Казанский государственный университет
им. В.И.Ульянова-Ленина

А.В. Хмельницкая, Е.И. Яшагин

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНТЕРНЕТ-ЭКЗАМЕН В СФЕРЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

МАТЕМАТИКА

РАДИОФИЗИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Казанский государственный университет
2009

УДК 004.738.5:621.38
Х65
Печатается по решению Редакционно-издательского совета ГОУ ВПО «Казанский государственный университет им. В.И.Ульянова-Ленина»

Учёного совета Филиала КГУ в г. Зеленодольске
Протокол № 6 от 14 мая 2009 г.

по решению заседания кафедры
математики и механики Филиала КГУ в г. Зеленодольске
Протокол № 8 от 14 мая 2009 г.

Рецензенты:
д.ф.-м.н, профессор М.Д. Миссаров
д.ф.-м.н, профессор А.Я. Чилап

Х65 Хмельницкая А.В., Яшагин Е.И.
Федеральный Интернет-экзамен в сфере профессионального образования. Математика. Радиофизика и электроника / А.В.Хмельницкая, Е.И.Яшагин. – Казань: КГУ, 2009. – 56 с.

Пособие содержит разобранный авторами демонстрационный вариант Интернет-экзамена и два подобных разработанных ими варианта для самостоятельного решения по дисциплине «Математика» для обучающихся по специальности «Радиофизика и электроника». Ко всем заданиям даны ответы.

Приведённый материал может быть использован факультетами вузов, выпускающих соответствующих специалистов, а также студентами для самоподготовки и самоконтроля.

Предисловие

В сентябре 2003 года на Берлинской конференции Российская Федерация присоединилась к Болонскому процессу, обязавшись до 2010 года воплотить в жизнь основные его принципы. Одной из ключевых позиций этого процесса является контроль качества образования. Во многих странах, в частности, имеет место тестовый контроль полученных студентами знаний и навыков.

В настоящее время на территории нашего государства уже проводятся срезы знаний в виде Интернет-экзамена студентов тех вузов, которые готовятся к прохождению лицензирования. Именно с этим и связано написание данного пособия. Оно содержит в себе разобранный демонстрационный вариант и два подобных варианта для самостоятельного решения по дисциплине «Математика» для обучающихся по специальности «Радиофизика и электроника». В тест включены задания следующих курсов: линейная алгебра, аналитическая геометрия, математический анализ, векторный анализ, комплексный анализ, дифференциальные уравнения, теория вероятностей, математическая статистика, численные методы. Время выполнения данного теста – 80 минут, количество заданий – 44. Следует отметить, что во время прохождения Интернет-экзамена на экране перед каждым ответом из предложенного набора могут стоять разные знаки, предполагающие выбор одного ответа, выбор нескольких ответов из перечисленных, указание последовательности или соответствия. Также не стоит удивляться, если будет предложено другое количество заданий. Разумеется, приведённые в этом пособии тестовые задания не являются исчерпывающими (как и демонстрационный вариант ЕГЭ по математике, например), но дают представление о том, с чем может столкнуться студент при подобном контроле знаний и навыков. Обучающийся может самостоятельно проверить свои остаточные знания (до того, как просмотрит решение демонстрационного варианта). Факультеты, выпускающие соответствующих специалистов, также могут провести предварительное тестирование своих подопечных, используя предложенные варианты.

Поскольку тестирование студентов проводится на компьютере, то нумерация вариантов ответа отсутствует, т.к. выбранные ответы просто помечаются. Поэтому в демонстрационном тесте предлагаемые ответы приведены в порядке перечисления. Варианты же для самостоятельного решения мы снабдили нумерацией ответов, чтобы можно было свериться с правильным выбором результата вычислений. Все приведённые задания предполагают выбор одного правильного ответа.

Аббревиатура «п.Л.» означает применение правила Лопиталя. В фигурных скобках между знаками равенства указывается тип неопределённости при вычислении пределов или иное пояснение, комментирующее проводимое преобразование при вычислении.

Авторы пособия не претендуют на уникальность приведённых решений. Часть заданий можно решить иными способами (в некоторых решениях демонстрационной версии о них упоминается). Иногда в тестовых примерах можно выбрать правильный ответ без вычислений, исключая неподходящие варианты по тем или иным соображениям, которые основываются на общем теоретическом материале. Для его повторения лучше обратиться к учебникам.

Желаем успеха!

Демонстрационный вариант

Задание №1. Если $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, тогда матрица $C=A\cdot B$ имеет вид…

Варианты ответов: $\begin{pmatrix}10\\ 9\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}10\\ 8\\ 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}8\\ 10\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}10\\ 8\end{pmatrix}$.

Решение. Перемножим матрицы в указанном порядке

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot 3\\ 0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 8\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ C=\begin{pmatrix}10\\ 8\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}10\\ 8\end{pmatrix}$.

Задание №2. Ранг матрицы $\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 0\\ 4 & 2 & 6\end{pmatrix}$ равен…

Варианты ответов: 0, 3, 1, 2.

Решение. Существует несколько способов определения ранга матрицы. Ответим на поставленный вопрос, применяя элементарные преобразования матриц:

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 0\\ 4 & 2 & 6\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-2)\\ +\\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot(-2)\ +\\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 5 & 3\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Очевидно, в последней матрице содержится только две линейно независимые строки. Следовательно, ранг первоначальной матрицы равен двум.

Ответ: 2.

Задание №3. Если (x_0, y_0, z_0) – решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x + y + z = -2, \\ x - y = -7, \\ 2x + 3y = 1, \end{cases}$ тогда $x_0 + y_0 + z_0$ равно…

Варианты ответов: 3; –2; 2; –3.

