfrac{1}{3}\right)^{1/2} \\ 2/\omega(\lambda_0), & \dfrac{\Delta x}{\eta} \in \left[\left(\dfrac{1}{3a} - \dfrac{1}{3}\right)^{1/2}, \left(\dfrac{1}{3a} + \dfrac{1}{3}\right)^{1/2}\right]. \end{cases}$$

где

$$\lambda_0 = \frac{12a\left(\dfrac{\Delta x}{\eta}\right)^2\left[3a\left(\dfrac{\Delta x}{\eta}\right)^2 - a - 1\right]}{\left[3a\left(\dfrac{\Delta x}{\eta}\right)^2 - a - 1\right]^2 - 4a}$$

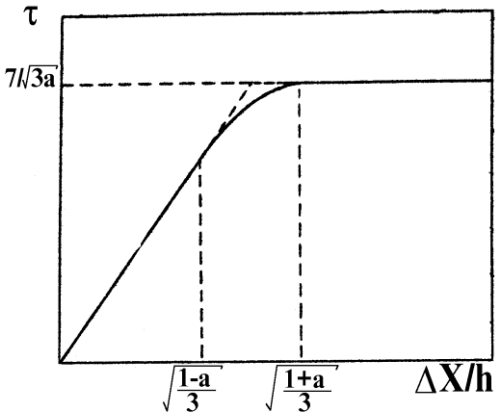


График оценки устойчивости вариационно-разностной схемы

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ. ЯВНО-НЕЯВНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ

6.1 Регуляризация численных схем теории пластин и оболочек

$$a\left(D_{11}w + D_{01}\psi\right) - D_{TT}w = 0,\ D_{11}\psi - \frac{12a}{\eta^2}\left(D_{10}w + D_{00}\psi\right) - AD_{TT}\psi = 0,$$

где A - регуляризирующий множитель. Множитель A должен быть выбран таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\omega_{\max} \le 2/\Delta x,$$

Необходимое условие на множитель A:

$$A \ge 1 + 3a\left(\frac{\Delta x}{\eta}\right)^2$$

Множитель A, удовлетворяющий неравенству (7.5), будем выбирать таким образом, чтобы значения погрешностей собственной частоты регуляризованной полудискретной системы в существенной части спектра были минимальными. То есть будем определять A из условия минимума выражения

$$\delta_A = \frac{\omega_A^* - \omega_0}{\omega_0},$$

где

$$\omega_A^* = \left\{ \frac{3a}{A\,\eta^2}(2-\lambda) + \left(a + \frac{1}{A}\right)\frac{\lambda}{\Delta x^2} + \left[\left(\frac{3a}{A\,\eta^2}(2-\lambda) + \left(a + \frac{1}{A}\right)\frac{\lambda}{\Delta x^2} \right)^2 - \frac{4\,a\,\lambda^2}{A\,\Delta x^4} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

- собственная частота регуляризованной полудискретной системы

(здесь $\lambda = 2\sin^2(\pi\Delta x / 2)$),

$$\omega_0 = \left\{ \frac{6a}{\eta^2} + \frac{a+1}{2}\pi^2 + \left[\left(\frac{6a}{\eta^2} + \frac{a+1}{2}\pi^2 \right)^2 - a\pi^4 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Таким образом, окончательно получаем, что регуляризирующий множитель нужно выбирать в виде

$$A = \begin{cases} 1, & \Delta X/h \le 1 \\ \left(1 + (\Delta X/h)^2\right)^{-1}, & \Delta X/h \ge 1 \end{cases}$$

При этом асимптотические значения погрешностей собственной частоты регуляризованной разностной схемы равны

$$\delta_A = \frac{7\pi^4}{120}\left(\frac{\Delta X}{L}\right)^4,$$

в то время как для исходной схемы те же погрешности имеют вид:

$$\delta^{**} = \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{\Delta X}{L}\right)^2 .$$

Таким образом, приходим к выводу, что в нижней части спектра (а только она и необходима в задачах теории оболочек) регуляризованная разностная схема оказалась точнее исходной.

