ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНТЕРНЕТ-ЭКЗАМЕН
В СФЕРЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ

Издательство
Казанского государственного университета
2008

УДК 004.738.5:330.4
Х65

*Печатается по решению заседания Ученого совета
Филиала КГУ в г. Зеленодольске
Протокол № 9 от 09 сентября 2008г.*

Х65 Хмельницкая А.В., Яшагин Е.И.
Федеральный Интернет-экзамен в сфере профессионального образования. Математика. Математические методы в экономике. А.В.Хмельницкая, Е.И.Яшагин. – Казань: Издательство КГУ, 2008. – 32 с.

Пособие содержит разобранный демонстрационный вариант Интернет-экзамена и два подобных варианта для самостоятельного решения по дисциплине «Математика» для обучающихся по специальности «Математические методы в экономике». Ко всем заданиям даны ответы.

Приведённый материал может быть использован факультетами вузов, выпускающих соответствующих специалистов, а также студентами для самоподготовки и самоконтроля.

Предисловие

В сентябре 2003 года на Берлинской конференции Российская Федерация присоединилась к Болонскому процессу, обязавшись до 2010 года воплотить в жизнь основные его принципы. Одной из ключевых позиций этого процесса является контроль качества образования. Во многих странах, в частности, имеет место тестовый контроль полученных студентами знаний и навыков.

В настоящее время на территории нашего государства уже проводятся срезы знаний в виде Интернет-экзамена студентов тех вузов, которые готовятся к прохождению лицензирования. Именно с этим и связано написание данного пособия. Оно содержит в себе разобранный демонстрационный вариант и два подобных варианта для самостоятельного решения по дисциплине «Математика» для обучающихся по специальности «Математические методы в экономике». В тест включены задания следующих курсов: линейная алгебра, аналитическая геометрия, математический анализ, дифференциальные уравнения, теория вероятностей, математическая статистика. Время выполнения данного теста – 80 минут, количество заданий – 30. Следует отметить, что во время прохождения Интернет-экзамена на экране перед каждым ответом из предложенного набора могут стоять разные знаки, предполагающие выбор одного ответа, выбор нескольких ответов из перечисленных, указание последовательности или соответствия. Также не стоит удивляться, если будет предложено другое количество заданий. Разумеется, приведённые в этом пособии тестовые задания не являются исчерпывающими (как и демонстрационный вариант ЕГЭ по математике), но дают представление о том, с чем может столкнуться студент при подобном контроле знаний и навыков. Обучающийся может самостоятельно проверить свои остаточные знания (до того, как просмотрит решение демонстрационного варианта). Факультеты, выпускающие соответствующих специалистов, также могут провести предварительное тестирование своих подопечных, используя предложенные варианты.

Поскольку тестирование студентов проводится на компьютере, то нумерация вариантов ответа отсутствует, так как выбранные ответы просто помечаются. Поэтому в демонстрационном тесте предлагаемые ответы приведены в порядке перечисления. Варианты же для самостоятельного решения мы снабдили нумерацией ответов, чтобы можно было свериться с правильным выбором результата вычислений. Все приведённые задания предполагают выбор одного правильного ответа.

Демонстрационный вариант

Задание №1. Определитель $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ равен…

Варианты ответов: 1, –1, –5, 5.

Решение. Используем разложение по третьей строке:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-2\cdot 1 - 1\cdot 3) = 5.$$

Ответ: 5.

Задание №2. Дана матрица $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. Тогда её собственные значения равны…

Варианты ответов: $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$; $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$; $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$; $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$.

Решение. Вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(-3-\lambda) - 4\cdot(-1) = -6 - 2\lambda + 3\lambda + \lambda^2 + 4 = \lambda^2 + \lambda - 2.$$

Приравняв его к нулю и решив полученное уравнение, найдём собственные значения:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1.$$

Ответ: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$.

Задание №3. Если (x_0, y_0) – решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x + 2y = -3, \\ 3x + 2y = 5, \end{cases}$ тогда $x_0 - y_0$ равно…

Варианты ответов: –7,5; –0,5; 7,5; 0,5.

Решение. Для нахождения значения переменной x вычтем второе уравнение из первого, а первое уравнение перепишем без изменений:

$$\begin{cases} x+2y=-3, \\ -2x=-8; \end{cases} \begin{cases} 4+2y=-3, \\ x=4; \end{cases} \begin{cases} 2y=-7, \\ x=4; \end{cases} \begin{cases} y=-3{,}5, \\ x=4; \end{cases} \Rightarrow x_0=4, y_0=-3{,}5.$$

Тогда $x_0-y_0=4-(-3{,}5)=7{,}5$.

Ответ: 7,5.

Задание №4. Если $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, тогда матрица $C=A\cdot B$ имеет вид…

Варианты ответов: $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Перемножим матрицы в указанном порядке

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\cdot 1+1\cdot 2 \\ 0\cdot 1+4\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow C=\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Задание №5. Если уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, то длина её действительной полуоси равна…

Варианты ответов: 16, 9, 3, 4.

Решение. Уравнение гиперболы задано в каноническом виде. Следовательно, в знаменателе первой дроби (при числителе x^2) стоит квадрат искомой величины. Значит, длина действительной полуоси равна $\sqrt{9}=3$.

Ответ: 3.

Задание №6. Нормальный вектор плоскости $x-4y-8z-3=0$ имеет координаты…

Варианты ответов: $(1;-4;8)$, $(1;-4;-8)$, $(1;-4;-3)$, $(-4;-8;-3)$.

Решение. Уравнение плоскости задано в общем виде. Следовательно, коэффициенты при неизвестных соответствуют координатам вектора, перпендикулярного данной плоскости.
Ответ: $(1;-4;-8)$.