Решение. Решим систему методом Крамера. Вычислим соответствующие определители:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 0 + 1\cdot 0\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot(-1)\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot 0\cdot 3 = 5,$$

аналогично

$$D_x = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -7 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + (-21) - (-1) - 0 - 0 = -20,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -7 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 - (-14) - 0 - 0 = 15,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 + (-14) + (-6) - 4 - 1 - (-21) = -5.$$

Тогда

$$x_0 = \frac{D_x}{D} = \frac{-20}{5} = -4, \quad y_0 = \frac{D_y}{D} = \frac{15}{5} = 3, \quad z_0 = \frac{D_z}{D} = \frac{-5}{5} = -1$$

и $x_0 + y_0 + z_0 = -4 + 3 + (-1) = -2$. Следует отметить, что для ответа на поставленный вопрос в данном примере совершенно необязательно было решать предложенную систему, поскольку в ней самой первое уравнение уже содержит значение искомой суммы.

Ответ: –2.

Задание №4. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда матрицей A^{-1}, обратной

A, является…

Варианты ответов: $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Если $A = (\alpha_{ij})$ – заданная матрица, то обратная ей матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*,$$

где $|A|$ – определитель матрицы A, $A^* = (A_{ji})$ – её присоединённая матрица (A_{ji} – алгебраическое дополнение). Вычислим определитель и алгебраические дополнения отдельно:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2,$$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4$, $\quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3$,

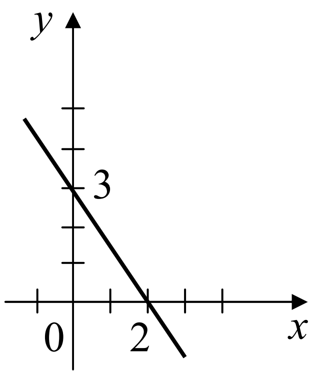
$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$, $\quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$.

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание №5. Уравнение прямой, изображённой на рисунке,



имеет вид…

Варианты ответов: $2x + 3y = 6$, $3x + 2y = 1$, $2x + 3y = 1$, $3x + 2y = 6$.

Решение. Уравнение прямой в отрезках имеет вид

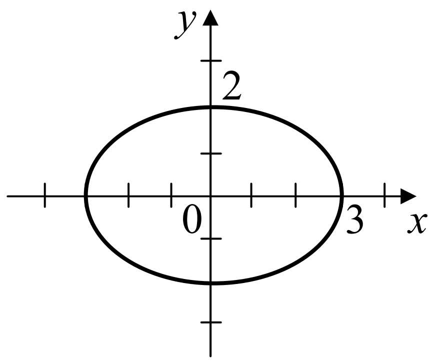
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

где a и b соответствуют значениям, которые прямая отсекает на координатных осях. Для изображённой прямой, очевидно, $a=2$ и $b=3$. Следовательно, её уравнение записывается в виде:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \quad \Rightarrow \quad 3x+2y=6.$$

Ответ: $3x+2y=6$.

Задание №6. Уравнение кривой, изображённой на рисунке,



имеет вид…

Варианты ответов: $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$, $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$.

Решение. На рисунке изображён эллипс, каноническое уравнение которого имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a и b – значения большой и малой полуоси соответственно. Для изображённого эллипса, очевидно, $a=3$ и $b=2$. Следовательно, его уравнение записывается в виде:

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Ответ: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Задание №7. Уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;2;-1)$ с направляющим вектором $\vec{S}=\{2,1,1\}$, имеет вид…

Варианты ответов: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{1}$, $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{1}$, $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$, $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0;y_0;z_0)$ с направляющим вектором $\vec{S}=\{m,n,p\}$, имеет вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Следовательно, в нашем случае

$$\frac{x-(-1)}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-(-1)}{1} \quad\Rightarrow\quad \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1}.$$

Ответ: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{1}$.

Задание №8. Даны точки $A(0;1)$ и $B(6;-3)$, где B – середина отрезка AC. Тогда точка C имеет координаты…

Варианты ответов: $(3;-1)$, $(12;-6)$, $(12;-7)$, $(12;7)$.

Решение. Пусть точка $B(x_B, y_B)$ – середина отрезка AC. Тогда

$$x_B=\frac{x_A+x_C}{2},\ y_B=\frac{y_A+y_C}{2} \quad\Rightarrow\quad x_C=2x_B-x_A,\ y_C=2y_B-y_A.$$

Тогда

$$x_C=2\cdot 6-0=12,\ y_C=2\cdot(-3)-1=-7 \quad\Rightarrow\quad (12;-7).$$

Ответ: $(12;-7)$.

Задание №9. Производная функции $y=\ln(x-\cos x)$ имеет вид…

Варианты ответов: $\dfrac{1-\sin x}{x-\cos x}$, $\dfrac{1}{x-\cos x}$, $\dfrac{1+\sin x}{x-\cos x}$, $\dfrac{1}{1+\sin x}$.

Решение. Вычислим производную предложенной сложной функции:

$$y'=\big(\ln(x-\cos x)\big)'=\frac{1}{x-\cos x}\cdot(x-\cos x)'=\frac{1+\sin x}{x-\cos x}.$$

Ответ: $\dfrac{1+\sin x}{x-\cos x}$.

Задание №10. Значение интеграла $\int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{\ln y} e^x dx$ равно…

Варианты ответов: 5; 2; –2; 4.

Решение. Вычислим кратный интеграл:

$$\int\limits_1^3 \mathrm{dy} \int\limits_0^{\ln y} \mathrm{e^x dx} = \int\limits_1^3 \mathrm{e^x}\Big|_0^{\ln y} \mathrm{dy} = \int\limits_1^3 \left(\mathrm{e}^{\ln y} - \mathrm{e}^0\right) \mathrm{dy} = \int\limits_1^3 (\mathrm{y}-1)\ \mathrm{dy} = \left(\frac{\mathrm{y}^2}{2} - \mathrm{y}\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(\frac{3^2}{2} - 3\right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1\right) = \frac{9}{2} - 3 - \frac{1}{2} + 1 = 2.$$

Ответ: 2.

Задание №11. Закон движения материальной точки имеет вид $x(t) = 4 + 10t^2 + e^{14-2t}$, где $x(t)$ – координата точки в момент времени t. Тогда скорость точки при $t = 7$ равна…

Варианты ответов: 138, 495, 142, 141.