Рассмотрим результаты решения задачи [14] о раскрытии плоской стержневой системы (рис. 7.7), состоящей из трех гибких стержней, соединенных последовательно с помощью специальных шарниров. Моделируется принудительный взаимный поворот смежных стержней. Конструктивная схема, размеры и условия раскрытия взяты из доклада [15] А.Н. Данилина. Все стержни имеют одинаковую длину $L=2$м, поперечное сечение квадратное со стороной $d=10^{-2}$м. Материал – Д16Т с характеристиками: модуль упругости $E=0.72\cdot10^{5}$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu=0.3$, плотность $\rho=2800$ кг/м^3. Задача решалась в упругой постановке.

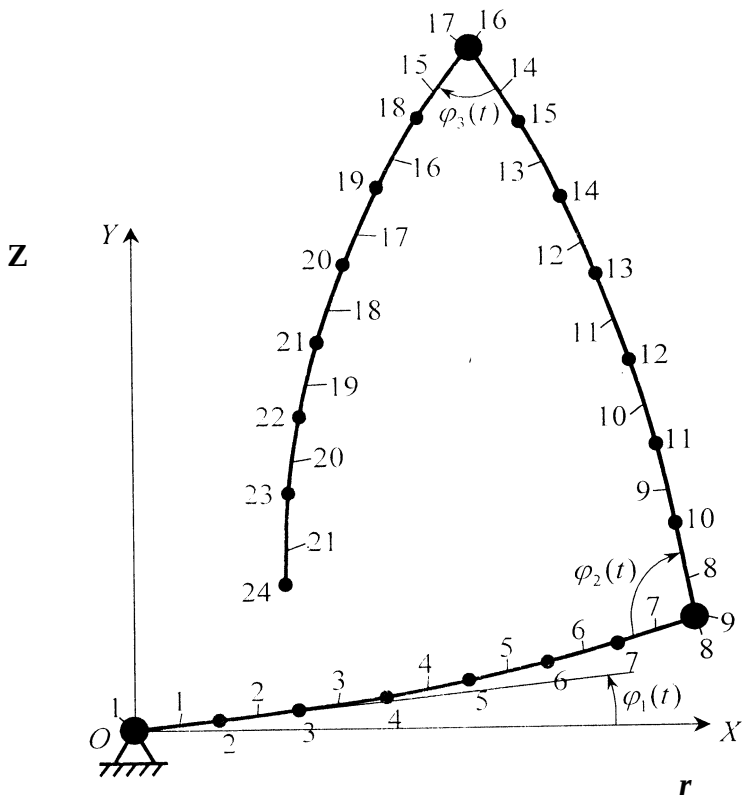


Рис.7.7

$\varphi_1 = 0$ при $0 \le t \le 5$

$\varphi_1 = -\frac{(t-5)}{10}\frac{\pi}{2}$ при $5 < t \le 15$

$\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ при $t > 15$

$\varphi_2 = \frac{t}{5}\pi$ при $0 \le t \le 5$

$\varphi_2 = \pi$ при $t > 5$

$\varphi_3 = 0$ при $0 \le t \le 5$

$\varphi_3 = \frac{(t-5)}{5}\pi$ при $5 < t \le 10$

$\varphi_3 = \pi$ при $t > 10$

(время задано в секундах)