Задание №7. Уравнение прямой, проведённой из точки N(2;0;–1) перпендикулярно плоскости $2x+3y-z+5=0$, имеет вид…

Варианты ответов: $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{5}$, $\frac{x+2}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{5}$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{3}=\frac{-z+1}{1}$.

Решение. Нормальный вектор плоскости имеет координаты $(2;3;-1)$. Следовательно, каноническое уравнение искомой прямой в пространстве запишется в виде

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-0}{3}=\frac{z-(-1)}{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}.$$

Ответ: $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$.

Задание №8. Даны точки $A(2;3)$ и $B(-6;5)$. Тогда координаты середины отрезка AB равны…

Варианты ответов: $(-2;8)$, $(-2;4)$, $(4;8)$, $(4;1)$.

Решение. Пусть точка $C(x_C, y_C)$ – середина отрезка AB. Тогда

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2+(-6)}{2}=-2, \quad y_C=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{3+5}{2}=4.$$

Ответ: $(-2;4)$.

Задание №9. Наименьшее значение функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{2}{3}$ на отрезке $[-1;1]$ равно…

Варианты ответов: $-\frac{2}{3}$, 0, $-\frac{4}{3}$, –2.

Решение. Найдём стационарные точки, принадлежащие указанному отрезку:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2x = x^2 - 2x = x(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = 0 \in [-1;1], \\ x = 2 \notin [-1;1]. \end{matrix}$$

Вычислим значение функции в найденной стационарной точке и на границах отрезка:

$$f(0) = \frac{1}{3}0^3 - 0^2 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3},$$

$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} - 1 - \frac{2}{3} = -2,$$

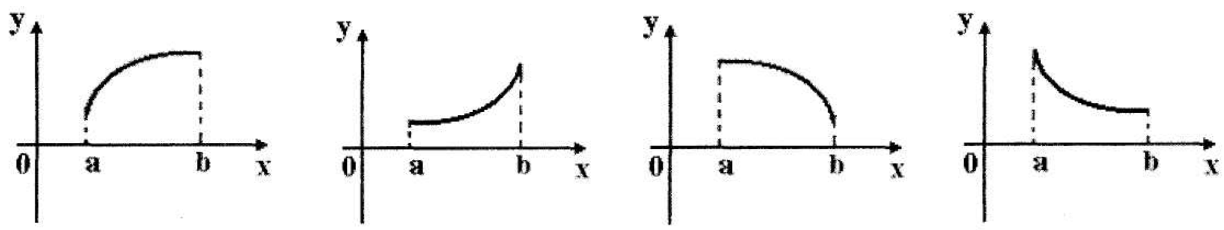
$$f(1) = \frac{1}{3}1^3 - 1^2 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - 1 - \frac{2}{3} = -1\frac{1}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Из трёх полученных значений $f(-1) = -2$ – наименьшее.

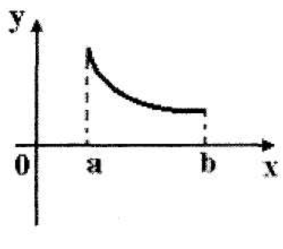
Ответ: –2.

Задание №10. Укажите вид графика функции, для которой на всём отрезке $[a;b]$ одновременно выполняются условия: $y > 0$, $y' < 0$, $y'' > 0$.

Варианты ответов:



Решение. Условие $y > 0$ говорит о том, что график функции расположен в верхней полуплоскости, то есть лежит выше оси абсцисс. Второе условие $y' < 0$ характеризует монотонно убывающую функцию. Наконец, последнее условие $y'' > 0$ указывает на выпуклость вниз искомой функции.

Ответ: 

.

Задание №11. Частная производная функции $z = x^4 \cos y$ по переменной y в точке $M\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$ равна…

Варианты ответов: 0, 4, –1, 1.

Решение. Вычислим производную по y функции $z(x, y)$:

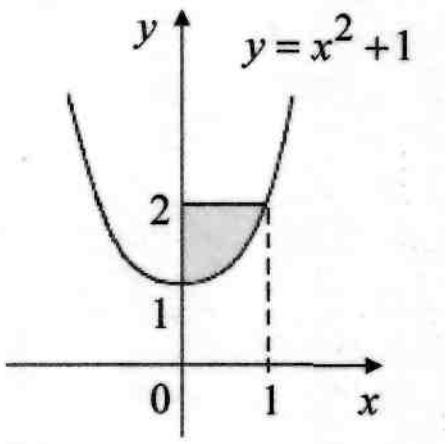
$$z_y = (x^4 \cos y)_y = x^4 (\cos y)_y = -x^4 \sin y .$$

Подставим координаты точки M:

$$z_y\left(1; \frac{\pi}{2}\right) = -1^4 \sin\frac{\pi}{2} = -1 \cdot 1 = -1 .$$

Ответ: –1.

Задание №12. Площадь фигуры, изображённой на рисунке, определяется интегралом…



Варианты ответов: $\int\limits_0^1 \left(1 - x^2\right) dx$, $\int\limits_0^1 \left(2 - x^2\right) dx$, $\int\limits_0^2 \left(1 - x^2\right) dx$, $\int\limits_0^1 \left(x^2 + 1\right) dx$.

Решение. Изображённая фигура ограничена сверху прямой $y = 2$, снизу ограничена параболой $y = x^2 + 1$, при этом $0 \le x \le 1$. Следовательно, площадь этой фигуры вычисляется по формуле

$$\int\limits_0^1 \left(2 - (x^2 + 1)\right) dx = \int\limits_0^1 \left(2 - x^2 - 1\right) dx = \int\limits_0^1 \left(1 - x^2\right) dx .$$

Ответ: $\int\limits_0^1 \left(1-x^2\right)\, dx$.