Решение. Скорость точки в произвольный момент времени t определяется первой производной

$$x'(t) = \left(4 + 10t^2 + e^{14-2t}\right)' = 10 \cdot 2t + e^{14-2t} \cdot (14-2t)' = 20t - 2e^{14-2t}.$$

Тогда скорость точки при $t = 7$ равна

$$x'(7) = 20 \cdot 7 - 2e^{14-2\cdot 7} = 140 - 2e^0 = 140 - 2 = 138.$$

Ответ: 138.

Задание №12. Множество первообразных функции $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ имеет вид…

Варианты ответов: $3\sin^2 x + C$, $\frac{1}{4}\sin^4 x + C$, $4\sin^4 x + C$, $-\frac{1}{4}\sin^4 x + C$.

Решение. Найдём первообразную

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \ dx = \int \sin^3 x \ d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Ответ: $\frac{1}{4}\sin^4 x + C$.

Задание №13. Если $\vec{R}(t) = \vec{i}\cos t + \vec{j}\sin t + \vec{k}$ – векторная функция скалярного аргумента t, тогда её производная $\frac{d\vec{R}}{dt}$ при $t = \frac{\pi}{2}$ равна…

Варианты ответов: $\vec{j}$, $\vec{k}$, $-\vec{j}$, $-\vec{i}$.

Решение. Вычислим:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{i}\cos t + \vec{j}\sin t + \vec{k}\right) = \vec{i}\cdot(-\sin t) + \vec{j}\cdot\cos t + \vec{k}\cdot 0 = -\vec{i}\sin t + \vec{j}\cos t,$$

тогда

$$\left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = (-\vec{i}\sin t + \vec{j}\cos t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = -\vec{i}\sin\frac{\pi}{2} + \vec{j}\cos\frac{\pi}{2} = -\vec{i}\cdot 1 + \vec{j}\cdot 0 = -\vec{i}.$$

Ответ: $-\vec{i}$.

Задание №14. Градиент скалярного поля $u = 5x^2y - 3xy^3 + y^2$ в произвольной точке имеет вид…

Варианты ответов: $(10xy - 3y^3)\vec{i} + (5x^2 - 9xy^2 + 2y)\vec{j}$, $(5x^2 - 9xy^2 + 2y)\vec{j}$, $(10xy - 3y^3)\vec{i}$, $(10xy - 3y^3)\vec{i} + (5x^2 - 9xy^2)\vec{j}$.

Решение. Градиент скалярного поля $u(x, y)$ в произвольной точке вычисляется по формуле

$$\mathrm{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}.$$

Тогда для данного скалярного поля

$$\mathrm{grad}\, u = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}(5x^2y - 3xy^3 + y^2) + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}(5x^2y - 3xy^3 + y^2) =$$

$$= \vec{i}(10xy - 3y^3) + \vec{j}(5x^2 - 9xy^2 + 2y).$$

Ответ: $(10xy - 3y^3)\vec{i} + (5x^2 - 9xy^2 + 2y)\vec{j}$.

Задание №15. Дивергенция векторного поля $\vec{F} = \frac{x}{y}\vec{i} - xy^2\vec{j} + z^3\vec{k}$ в произвольной точке равна…

Варианты ответов: $\frac{1}{y} - 2xy + 3z^2$, $-\frac{x}{y^2} - 2xy$, $\frac{1}{y} - y^2$, $3z^2$.

Решение. Напомним, что если

$$\vec{a}(r) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k}$$

есть непрерывно дифференцируемое векторное поле, то скаляр

$$\operatorname{div}\vec{a} \equiv \nabla\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

называется дивергенцией этого поля. Тогда

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(-xy^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) = \frac{1}{y} - 2xy + 3z^2.$$

Ответ: $\frac{1}{y} - 2xy + 3z^2$.

Задание №16. Норма вектора $\vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ в пространстве R^3 равна…

Варианты ответов: 14, 100, 10, –10.

Решение. Если вектор $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, то его норма вычисляется по формуле

$$\| \vec{a} \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Следовательно,

$$\| \vec{a} \| = \sqrt{6^2 + (-8)^2 + 0^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10.$$

Ответ: 10.

Задание №17. Модуль комплексного числа $-2 - 5i$ равен…

Варианты ответов: 2, $\sqrt{29}$, $\sqrt{7}$, 7.

Решение. Если $z = x + iy$, то $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Следовательно,

$$|-2 - 5i| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}.$$

Ответ: $\sqrt{29}$.

Задание №18. Образом точки $z_0 = \dfrac{1+i}{2}$ при отображении $W = (z-i)^2$ является…

Варианты ответов: $\dfrac{i}{2}$, $1-\dfrac{i}{2}$, $-\dfrac{i}{2}$, $-2-\dfrac{3}{2}i$.

Решение. Для того, чтобы найти образ точки z_0, достаточно подставить её значение в отображение:

$$W(z_0) = \left(\frac{1+i}{2} - i\right)^2 = \left(\frac{1+i-2i}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-i}{2}\right)^2 = \frac{1-2i+i^2}{4} = \frac{1-2i-1}{4} = \frac{-2i}{4} = \frac{-i}{2}.$$

Ответ: $-\dfrac{i}{2}$.

Задание №19. Значение $\underset{z=0}{\text{Выч}} \dfrac{1}{z(1-z^2)}$ равно…

Варианты ответов: 1; 2; 0,5; 0.

Решение. Пусть функция $f(z)$ имеет в точке z_0 полюс порядка k (или не выше, чем k). Тогда

$$\underset{z=z_0}{\text{Выч}}\, f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[f(z)(z-z_0)^k \right].$$

В частности, если z_0 – простой полюс ($k=1$), то

$$\underset{z=z_0}{\text{Выч}}\, f(z) = \lim_{z\to z_0} \left[f(z)(z-z_0) \right].$$

Функция $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z^2)}$ в нуле имеет простой полюс. Следовательно,

$$\underset{z=0}{\text{Выч}} \frac{1}{z(1-z^2)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z(1-z^2)} \cdot z = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1-z^2} = 1.$$

Ответ: 1.