В исходном состоянии перемещения и напряжения в стержневых элементах равны нулю. Система упакована таким образом, что все стержни сложены и располагаются на оси r общего базиса, углы $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = 0$. Граничные условия задаются в виде $\dot{u}_r^{(1)}(0,t) = \dot{u}_z^{(1)}(0,t) = 0,\ \dot{u}_\varphi^{(1)}(0,t) = \dot{\varphi}_1(t)$ для первого стержня и $P_r^{(3)}(t) = P_z^{(3)}(t) = P_\varphi^{(3)}(t) = 0$ на свободном конце *(s=L)* третьего стержня системы. Раскрытие осуществляется в результате заданного закона изменения углов $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \varphi_3(t)$. Положительным считается вращение по часовой стрелке. Анализ влияния регуляризации разностной схемы проводился на задаче о малых поперечных колебаниях консольного стержня под действием внезапно приложенной нагрузки, соответствующей первой форме собственных колебаний. Размеры стержня принимались те же, что и в задаче о подборе шага сетки. Задача решалась в двух

вариантах: без регуляризации численной схемы и с регуляризацией при шаге по времени, равном 0,97 от предельного, полученного из условия Куранта.

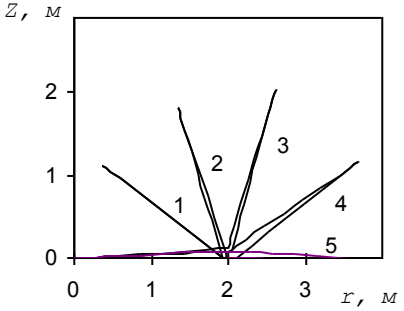


Рис.7.8а

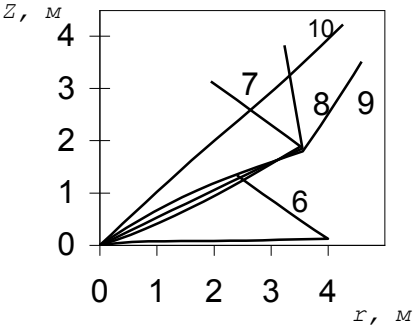


Рис.7.8б

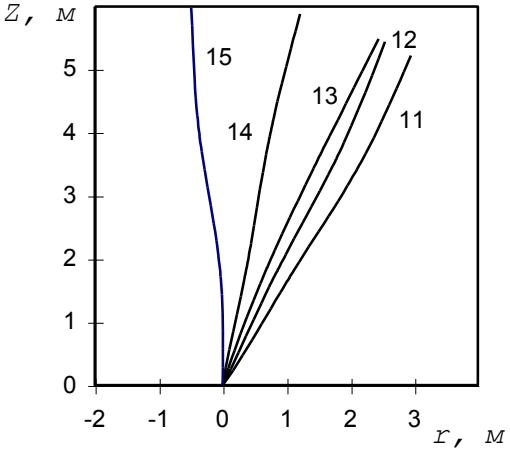


Рис.7.8в

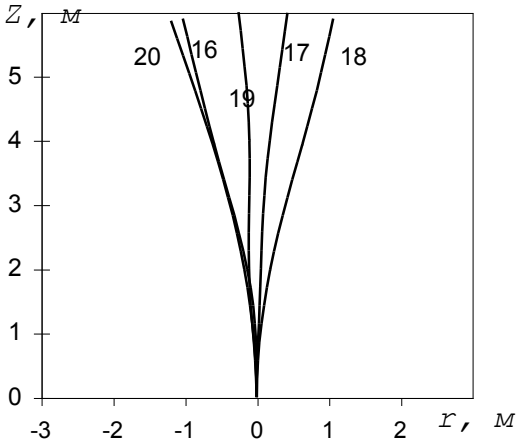


Рис.7.8г

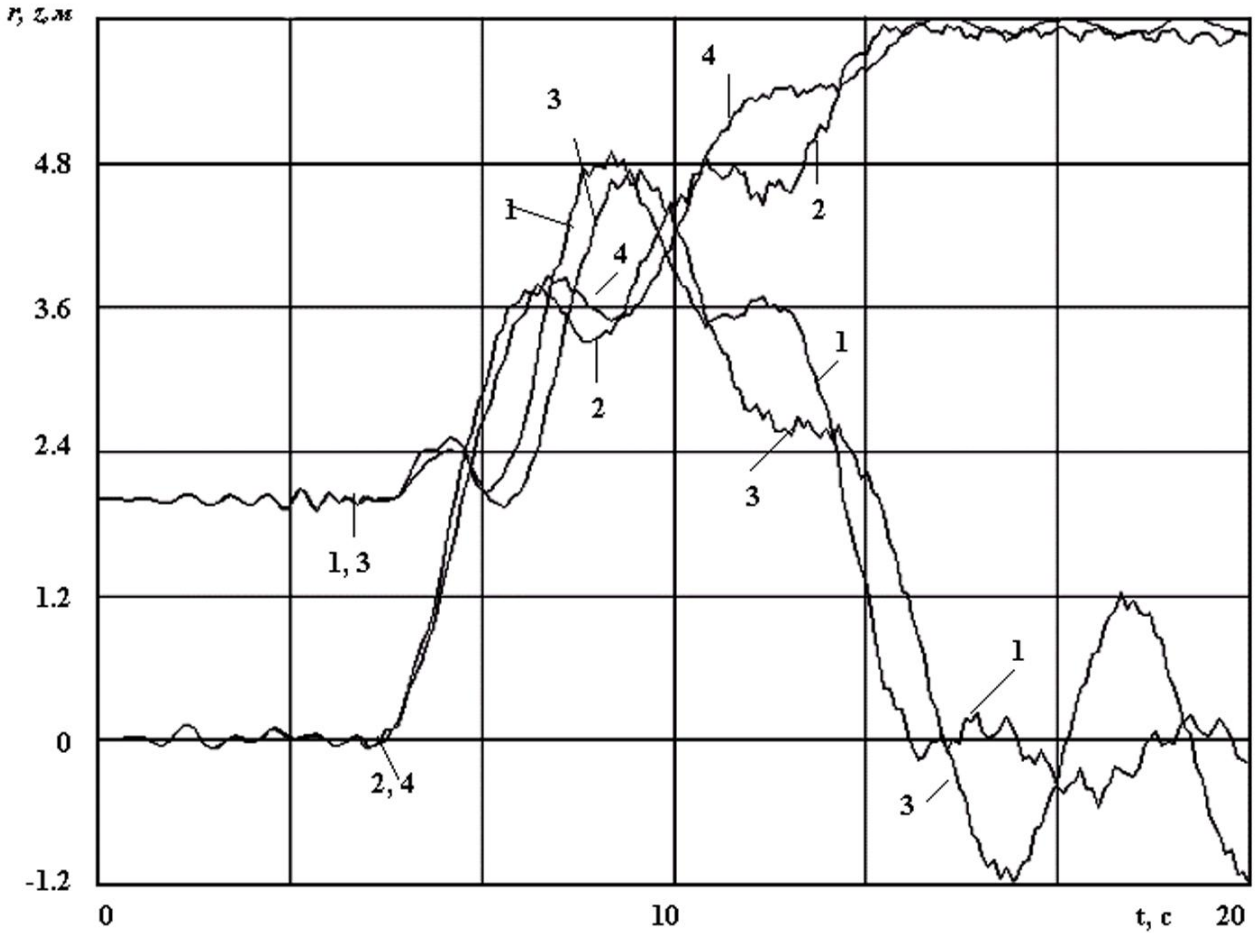

r, z, м
4.8
3.6
2.4
1.2
0
-1.2
0
10
t, c
20
1
2
3
4
1, 3
2, 4

Рис. 7.9

Результаты, полученные по схеме с регуляризацией находятся в хорошем соответствии с расчетными данными работы [15], где применяется метод продолжения решения по наилучшему параметру и неявная схема. Явная схема при описании колебаний конструкций при больших перемещениях приводит к накоплению ошибок и заметному искажению как формы колебаний конструкции, так и амплитудно-частотных характеристик после полного раскрытия. Регуляризация позволяет заметно расширить возможности явной схемы, повысить точность и эффективность расчетов.