Задание №13. Закон движения материальной точки имеет вид $x(t)=4+10t+e^{7-t}$, где $x(t)$ – координата точки в момент времени t. Тогда скорость точки при $t=7$ равна…

Варианты ответов: 13, 75, 9, 11.

Решение. Скорость точки в произвольный момент времени t определяется первой производной

$$x'(t)=\left(4+10t+e^{7-t}\right)'=10+e^{7-t}\cdot(7-t)'=10-e^{7-t}.$$

Тогда скорость точки при $t=7$ равна

$$x'(7)=10-e^{7-7}=10-e^{0}=10-1=9.$$

Ответ: 9.

Задание №14. Множество первообразных функции $f(x)=e^{2x+3}$ имеет вид…

Варианты ответов: $2e^{2x+3}+C$, $-\frac{1}{2}e^{2x+3}+C$, $e^{2x+3}+C$, $\frac{1}{2}e^{2x+3}+C$.

Решение.

$$\int e^{2x+3}dx=\frac{1}{2}\int e^{2x+3}d(2x)=\frac{1}{2}\int e^{2x+3}d(2x+3)=\frac{1}{2}e^{2x+3}+C.$$

Ответ: $\frac{1}{2}e^{2x+3}+C$.

Задание №15. Общий член последовательности $1,\frac{3}{4},\frac{5}{9},\frac{7}{16},\ldots$ имеет вид …

Варианты ответов: $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n^2}$, $a_n = \dfrac{2n-1}{n^2}$,

$a_n = (-1)^n \dfrac{2n-1}{n^2}$, $a_n = \dfrac{2n+1}{n^2}$.

Решение. Очевидно, в знаменателях стоят квадраты натуральных чисел, в числителях – нечётные числа. Все члены последовательности положительны. Этому условию не удовлетворяют первый и третий варианты. Чтобы выбрать запись нечётных чисел между вариантами $2n-1$ и $2n+1$, достаточно проверить, какой из них соответствует записи числителя, например, второго члена заданной последовательности. Подставим $n=2$ последовательно в эти варианты. Получим 3 и 5 соответственно. Следовательно, числитель нашей последовательности записывается в виде $2n-1$.

Ответ: $a_n = \dfrac{2n-1}{n^2}$.

Задание №16. Укажите правильное утверждение относительно сходимости числовых рядов $A)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ и $B)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Варианты ответов: А – расходится, В – сходится; А и В расходятся; А – сходится, В – расходится; А и В сходятся.

Решение. Проверим выполнение необходимого условия сходимости рядов:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \left\{\frac{1}{\infty}\right\} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \left\{\frac{1}{\infty}\right\} = 0.$$

Следовательно, необходимое условие выполняется для обоих рядов, о сходимости пока что нельзя сделать никакого вывода. Оба ряда являются знакопостоянными. Применим достаточный признак Коши к первому ряду:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится.}$$

Ко второму ряду применим признаки сравнения:

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, ряд расходится.

Ответ: А – сходится, В – расходится.

Задание №17. Если $f(x) = x^3 - 1$, то коэффициент $\boldsymbol{a_4}$ разложения данной функции в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ равен…

Варианты ответов: 1; 0,25; 3; 0.

Решение. Формула разложения функции в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad \text{где } a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

В нашем случае $x_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_4 = \frac{f^{(4)}(1)}{4!} = \frac{f^{(4)}(1)}{24}$. Вычислим производную четвёртого порядка:

$$f'(x) = \left(x^3 - 1\right)' = 3x^2, \quad f''(x) = \left(3x^2\right)' = 6x, \quad f'''(x) = (6x)' = 6,$$

$$f^{(4)}(x) = (6)' = 0.$$

Тогда $a_4 = 0$.

Ответ: 0.

Задание №18. Сумма числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ равна…

Варианты ответов: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{625}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{5}$.

Решение. Вообще сумма ряда определяется по формуле $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ – частная сумма ряда. Но перед нами ряд, определяющий сумму всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой $b_1 = \frac{1}{5}$, знаменатель $q = \frac{1}{5}$. Тогда по известной формуле

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{5-1} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Задание №19. Дифференциальное уравнение $y^2 y' + 2x - 1 = 0$ является…

Варианты ответов: однородным дифференциальным уравнением, дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, линейным неоднородным дифференциальным уравнением, уравнением Бернулли.

Решение. Поскольку при y' стоит y^2, уравнение не является линейным. Вдобавок к этому переменная y больше не встречается ни в одном слагаемом уравнения. Следовательно, четвёртый вариант (уравнение Бернулли) тоже отпадает. Преобразуем заданное уравнение, запишем его в дифференциалах:

$$y^2 \frac{dy}{dx} + 2x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; y^2 dy + (2x-1)dx = 0.$$

Теперь очевидно, что данное уравнение с разделяющимися переменными.

Ответ: дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Задание №20. Дано дифференциальное уравнение $y' = (k+1)x^2$, тогда функция $y = x^3$ является его решением при k равном…

Варианты ответов: 3, 2, 1, 0.

Решение. Для нахождения k достаточно функцию $y = x^3$ подставить в дифференциальное уравнение и из получившегося тождества найти значение параметра:

$$\left(x^3\right)' = (k+1)x^2 \;\Rightarrow\; 3x^2 = (k+1)x^2 \;\Rightarrow\; 3 = k+1 \;\Rightarrow\; k = 2.$$

Ответ: 2.

Задание №21. Дано линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$, тогда его общее решение имеет вид…

Варианты ответов: $C_1e^{2x} + C_2e^{x}$, $C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$, $C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$, $C_1e^{-2x} + C_2e^{x}$.