Задание №20. Пусть $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - i$, тогда $\dfrac{z_1}{z_2}$ равно…

Варианты ответов: $\dfrac{1}{3} + i$, $\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i$, $\dfrac{1}{2} - i$, $\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5}i$.

Решение. Найдём значение дроби, домножая числитель и знаменатель на сопряжённое z_2 выражение:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+2i+i^2}{4-i^2} = \frac{2+3i-1}{4-(-1)} = \frac{1+3i}{5}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i$.

Задание №21. Укажите правильное утверждение относительно сходимости числовых рядов $A)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ и $B)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2n-1}$.

Варианты ответов: A сходится, B расходится; A расходится, B сходится; A и B сходятся; A и B расходятся.

Решение. Проверим выполнение необходимого условия сходимости рядов:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = \left\{\frac{1}{\infty}\right\} = 0 \quad \text{и}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, для первого ряда необходимое условие выполняется, а для второго – нет. Следовательно, ряд B расходится. Ряд A является знакопостоянным. Применим достаточный признак Даламбера к нему:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Ответ: A сходится, B расходится.

Задание №22. Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+4}$ равен…

Варианты ответов: 0,8; ∞; 1; 0.

Решение. Радиус сходимости R степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n (x - x_0)^n$ можно вычислить по формуле

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|.$$

Тогда для предложенного ряда $C_n = \dfrac{1}{n+4}$ и

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\dfrac{1}{n+4}}{\dfrac{1}{n+1+4}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n+5}{n+4} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n \to \infty} \frac{n\left(1+\dfrac{5}{n}\right)}{n\left(1+\dfrac{4}{n}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1+\dfrac{5}{n}}{1+\dfrac{4}{n}} = 1.$$

Ответ: 1.

Задание №23. Дана функция $f(x) = e^{3x}$, тогда первые три (отличные от нуля) члена разложения этой функции в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ имеют вид…

Варианты ответов: $1 + 3x - \dfrac{9}{2}x^2$, $1 + 3x + 9x^2$, $1 + 3x + \dfrac{9}{2}x^2$, $1 - 3x + 9x^2$.

Решение. Формула разложения функции в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad \text{где} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

В нашем случае $x_0 = 0$. Вычислим первые три отличные от нуля коэффициента разложения:

$$a_0 = \frac{f(0)}{0!} = \frac{e^0}{1} = 1,$$

$$a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \left.\frac{f'(x)}{1}\right|_{x=0} = \left.\left(e^{3x}\right)'\right|_{x=0} = \left.3e^{3x}\right|_{x=0} = 3e^0 = 3,$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \left.\frac{f''(x)}{2}\right|_{x=0} = \left.\frac{1}{2}\left(3e^{3x}\right)'\right|_{x=0} = \left.\frac{3}{2}\cdot 3e^{3x}\right|_{x=0} = \frac{9}{2}e^0 = \frac{9}{2}.$$

Тогда

$$f(x) = e^{3x} = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + \ldots = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \ldots.$$

Можно было найти первые три члена иначе, используя одно из основных разложений. В частности, для показательной функции имеет место формула

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

Тогда

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \ldots + \frac{(3x)^n}{n!} + \ldots = 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + \ldots.$$

Ответ: $1 + 3x + \frac{9}{2}x^2$.

Задание №24. Общий член последовательности $1, -\frac{3}{4}, \frac{5}{9}, -\frac{7}{16}, \ldots$ имеет вид…

Варианты ответов: $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n-1}{n^2}$, $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2n-1}{n^2}$,

$a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n^2}$, $a_n = \frac{2n-1}{n^2}$.

Решение. Очевидно, в знаменателях стоят квадраты натуральных чисел, в числителях – нечётные числа. Члены последовательности чередуются по знаку, причём первый член положителен. Этим условиям не удовлетворяют второй и четвёртый варианты. Чтобы сделать выбор между оставшимися первым и третьим вариантами, нужно определиться с записью нечётных чисел в числителе: $2n-1$ или $2n+1$. Подставим $n=2$ последовательно в эти варианты (для сравнения со вторым членом последовательности). Получим 3 и 5 соответственно. Следовательно, числитель данной последовательности записывается в виде $2n-1$.

Ответ: $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{2n-1}{n^2}$.

Задание №25. Дифференциальное уравнение $x^2y' + xy + 1 = 0$ является…

Варианты ответов: уравнением Бернулли, линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка, однородным дифференциальным уравнением первого порядка, дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Решение. Поскольку уравнение не содержит слагаемого с множителем y^n, $n \neq 1$, то оно не может быть уравнением Бернулли. В выражении $xy+1$ невозможно разделить переменные. Следовательно, четвёртый вариант (уравнение с разделяющимися переменными) тоже отпадает. Преобразуем заданное уравнение:

$$x^2y' + xy = -1.$$

Очевидно, что данное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка (правая часть отлична от нуля).

Ответ: линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Задание №26. Дано дифференциальное уравнение $xy' + y = 0$ при $y(-1) = 2$. Тогда его решением является функция…

Варианты ответов: $y = \dfrac{1}{x} + 3$, $y = -2x$, $y = -2e^{-x-1}$, $y = -\dfrac{2}{x}$.

Решение. Для решения задачи Коши достаточно найти общее решение уравнения, затем определить искомое решение, используя начальное условие. Решим предложенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$xy' + y = 0 \;\Rightarrow\; x\frac{dy}{dx} = -y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln|y| = -\ln|x| + \ln C,\;\; C > 0.$$

После потенцирования и стандартного переопределения константы получаем общее решение $yx = C$. Подставим в него начальное условие:

$$2\cdot(-1) = C \;\Rightarrow\; C = -2 \;\Rightarrow\; yx = -2.$$

Следовательно, $y = -\dfrac{2}{x}$ – искомое решение. Заметим, что найти решение задачи Коши можно было и по-другому, используя начальное условие при интегрировании:

$$\int_2^y \frac{dy}{y} = -\int_{-1}^x \frac{dx}{x}.$$

Ответ: $y = -\dfrac{2}{x}$.