Выпучивание пологих сферических куполов, квадратных в плане, под действием импульса давления

Рассматривается неосесимметричная задача выпучивания упругого и упругопластического куполов под действием мгновенно приложенного постоянного внешнего давления. Постановка задачи аналогична рассмотренной в предыдущем параграфе. Квадратный в плане купол имеет размеры: сторона квадрата L=0.656 м, стрела подъема H=0.545 м, толщина считалась переменной – функцией параметра пологости. Геометрические размеры рассматриваемого в настоящей задаче купола соотносятся с размерами купола, рассмотренного в предыдущем параграфе следующим образом. Квадратная в плане оболочка является частью круглой в плане оболочки, ограниченной вписанным в данный круг квадратом. λ - параметр пологости. Характеристики материала - те же: E=73.0 ГПа, ρ=2б50 кг/м^3, ν=0.3, $G_т$=0.37 ГПа, g=0.3 ГПа. При постановке задачи оболочка считалась пологой, то есть метрика оболочки отождествлялась с метрикой плоскости, коэффициенты Ламе полагались равными

единице, а расчетная область в местной системе координат α_1, α_2 - квадратом. Так как оболочка имеет четыре плоскости симметрии и нагрузка также симметрична, рассчитывалась одна восьмая часть оболочки. Расчетная область представлена на рис. Использовалась сетка из квадратных ячеек с 17 узлами на половину стороны квадрата. Предварительные расчеты на сетке с 25 узлами вдоль половины стороны квадрата показали хорошую сходимость решения. Отличие по максимальным прогибам составило не более 2%. Так же, как и в предыдущей задаче, расчеты проводились для ограниченного промежутка времени $t * c * k<40$,. так как на практике колебания затухают за счет диссипации энергии.

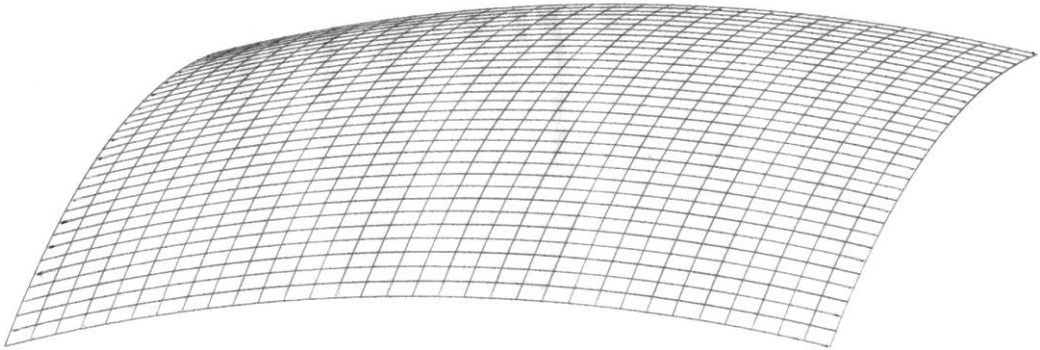
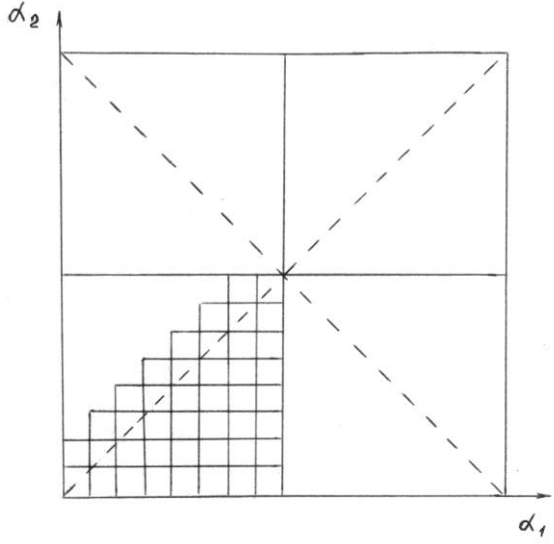