Решение. Найдём корни характеристического уравнения:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -2,\;\; \lambda_2 = 1.$$

Следовательно, общее решение данного дифференциального уравнения запишется в виде $C_1e^{-2x} + C_2e^{x}$.

Ответ: $C_1e^{-2x} + C_2e^{x}$.

Задание №22. Частному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 6y = x + 1$ по виду его правой части соответствует функция…

Варианты ответов: $y = Ae^{2x} + Be^{3x}$, $y = Ax^2 + Bx$, $y = Ax + B$, $y = e^{2x}(Ax + B)$.

Решение. Сначала найдём корни характеристического уравнения:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 2,\;\; \lambda_2 = 3.$$

Поскольку правая часть уравнения не содержит тригонометрических функций, то частное решение дифференциального уравнения следует искать в виде $x^k e^{\lambda x} P_n(x)$, где k – это кратность корня λ характеристического уравнения, n – степень многочлена в правой части уравнения. В нашем случае $\lambda = 0$ (так как показательная функция в правой части вообще отсутствует), $n = 1$. Но $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения, следовательно, $k = 0$. Тогда частное решение данного дифференциального уравнения запишется в виде $x^0 e^{0x} P_1(x) = Ax + B$.

Ответ: $y = Ax + B$.

Задание №23. Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет ***не менее пяти очков***, равна…

Варианты ответов: $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$.

Решение. Игральная кость имеет шесть граней, на каждой указано количество очков от одного до шести соответственно. Следовательно, число всех исходов равно шести. Чтобы выпало не менее пяти очков, на верхней грани должна оказаться либо пятёрка, либо шестёрка. Таким образом, число благоприятствующих исходов равно двум. Применим формулу классической вероятности $P = \frac{m}{n}$, где n – число всех исходов, m – число благоприятствующих исходов. Тогда $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Задание №24. По оценкам экспертов вероятности банкротства для двух предприятий, производящих однотипную продукцию, равны 0,1 и 0,15. Тогда вероятность банкротства обоих предприятий равна…

Варианты ответов: 0,15; 0,015; 0,765; 0,25.

Решение. Введём обозначения событий: A_1 – банкротство первого предприятия, A_2 – банкротство второго предприятия. Тогда $P(A_1) = 0{,}1$ и $P(A_2) = 0{,}15$. Поскольку эти события независимы, вероятность банкротства обоих предприятий вычисляется по формуле

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Следовательно, искомая вероятность будет равна $0{,}1 \cdot 0{,}15 = 0{,}015$.

Ответ: 0,015.

Задание №25. Вероятность появления события A в 10 независимых испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, равна 0,8. Тогда дисперсия числа появлений этого события равна…

Варианты ответов: 8; 0,16; 1,6; 0,08.

Решение. Используем формулу

$$D(X) = n \cdot p \cdot q,$$

где n – число испытаний, p – вероятность появления события A, q – вероятность появления события $\overline{A}$ (противоположного A). Тогда

$$D(X) = 10 \cdot 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}8) = 8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6.$$

Ответ: 1,6.

Задание №26. В первой урне 3 белых и 7 чёрных шаров. Во второй урне 5 белых и 15 чёрных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Тогда вероятность того, что этот шар окажется белым, равна…

Варианты ответов: $\frac{11}{20}$, $\frac{11}{40}$, $\frac{13}{40}$, $\frac{4}{15}$.

Решение. Введём обозначения событий: A_1 – взяли первую урну, A_2 – взяли вторую урну, B – вынули белый шар, B_1 – из первой урны вынули белый шар, B_2 – из второй урны вынули белый шар. Тогда

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}, \quad P(B_1) = \frac{3}{3+7} = \frac{3}{10}, \quad P(B_2) = \frac{5}{5+15} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

События A_1 и A_2 несовместны, события A_1 и B_1 (A_2 и B_2) независимы. Таким образом, используя формулу умножения вероятностей, получаем

$$P(B) = P(A_1B_1 \cup A_2B_2) = P(A_1B_1) + P(A_2B_2) =$$

$$= P(A_1)\cdot P(B_1) + P(A_2)\cdot P(B_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{20} + \frac{1}{8} = \frac{6+5}{40} = \frac{11}{40}.$$

Ответ: $\frac{11}{40}$.

Задание №27. Из генеральной совокупности объёма $n = 50$ извлечена выборка:

x_i	1	2	3	4
n_i	10	9	8	n_4

.

Тогда n_4 равно…

Варианты ответов: 23, 50, 7, 24.

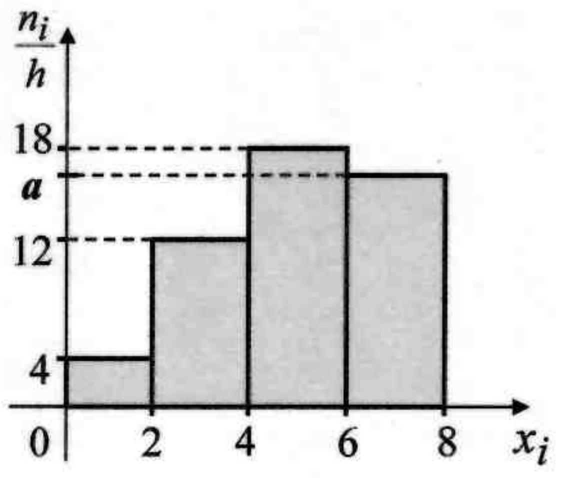
Решение. Для нахождения частоты n_4 используем формулу

$$\sum_{i=1}^{4} n_i = n.$$

Следовательно, $n_4 = n - n_1 - n_2 - n_3 = 50 - 10 - 9 - 8 = 23$.

Ответ: 23.