Задание №27. Дано дифференциальное уравнение в частных производных $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - k\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. Тогда функция $z = x^2 + y$ является его решением при k равном…

Варианты ответов: –2; –1; 1; 2.

Решение. Для нахождения k достаточно функцию $z = x^2 + y$ подставить в дифференциальное уравнение и из получившегося тождества найти значение параметра. Вычислим предварительно частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 + y)'_x = 2x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (2x)'_x = 2,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 + y)'_y = 1.$$

Подставляем их в уравнение:

$$2 - k\cdot 1 = 0 \;\Rightarrow\; k = 2.$$

Ответ: 2.

Задание №28. Частному решению дифференциального уравнения $y'' + 4y = x^3$ по виду его правой части соответствует функция…

Варианты ответов: $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, $y = x^4 + x$,

$y = A \cdot \cos 2x + B \cdot \sin 2x$, $y = e^{2x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$.

Решение. Сначала найдём корни характеристического уравнения:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -2i,\; \lambda_2 = 2i.$$

Поскольку правая часть уравнения не содержит тригонометрических функций, то частное решение дифференциального уравнения следует искать в виде $x^k e^{\lambda x} P_n(x)$, где k – это кратность корня λ характеристического уравнения, n – степень многочлена в правой части уравнения. В нашем случае $\lambda = 0$ (так как показательная функция в правой части вообще отсутствует), $n = 3$. Но $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения, следовательно, $k = 0$. Тогда частное решение данного дифференциального уравнения запишется в виде

$$x^0 e^{0x} P_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Ответ: $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

Задание №29. Гармонические колебания с амплитудой A, частотой ω и начальной фазой φ определяются уравнением…

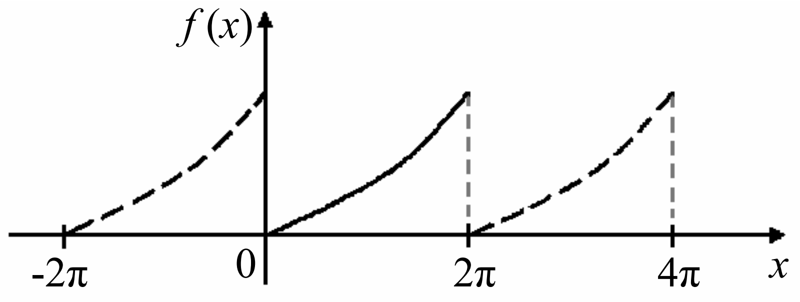
Варианты ответов: $f(x) = A(\omega x + \varphi)^2$, $f(x) = A\sqrt{\omega x + \varphi}$,

$f(x) = \dfrac{A}{\omega x + \varphi}$, $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$.

Решение. Гармонические колебания описываются гармоническими функциями, т.е. с помощью синуса или косинуса, и обычно имеют вид $A\sin(\omega x + \varphi)$ или $A\cos(\omega x + \varphi)$, где A – это амплитуда колебаний, ω – циклическая (или круговая) частота, φ – начальная фаза. Выбираем последний вариант.

Ответ: $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$.

Задание №30. График функции $f(x)$ при $x \in [0;2\pi]$ и его периодическое продолжение заданы на рисунке.



Тогда ряд Фурье для этой функции имеет вид…

Варианты ответов: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$,

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$.

Решение. Общее представление функции рядом Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right).$$

В частности, если $f(x)$ является чётной, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

если $f(x)$ является нечётной, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Значение l соответствует половине длины промежутка. Поскольку график самой функции задан при $x \in [0;2\pi]$, то $l = \frac{2\pi - 0}{2} = \pi$. Таким образом, аргумент синуса и косинуса в разложении будет равен $\frac{n\pi x}{\pi} = nx$. Но этому условию удовлетворяют все предложенные варианты. Очевидно, на рисунке представлен график функции общего вида. Следовательно, в разложении этой функции в ряд Фурье участвуют все слагаемые, поэтому выбираем первый вариант.

Ответ: $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$.

Задание №31. Коэффициент $\boldsymbol{a_3}$ разложения функции $f(x)=2x+1$ при $x\in[-\pi;\pi]$ в ряд Фурье равен…

Варианты ответов: 2; $\dfrac{4}{3}$; 0; $-\dfrac{4}{3\pi}$.

Решение. Формула разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье на отрезке $[-l;l]$ имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$\text{где }\ a_n=\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ b_n=\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Вычислим искомый коэффициент:

$$a_3=\int_{-\pi}^{\pi}(2x+1)\cos\frac{3\pi x}{\pi}dx=\int_{-\pi}^{\pi}(2x+1)\cos 3xdx=\frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+1)\cos 3xd(3x)=$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+1)d(\sin 3x)=\frac{1}{3}\left((2x+1)\sin 3x\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\sin 3xd(2x+1)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left((2\pi+1)\sin 3\pi-(-2\pi+1)\sin(-3\pi)-2\int_{-\pi}^{\pi}\sin 3xdx\right)=$$

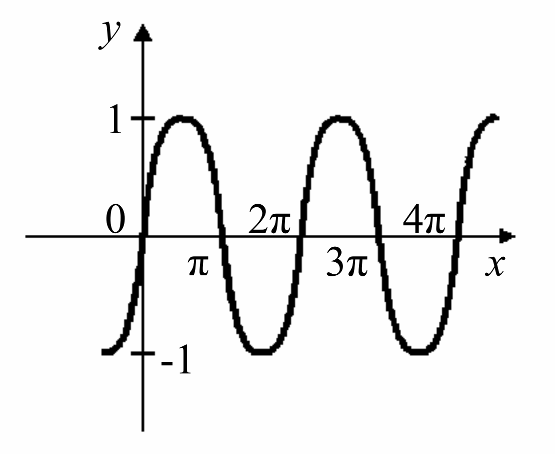
$$=\frac{1}{3}\left(0-0-\frac{2}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 3xd(3x)\right)=\frac{2}{9}\cos 3x\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2}{9}\left(\cos 3\pi-\cos(-3\pi)\right)=$$