Рис. 7.17

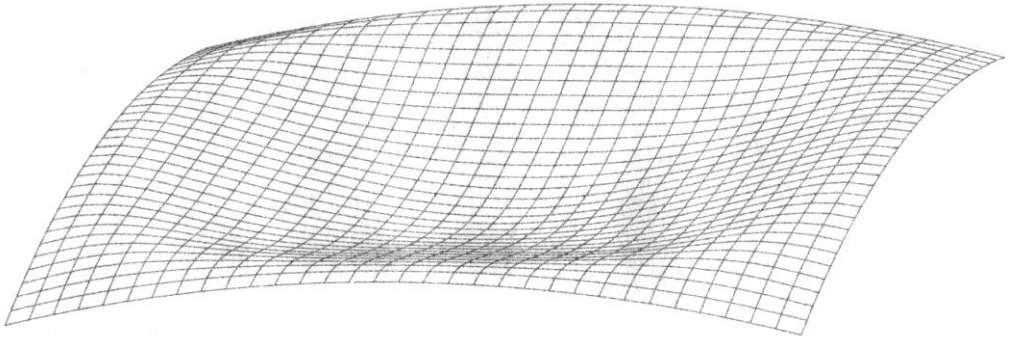


7.18

Результаты исследования показали, что для достаточно толстых (с $\lambda<9$ для упругих и $\lambda<8$ для упругопластических) оболочек прощелкивание происходит по форме,

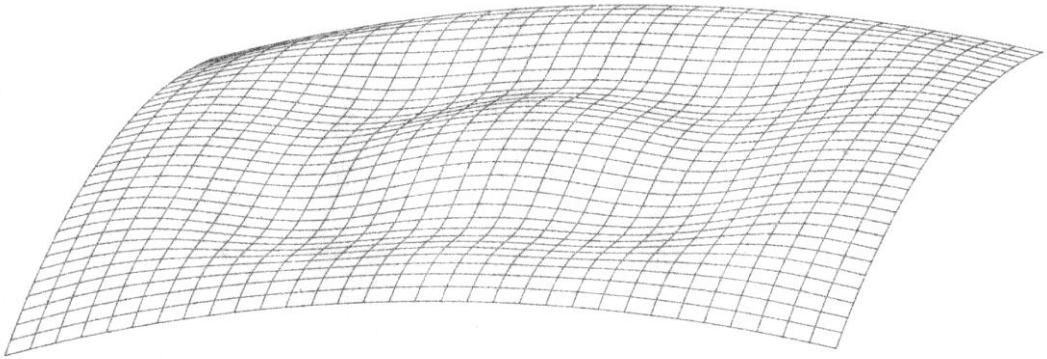
близкой к осесимметричной с образованием вмятины в центре оболочки. Для более тонких оболочек выпучивание происходит с образованием кольцевой складки, которая в дальнейшем (после прощелкивания) трансформируется в форму с вмятиной в центре Вследствие неосесимметричности отражения изгибных волн от края оболочки на осесимметричную форму накладывается неосесимметричная с четырьмя вмятинами по окружности. Неосесимметричность выпучивания усиливается по мере уменьшения толщины оболочки (увеличения λ).

Геометрия деформированных упругих и упругопластических оболочек со значениями параметра пологости 6-12 в некоторые характерные моменты времени представлена на рис. 7.19 - 7.28. На всех рисунках размеры оболочки по координате X^3 увеличены от трех до десяти раз.