Задание №28. По выборке объёма $n = 100$ построена гистограмма частот:



Тогда значение ***a*** равно…
Варианты ответов: 15, 16, 66, 17.
Решение. Напомним, что гистограммой называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат отрезки длиной h, а высоты равны $\frac{n_i}{h}$. Тогда площадь под гистограммой

$$S = h \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{h} = n.$$

В нашем случае $h = 2$, $n = 100$, $k = 4$. Тогда

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{4} \frac{n_i}{h} = 100$$

$$4 + 12 + 18 + a = 50$$

$$a = 16.$$

Ответ: 16.

Задание №29. В результате измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 11, 13, 15. Тогда несмещённая оценка дисперсии измерений равна…
Варианты ответов: 3, 13, 4, 8.
Решение. Несмещённая оценка дисперсии вычисляется по формуле

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2,$$

где n – количество измерений, x_i – значения этих измерений, $\overline{x}$ – среднее арифметическое выборки. Вычислим ($n = 3$):

$$\overline{x} = \frac{1}{3}(11 + 13 + 15) = \frac{39}{3} = 13,$$

$$S^2 = \frac{1}{3-1} \cdot \left[(11-13)^2 + (13-13)^2 + (15-13)^2\right] = \frac{1}{2}(4+0+4) = 4.$$

Ответ: 4.

Задание №30. Точечная оценка параметра распределения равна 20. Тогда его интервальная оценка может иметь вид…

Варианты ответов: (19;20), (19;21), (20;21), (0;20).

Решение. Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала, причём сами границы являются функциями от подлежащего наблюдению значения случайной величины. Таким образом, интервальная оценка для θ определяется неравенством $a < \theta < b$, то есть точечная оценка должна лежать обяза-тельно внутри интервала. В данном примере $\theta = 20$. Очевидно, интервальная оценка может иметь вид (19;21). Остальные варианты не подходят, поскольку ни один из предложенных промежутков (кроме уже отмеченного) не содержит саму точечную оценку.

Ответ: (19;21).

Варианты подобных тестов для самостоятельной проверки знаний.

Вариант № 1

Задание №1. Определитель $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ равен…

Варианты ответов: 1) –8; 2) –2; 3) 2; 4) 8.

Задание №2. Дана матрица $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда её собственные значения равны…

Варианты ответов: 1) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$; 2) $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1$;
3) $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 5$; 4) $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 2$.

Задание №3. Если (x_0, y_0) – решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 2x - y = -4, \\ 2x + 2y = 5, \end{cases}$ тогда $2x_0 + y_0$ равно…

Варианты ответов: 1) –8; 2) –2; 3) 2; 4) 8.

Задание №4. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, тогда матрица $C = A \cdot B$ имеет вид…

Варианты ответов: 1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Задание №5. Если уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$, то длина её мнимой полуоси равна…

Варианты ответов: 1) 4; 2) 5; 3) 16; 4) 25.

Задание №6. Нормальный вектор плоскости $2x + y - 3z + 4 = 0$ имеет координаты…

Варианты ответов: 1) $(-2;-1;-3)$; 2) $(2;1;-3)$; 3) $(1;-3;4)$;
4) $(-3;1;2)$.

Задание №7. Уравнение прямой, проведённой из точки N(1;3;–2) перпендикулярно плоскости $x-3y-z+7=0$, имеет вид…

Варианты ответов: 1) $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$; 2) $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z-2}{-1}$;
3) $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+1}{1}$; 4) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z+2}{-1}$.

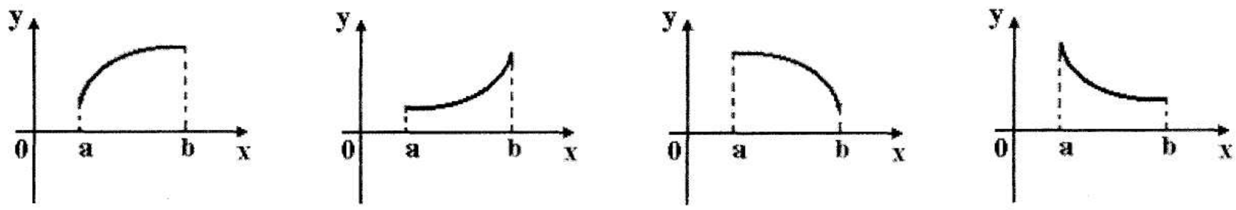
Задание №8. Даны точки $A(-1;3)$ и $B(3;-7)$. Тогда координаты середины отрезка AB равны…
Варианты ответов: 1) $(1;-2)$; 2) $(2;-5)$; 3) $(-2;5)$; 4) $(-1;2)$.

Задание №9. Наибольшее значение функции
$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2x-\dfrac{1}{3}$ на отрезке $[0;2]$ равно…

Варианты ответов: 1) $-\dfrac{3}{2}$; 2) $-\dfrac{1}{3}$; 3) $\dfrac{1}{3}$; 4) 3.

Задание №10. Укажите вид графика функции, для которой на всём отрезке $[a;b]$ одновременно выполняются условия $y>0$, $y'>0$, $y''>0$.

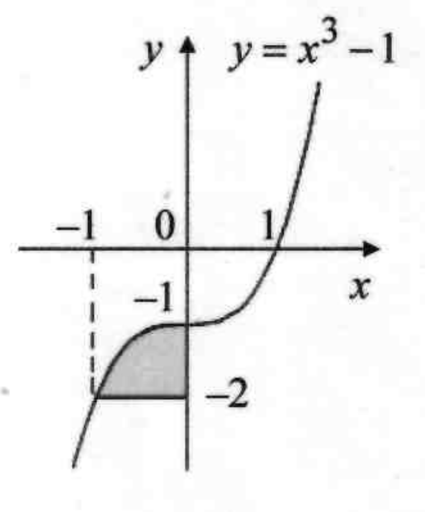
Варианты ответов:
1) 2) 3) 4)



Задание №11. Частная производная функции $z=\operatorname{tg}x\cdot y^2$ по переменной x в точке $M\left(\dfrac{\pi}{3};2\right)$ равна…

Варианты ответов: 1) –16; 2) $-\frac{16}{3}$; 3) $\frac{16}{3}$; 4) 16.