$$=\frac{2}{9}(\cos 3\pi-\cos 3\pi)=0.$$

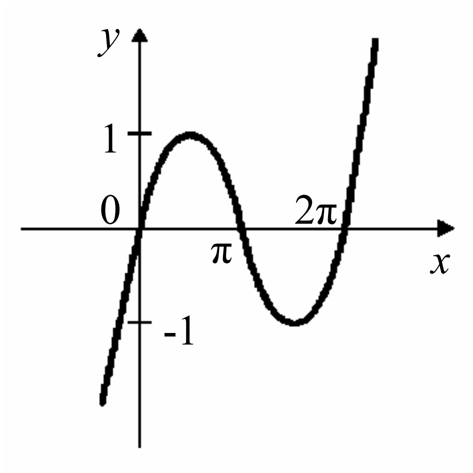
Ответ: 0.

Задание №32. Укажите график периодической функции.

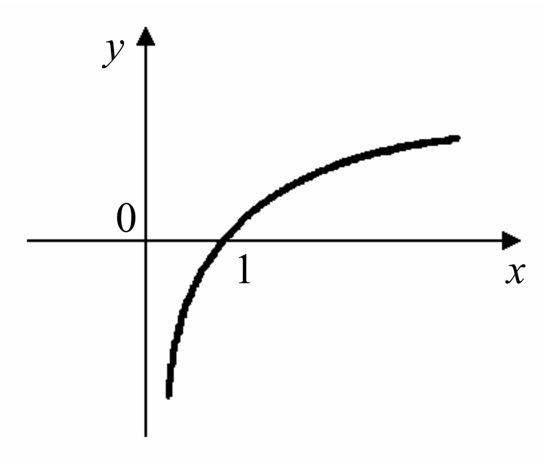
Варианты ответов:



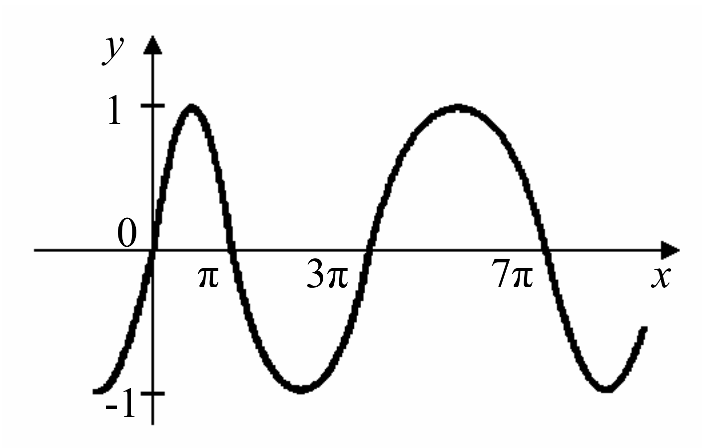
,



,

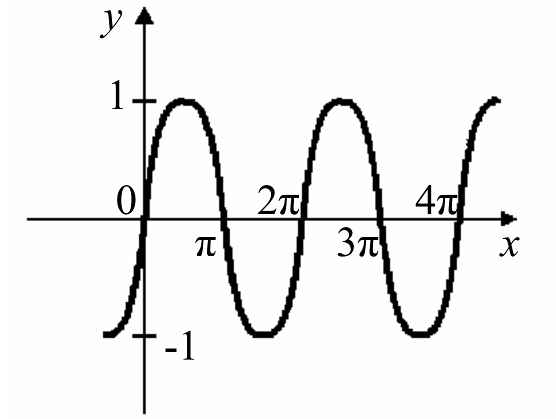


,



.

Решение. Периодической называется функция, для которой выполняется равенство $f(x+T)=f(x)$ для любого значения $x \in D(f)$, при этом также $x+T \in D(f)$. Эти свойства отражены только на первом графике.

Ответ: 

.

Задание №33. По оценкам экспертов вероятности банкротства для двух предприятий, производящих однотипную продукцию, равны 0,1 и 0,2. Тогда вероятность банкротства ***только одного*** предприятия равна…

Варианты ответов: 0,08; 0,3; 0,26; 0,28.

Решение. Введём обозначения событий: B – банкротство только одного предприятия, A_1 – банкротство первого предприятия, A_2 – банкротство второго предприятия, $\overline{A}_1$ – первое предприятие не является банкротом, $\overline{A}_2$ – второе предприятие не является банкротом. Тогда

$$B = (A_1 \cap \overline{A}_2) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2).$$

По условию,

$$P(A_1) = 0{,}1 \quad \text{и} \quad P(A_2) = 0{,}2.$$

Следовательно,

$$P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9 \quad \text{и} \quad P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

Учитывая независимость работы двух предприятий и несовместность событий A_i и $\overline{A}_i$, получаем

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}26.$$

Ответ: 0,26.

Задание №34. Пусть X – дискретная случайная величина, заданная законом распределения вероятностей:

X	–2	1	3
p	0,1	0,3	0,6

.

Тогда математическое ожидание случайной величины $2X$ равно…

Варианты ответов: 4; 3,8; 3,5; 4,6.

Решение. Математическое ожидание дискретной случайной величины вычисляется по формуле

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i,$$

где x_i – значение дискретной случайной величины, p_i – вероятность того, что случайная величина примет значение x_i, n – количество значений случайной величины. Также необходимо использовать следующее свойство математического ожидания:

$$M(CX) = C \cdot M(X), \quad \text{где } C - \text{постоянная.}$$

Следовательно,

$$M(2X) = 2M(X) = 2\sum_{i=1}^{3} x_i \cdot p_i = 2(-2 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}6) = 2 \cdot 1{,}9 = 3{,}8.$$

Ответ: 3,8.

Задание №35. Монета брошена 3 раза. Тогда вероятность того, что «герб» выпадет ровно два раза, равна…

Варианты ответов: $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{3}$.