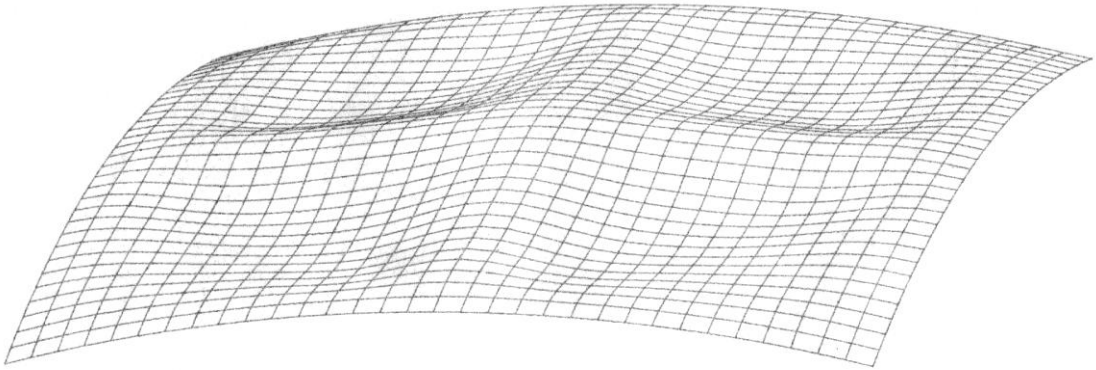
$\lambda = 7$

Рис. 7.19



$\lambda = 9$

Рис. 7.20



$\lambda = 11$

Рис. 7.21

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баженов, В.Г. Вариационно-разностные схемы в нестационарных волновых задачах динамики пластин и оболочек / В.Г. Баженов, Д.Т. Чекмарев. - Н.Новгород: Изд-во Нижегор. ун-та, 1992. - 159с.
2. Баженов, В.Г. Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом / В.Г. Баженов, Д.Т Чекмарев. - Н.Новгород: Изд-во Нижегор. ун-та, 2000. – 159с.
3. Баженов, В.Г. Оценки устойчивости явной конечно-разностной схемы “крест” решения нестационарных задач теории упругости и теории оболочек / В.Г. Баженов, Д.Т Чекмарев // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. – Горький, 1984. – С. 42 - 49.

4. Чекмарев, Д.Т. “Ажурные” схемы метода конечного элемента / Д.Т. Чекмарев // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико – механических процессов: Межвуз. сб. - М.: ТНИ КМК, 1997. – С36 - 39.
5. Чекмарев, Д.Т. Граничная неустойчивость численных решений трехмерных динамических задач теории упругости / Д.Т. Чекмарев // Вестник ННГУ. Серия Механика, 2004. - вып. 1 (6). – С. 84 - 90.
6. Чекмарев, Д.Т. Построение конечно-разностных схем, эквивалентных численным схемам метода конечного элемента / Д.Т. Чекмарев // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико – механических процессов: Межвуз. сб. - М.: ТНИ КМК, 1997. – С. 14 - 21.
7. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук. – М.: Наука, 1989. – 608с.

8. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика, т. VII. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. – М.: Наука, 1987. – 248с.
9. Самарский, А.А. Численные методы. / А.А. Самарский, А.В Гулин. М: Наука, 1989. – 365с.
10. Марчук Г.И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988. 263 с.
11. . Абросимов Н.А., Баженов В.Г.Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н.Новгород: Издательство ННГУ, 2002. 400 с.
12. Баженов В.Г., Кибец А.И., Тулинцев О.В. Применение моментной схемы МКЭ для анализа нелинейных трехмерных задач динамики массивных и оболочечных элементов конструкций // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения. Нижний Новгород: изд-во Нижегор. ун-та, 1991. Вып. 47. С. 46-53.

13. Шешенин С.В., Минхуэй Фу. Полунеявный метод решения задач теории упругости для тонкостенных осесимметрических тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1995. № 5. С. 78-85.
14. Баженов В.Г., Ломунов В.К. Методика расчета динамического деформирования геометрически изменяемых плоских стержневых систем // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз.сб., 2002, Вып. 64, с. 55-63
15. Данилин А.Н., Марков А.В. Моделирование динамики развертывания гибких стержневых систем при различных способах изменения их начальной геометрии // Материалы VIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» (Ярополец 11 – 15 февраля 2002 г.). Москва. 2002, с. 61