Задание №12. Площадь фигуры, изображённой на рисунке, определяется интегралом…



Варианты ответов: 1) $\int_{-2}^{-1}\left(x^3+1\right)\,dx$; 2) $\int_{-1}^{0}\left(x^3+1\right)\,dx$; 3) $\int_{-1}^{0}\left(x^3-2\right)\,dx$;

4) $\int_{-1}^{0}\left(x^3-3\right)\,dx$.

Задание №13. Закон движения материальной точки имеет вид $x(t)=e^{2t+1}+8t+9$, где $x(t)$ – координата точки в момент времени t. Тогда скорость точки при $t=-\frac{1}{2}$ равна…

Варианты ответов: 1) 9; 2) 10; 3) 13; 4) 14.

Задание №14. Множество первообразных функции $f(x)=\sin 3x$ имеет вид…

Варианты ответов: 1) $3\cos 3x + C$; 2) $-3\cos 3x + C$; 3) $\frac{1}{3}\cos 3x + C$;

4) $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

Задание №15. Общий член последовательности $\frac{2}{3},-\frac{4}{9},\frac{6}{27},-\frac{8}{81},\ldots$ имеет вид …

Варианты ответов: 1) $a_n=(-1)^{n+1}\frac{2n}{3^n}$; 2) $a_n=(-1)^n\frac{2n}{3^n}$; 3) $a_n=\frac{2n}{3^n}$; 4) $a_n=(-1)^{n+1}\frac{2n+2}{3^n}$.

Задание №16. Укажите правильное утверждение относительно сходимости числовых рядов $A)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$ и $B)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$.

Варианты ответов: 1) A – расходится, B – сходится; 2) A и B расходятся; 3) A – сходится, B – расходится; 4) A и B сходятся.

Задание №17. Если $f(x)=x-x^3$, то коэффициент $\boldsymbol{a_3}$ разложения данной функции в ряд Тейлора по степеням $(x+1)$ равен…

Варианты ответов: 1) –6; 2) –1; 3) 0; 4) $\frac{1}{6}$.

Задание №18. Сумма числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ равна…

Варианты ответов: 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) 2.

Задание №19. Дифференциальное уравнение $y'-2xy=y^3$ является…

Варианты ответов: 1) однородным дифференциальным уравнением;
2) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными;
3) линейным неоднородным дифференциальным уравнением;
4) уравнением Бернулли.

Задание №20. Дано дифференциальное уравнение $y'=(6-k)x^3$, тогда функция $y=x^4$ является его решением при k равном…

Варианты ответов: 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

Задание №21. Дано линейное однородное дифференциальное уравнение $y''+3y'-4y=0$, тогда его общее решение имеет вид…

Варианты ответов: 1) $C_1e^{3x}+C_2e^{-4x}$; 2) $C_1e^{-3x}+C_2e^{4x}$; 3) $C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$; 4) $C_1e^{x}+C_2e^{-4x}$.

Задание №22. Частному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения $y''-2y'-8y=e^{-2x}$ по виду его правой части соответствует функция…

Варианты ответов: 1) $y=Ae^{-2x}$; 2) $y=Axe^{-2x}$; 3) $y=e^{-2x}(Ax+B)$; 4) $y=Ae^{-2x}+Be^{4x}$.

Задание №23. Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет ***не более четырёх очков***, равна…

Варианты ответов: 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{5}{6}$.

Задание №24. По оценкам экспертов вероятности банкротства для двух предприятий, производящих однотипную продукцию, равны 0,15 и 0,2. Тогда вероятность банкротства обоих предприятий равна…

Варианты ответов: 1) 0,03; 2) 0,05; 3) 0,2; 4) 0,25.

Задание №25. Вероятность появления события A в 20 независимых испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, равна 0,7. Тогда дисперсия числа появлений этого события равна…

Варианты ответов: 1) 0,035; 2) 0,21; 3) 1,4; 4) 4,2.

Задание №26. В первой урне 2 белых и 8 чёрных шаров. Во второй урне 4 белых и 12 чёрных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Тогда вероятность того, что этот шар окажется белым, равна…

Варианты ответов: 1) $\frac{9}{40}$; 2) $\frac{3}{10}$; 3) $\frac{9}{20}$; 4) $\frac{7}{12}$.

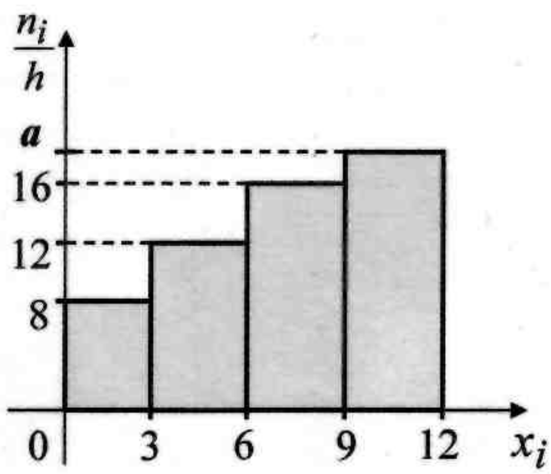
Задание №27. Из генеральной совокупности объёма $n = 60$ извлечена выборка:

x_i	1	2	3	4	5
n_i	12	10	8	6	n_5

. Тогда n_5 равно…

Варианты ответов: 1) 4; 2) 24; 3) 36; 4) 60.