Решение. Пусть A – событие, вероятность которого необходимо найти. Обозначим через $Г$ выпадение «герба», через $Р$ выпадение «решки». По условию, монету бросают трижды. Тогда пространство элементарных событий

$$\Omega = \{ГГГ, ГГР, ГРГ, ГРР, РГГ, РГР, РРГ, РРР\}.$$

Следовательно, $|\Omega| = 8$, а число благоприятствующих исходов (выпадений «герба» ровно два раза) равно 3. Получаем, $P(A) = \frac{3}{8}$.

Ответ: $\frac{3}{8}$.

Задание №36. С первого станка на сборку поступает 40%, со второго – 60% всех деталей. Среди деталей, поступивших с первого станка, 1% бракованных, со второго – 2% бракованных. Тогда вероятность того, что поступившая на сборку деталь бракованная, равна…

Варианты ответов: 0,016; 0,015; 0,03; 0,014.

Решение. Для решения этой задачи необходимо использовать формулу полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A | H_i),$$

где $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – события (гипотезы), относительно которых известны априорные (доопытные) вероятности $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ и $P(A | H_1), P(A | H_2), \ldots, P(A | H_n)$ – условные вероятности интересующего события A. Введём обозначения событий: H_1 – деталь поступила с первого станка, H_2 – деталь поступила со второго станка, A – поступившая на сборку деталь бракованная. Тогда

$$P(H_1) = 0{,}4, \ P(H_2) = 0{,}6, \ P(A | H_1) = 0{,}01, \ P(A | H_2) = 0{,}02$$

и

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}01 + 0{,}6 \cdot 0{,}02 = 0{,}016.$$

Ответ: 0,016.

Задание №37. По результатам распределения 100 рабочих механического цеха по тарифным разрядам найдена эмпирическая функция распределения

$$F_{100}(x) = \begin{cases} 0; & \text{если} \quad x \le 1, \\ 0{,}08; & \text{если} \quad 1 < x \le 2, \\ 0{,}19; & \text{если} \quad 2 < x \le 3, \\ 0{,}39; & \text{если} \quad 3 < x \le 4, \\ 0{,}64; & \text{если} \quad 4 < x \le 5, \\ 0{,}88; & \text{если} \quad 5 < x \le 6, \\ 1; & \text{если} \quad x > 6. \end{cases}$$

Тогда количество рабочих цеха, имеющих 3-ий тарифный разряд, равно…

Варианты ответов: 19, 20, 27, 11.

Решение. Напомним, что если закон распределения дискретной случайной величины определён с помощью ряда распределения (в виде таблицы)

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

,

то на его основе можно получить функцию распределения этой величины:

$$F(X) = \sum_{x_i < x} p_i ,$$

или в другом виде:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ p_1, & x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3, \\ \dots\dots\dots & \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} p_i, & x_{n-1} < x \le x_n, \\ 1, & x > x_n. \end{cases}$$

Тогда в предложенной задаче рабочим механического цеха, имеющим 3-ий тарифный разряд, соответствует четвёртая строка в функции распределения $F_{100}(X)$. Следовательно, вероятность того, что случайно выбранный рабочий цеха имеет 3-ий тарифный разряд,

$$p_3 = 0{,}39 - 0{,}19 = 0{,}2 .$$

Поскольку общее количество рабочих равно 100, то количество рабочих цеха, имеющих 3-ий тарифный разряд, равно $0{,}2 \cdot 100 = 20$.

Ответ: 20.

Задание №38. Мода вариационного ряда 1, 4, 4, 5, 6, 8, 9 равна…

Варианты ответов: 5, 1, 4, 9.

Решение. Напомним, что модой называется значение случайной величины, которое встречается чаще всего, т.е. имеет максимальную вероятность (для дискретной случайной величины) или максимум функции плотности вероятности в данной точке (для непрерывной случайной величины). В предложенном вариационном ряду чаще всего встречается значение 4. Следовательно, оно и является модой этого ряда.

Ответ: 4.

Задание №39. Если основная гипотеза имеет вид $H_0 : a = 10$, то конкурирующей гипотезой может являться…

Варианты ответов: $H_1 : a > 10$, $H_1 : a \le 9$, $H_1 : a = 5$, $H_1 : a \ge 10$.

Решение. Конкурирующей (или альтернативной) гипотезой H_1 называют отрицающую или исключающую основную гипотезу H_0. Если основная гипотеза H_0 выглядит так:

$$H_0 : \theta = \theta_0,$$

то конкурирующая гипотеза H_1 может при этом иметь следующий вид:

$$H_1 : \theta < \theta_0,\ \ H_1 : \theta > \theta_0 \ \text{ или } \ H_1 : \theta \ne \theta_0.$$

Следовательно, для предложенной основной гипотезы конкурирующей может быть только первая из четырёх.

Ответ: $H_1 : a > 10$.

Задание №40. В результате измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 10, 12, 14. Тогда несмещённая оценка дисперсии равна…

Варианты ответов: 3, 4, 8, 12.

Решение. Несмещённая оценка дисперсии вычисляется по формуле

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2,$$

где n – количество измерений, x_i – значения этих измерений, $\bar{x}$ – среднее арифметическое выборки. Вычислим ($n = 3$):

$$\bar{x} = \frac{1}{3}(10 + 12 + 14) = \frac{36}{3} = 12,$$

$$S^2 = \frac{1}{3-1} \cdot \left[(10-12)^2 + (12-12)^2 + (14-12)^2 \right] = \frac{1}{2}(4 + 0 + 4) = 4.$$

Ответ: 4.

Задание №41. Действительный корень уравнения $x^3+3x-2=0$ принадлежит интервалу…

Варианты ответов: $\left(1;\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};1\right)$, $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2};2\right)$.