Задание №28. По выборке объёма $n = 120$ построена гистограмма частот:



.

Тогда значение $\boldsymbol{a}$ равно…

Варианты ответов: 1) 4; 2) 20; 3) 40; 4) 84.

Задание №29. В результате измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 10, 13, 16. Тогда несмещённая оценка дисперсии измерений равна…

Варианты ответов: 1) 6; 2) 9; 3) 13; 4) 18.

Задание №30. Точечная оценка параметра распределения равна 18. Тогда его интервальная оценка может иметь вид…

Варианты ответов: 1) (16;18); 2) (0;18); 3) (18;20); 4) (16;20).

Вариант № 2

Задание №1. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ равен…

Варианты ответов: 1) –10; 2) –2; 3) 2; 4) 10.

Задание №2. Дана матрица $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда её собственные значения равны…

Варианты ответов: 1) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$; 2) $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$;
3) $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 3$; 4) $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 4$.

Задание №3. Если (x_0, y_0) – решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x - 3y = 4, \\ 4x + 3y = 1, \end{cases}$ тогда $x_0 + 2y_0$ равно…

Варианты ответов: 1) –1; 2) 0; 3) 1; 4) 3.

Задание №4. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, тогда матрица $C = A \cdot B$ имеет вид…

Варианты ответов: 1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Задание №5. Если уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$, то длина его малой полуоси равна…

Варианты ответов: 1) 2; 2) 4; 3) 5; 4) 25.

Задание №6. Нормальный вектор плоскости $x + 2y - 3z + 4 = 0$ имеет координаты…

Варианты ответов: 1) $(1;2;3)$; 2) $(1;2;-3)$; 3) $(2;-3;4)$;
4) $(-3;2;1)$.

Задание №7. Уравнение прямой, проведённой из точки М(1; –2; 1) перпендикулярно плоскости $2x - y + 3z - 6 = 0$, имеет вид…

Варианты ответов: 1) $\frac{x-1}{-6} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z-1}{-6}$; 2) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{3}$; 3) $\frac{x}{1} = \frac{-3y}{-2} = \frac{-z}{1}$; 4) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}$.

Задание №8. Даны точки $A(1;-4)$ и $B(5;2)$. Тогда координаты середины отрезка AB равны…

Варианты ответов: 1) $(6;-2)$; 2) $(4;6)$; 3) $(2;3)$; 4) $(3;-1)$.

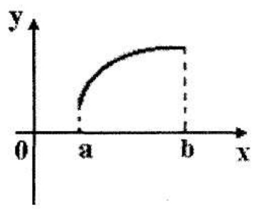
Задание №9. Наибольшее значение функции $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ равно…

Варианты ответов: 1) 2; 2) $2\frac{7}{8}$; 3) 4; 4) 6.

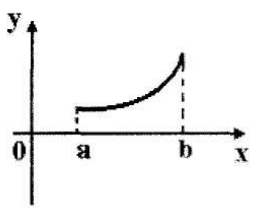
Задание №10. Укажите вид графика функции, для которой на всём отрезке $[a;b]$ одновременно выполняются условия $y > 0$, $y' > 0$, $y'' < 0$.

Варианты ответов:

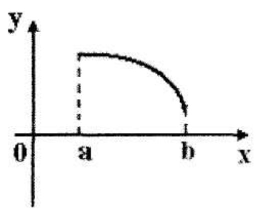
1)



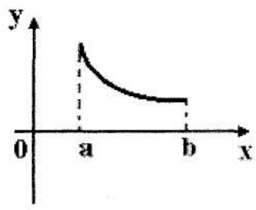
2)



3)



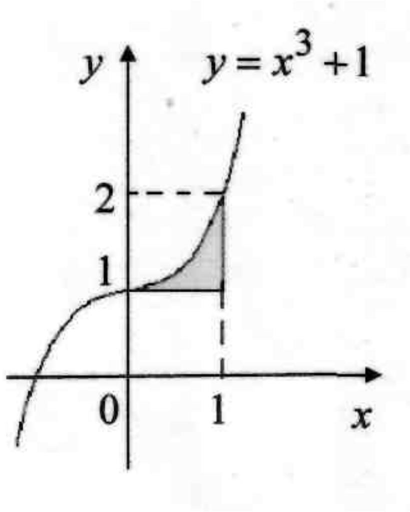
4)



Задание №11. Частная производная функции $z = y^3 \sin 2x$ по переменной y в точке $M\left(\frac{\pi}{4};1\right)$ равна…

Варианты ответов: 1) 0; 2) 1; 3) 3; 4) 6.

Задание №12. Площадь фигуры, изображённой на рисунке, определяется интегралом…



Варианты ответов: 1) $\int_1^2 \left(x^3+1\right) dx$; 2) $\int_1^2 x^3 dx$; 3) $\int_0^1 \left(x^3+1\right) dx$; 4) $\int_0^1 x^3 dx$.

Задание №13. Закон движения материальной точки имеет вид $x(t) = e^{3-t} + 4t - 6$, где $x(t)$ – координата точки в момент времени t. Тогда скорость точки при $t = 3$ равна…

Варианты ответов: 1) – 6; 2) 3; 3) 5; 4) 7.

Задание №14. Множество первообразных функции $f(x) = \cos 4x$ имеет вид…

Варианты ответов: 1) $-4\sin 4x + C$; 2) $4\sin 4x + C$; 3) $\frac{1}{4}\sin 4x + C$;

4) $-\frac{1}{4}\sin 4x + C$.

Задание №15. Общий член последовательности $\frac{4}{5}, \frac{7}{9}, \frac{10}{13}, \frac{13}{17}, \ldots$ имеет вид …

Варианты ответов: 1) $a_n = \frac{3n-1}{4n-1}$; 2) $a_n = \frac{3n-1}{4n+1}$; 3) $a_n = \frac{3n+1}{4n-1}$;

4) $a_n = \frac{3n+1}{4n+1}$.

Задание №16. Укажите правильное утверждение относительно сходимости числовых рядов $A)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n$ и $B)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$.

Варианты ответов: 1) А – расходится, В – сходится; 2) А и В расходятся; 3) А – сходится, В – расходится; 4) А и В сходятся.

Задание №17. Если $f(x)=x+x^2$, то коэффициент $\boldsymbol{a_3}$ разложения данной функции в ряд Тейлора по степеням $(x-2)$ равен…

Варианты ответов: 1) – 4; 2) –2; 3) 0; 4) $\frac{1}{6}$.

Задание №18. Сумма числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ равна…

Варианты ответов: 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) 2.

Задание №19. Дифференциальное уравнение $y'+3xy=x^3$ является…

Варианты ответов: 1) однородным дифференциальным уравнением;
2) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными;
3) линейным неоднородным дифференциальным уравнением;
4) уравнением Бернулли.

Задание №20. Дано дифференциальное уравнение $y'=(3+k)x^3$, тогда функция $y=x^4$ является его решением при k равном…

Варианты ответов: 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

Задание №21. Дано линейное однородное дифференциальное уравнение $y''+4y'-5y=0$, тогда его общее решение имеет вид…

Варианты ответов: 1) $C_1e^{-x}+C_2e^{-5x}$; 2) $C_1e^{-x}+C_2e^{5x}$;
3) $C_1e^{x}+C_2e^{-5x}$; 4) $C_1e^{x}+C_2e^{5x}$.

Задание №22. Частному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' + 2y' - 8y = e^{-2x}$ по виду его правой части соответствует функция…

Варианты ответов: 1) $y = Ae^{-2x}$; 2) $y = Axe^{-2x}$;
3) $y = e^{-2x}(Ax + B)$; 4) $y = Ae^{-2x} + Be^{4x}$.

Задание №23. Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет ***не менее двух очков***, равна…

Варианты ответов: 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{5}{6}$.

Задание №24. По оценкам экспертов вероятности банкротства для двух предприятий, производящих однотипную продукцию, равны 0,2 и 0,02. Тогда вероятность банкротства обоих предприятий равна…
Варианты ответов: 1) 0,22; 2) 0,11; 3) 0,004; 4) 0,18.

Задание №25. Вероятность появления события A в 20 независимых испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, равна 0,6. Тогда дисперсия числа появлений этого события равна…
Варианты ответов: 1) 0,24; 2) 1,2; 3) 4,8; 4) 7,2.

Задание №26. В первой урне 4 белых и 6 чёрных шаров. Во второй урне 6 белых и 14 чёрных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Тогда вероятность того, что этот шар окажется чёрным, равна…

Варианты ответов: 1) $\frac{13}{40}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{13}{20}$; 4) $\frac{2}{3}$.

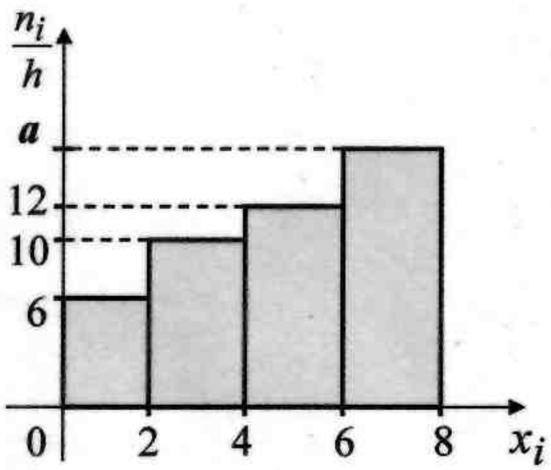
Задание №27. Из генеральной совокупности объёма $n = 60$ извлечена выборка:

x_i	1	2	3	4	5
n_i	10	12	10	12	n_5

.
Тогда n_5 равно…

Варианты ответов: 1) 10; 2) 12; 3) 14; 4) 16.

Задание №28. По выборке объёма $n = 80$ построена гистограмма частот:



Тогда значение ***a*** равно…
Варианты ответов: 1) 12; 2) 14; 3) 16; 4) 52.

Задание №29. В результате измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 6, 10, 14. Тогда несмещённая оценка дисперсии измерений равна…
Варианты ответов: 1) 4; 2) 10; 3) 16; 4) 32.

Задание №30. Точечная оценка параметра распределения равна 17. Тогда его интервальная оценка может иметь вид…
Варианты ответов: 1) (16;18); 2) (16;17); 3) (17;18); 4) (0;17).

Задание	Вариант №1	Вариант №2
1	4	3
2	3	4
3	3	1
4	2	4
5	1	1
6	2	2
7	4	2
8	1	4
9	3	3
10	2	1
11	4	3
12	2	4
13	2	2
14	4	3
15	1	4
16	4	2
17	2	3
18	1	4
19	4	3
20	3	2
21	4	3
22	2	1
23	3	4
24	1	3
25	4	3
26	1	3
27	2	4
28	1	1
29	2	3
30	4	1

Содержание

Подписано в печать 12.11.2008.
Форм. 60 х 84 1/16. Гарнитура «Таймс». Печать ризографическая.
Печ.л. 2. Тираж 100. Заказ 341.

Лаборатория оперативной полиграфии Издательства КГУ
420045, Казань, Кр.Позиция, 2а
Тел. 231-52-12