Решение. Введём в рассмотрение функцию $f(x)=x^3+3x-2$. Тогда для определения, какому из промежутков принадлежит корень многочлена, достаточно проверить значения этой функции на границах:

$$f(0)=-2<0, \qquad f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\cdot\frac{1}{2}-2=\frac{1}{8}+\frac{3}{2}-2=-\frac{3}{8}<0,$$

$$f(1)=1^3+3\cdot1-2=2>0, \qquad f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^3+3\cdot\frac{3}{2}-2=\frac{27}{8}+\frac{9}{2}-2=\frac{47}{8}>0,$$

$$f(2)=2^3+3\cdot2-2=8+6-2=12>0.$$

Очевидно, смена знака функции происходит между значениями аргумента $\frac{1}{2}$ и 1. Таким образом, действительный корень уравнения принадлежит второму интервалу. В данном примере можно было остановиться в вычислениях уже после третьего значения после смены знака. Поскольку при тестировании ответом может быть не только указанный интервал, то мы нашли значения многочлена на всех границах (убедившись тем самым в отсутствии других вариантов в данном случае).

Ответ: $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Задание №42. Действительный корень уравнения $x\ln x-1=0$ принадлежит интервалу…

Варианты ответов: $(0;1)$, $(3;4)$, $(1;2)$, $(2;3)$.

Решение. Для ответа на этот вопрос поступим аналогичным предыдущему примеру образом. Введём функцию $f(x)=x\ln x-1$, тогда

$$f(0)=\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(x\ln x-1)=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)-1=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}\overset{п.Л.}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}-1=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}-1=-\lim_{x\to 0+}x-1=-1<0,$$

$$f(1)=1\cdot\ln 1-1=-1<0,$$

$$f(2)=2\cdot\ln 2-1=\ln 4-\ln e=\ln\frac{4}{e}>0 \text{ (т.к. } \frac{4}{e}>1).$$

Поскольку в данном примере возможен только один вариант ответа, то дальнейшие вычисления необязательны. Функция меняет свой знак в промежутке между значениями 1 и 2 (третий вариант). Заметим, что этот и предыдущий примеры можно решать, используя графики функций. Для этого необходимо преобразовать уравнение таким образом, чтобы в обеих его частях стояли элементарные функции. Правда, чем меньше искомый промежуток решения, тем точнее требуется делать эскизы графиков, чтобы расположение их пересечений не вызывало сомнений. Поэтому в отличие от предложенного метода решения графический поиск не всегда приводит к успеху.

Ответ: $(1;2)$.

Задание №43. Дано дифференциальное уравнение $y'=y^2-x$ при $y(0)=1$. Тогда первые три члена разложения его решения в степенной ряд имеют вид…

Варианты ответов: $1+x^2+\frac{x^3}{6}$, $1+x+x^2$, $1+x+\frac{x^2}{6}$, $1+x+\frac{x^2}{2}$.

Решение. Решение дифференциального уравнения запишем в виде $y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$, где коэффициенты a_i пока не определены. Тогда $y'(x)=a_1+2a_2x+\ldots$, и при подстановке данных выражений в уравнение получаем:

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^2 - x.$$

Причём коэффициент a_0 находится из начального условия $y(0) = 1$:

$$y(0) = a_0 + a_1 0 + a_2 0^2 + \ldots = a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 1.$$

Остальные коэффициенты найдём из равенства двух многочленов:

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots = (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^2 - x =$$

$$= 1 + a_1^2 x^2 + a_2^2 x^4 + \ldots + 2a_1 x + 2a_2 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + \ldots - x =$$

$$= 1 + (2a_1 - 1)x + (a_1^2 + 2a_2)x^2 + \ldots$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях:

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ 2a_2 = 2a_1 - 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1, \\ 2a_2 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

При подстановке найденных отличных от нуля значений коэффициентов получаем последний из предложенных вариантов. Если в задании потребуется найти значения большего количества членов разложения решения в степенной ряд, то в систему нужно будет вписать равенства коэффициентов при следующих степенях. Заметим, что для решения этого задания можно было использовать стандартное разложение функции в ряд Тейлора (которое уже упоминалось в задании 23), зная начальное условие и зависимость переменных, выраженную дифференциальным уравнением. В данном примере

$$x_0 = 0, \quad y(x_0) = y(0) = 1, \quad y'(x_0) = y^2(x_0) - x_0 = 1,$$

$$y'' = \left(y^2 - x\right)' = 2yy' - 1 \quad \Rightarrow \quad y''(x_0) = 2y(x_0)y'(x_0) - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Подставляя найденные значения в формулу Тейлора, получаем тот же ответ. Если в задании потребуется найти значения большего количества членов разложения решения в степенной ряд, то дифференцирование обеих частей равенства нужно будет продолжить дальше до необходимого порядка отличной от нуля производной.

Ответ: $1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

Задание №44. Интерполяционный многочлен Лагранжа второго порядка для функции $y = f(x)$, график которого проходит через точки с абсциссами $x=1$, $x=3$, $x=5$, имеет вид…

Варианты ответов:

$$P(x) = \frac{(x-3)(x-5)}{8} f(1) - \frac{(x-1)(x-5)}{4} f(3) + \frac{(x-1)(x-3)}{8} f(5),$$

$$P(x) = \frac{(x-3)(x-5)}{15} f(1) + \frac{(x-1)(x-5)}{5} f(3) + \frac{(x-1)(x-3)}{3} f(5),$$

$$P(x) = \frac{(x-3)(x-5)}{8} f(1) + \frac{(x-1)(x-5)}{4} f(3) + \frac{(x-1)(x-3)}{8} f(5),$$

$$P(x) = (x-3)(x-5) f(1) + (x-1)(x-5) f(3) + (x-1)(x-3) f(5).$$

Решение. Интерполяционный многочлен Лагранжа степени n, интерполирующий заданную функцию $f(x)$ в узлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$, имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

В предложенном задании $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$ ($n = 2$). Тогда

$$P(x) = L_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} =$$

$$= f(1) \frac{(x-3)(x-5)}{(1-3)(1-5)} + f(3) \frac{(x-1)(x-5)}{(3-1)(3-5)} + f(5) \frac{(x-1)(x-3)}{(5-1)(5-3)} =$$

$$= f(1) \frac{(x-3)(x-5)}{8} + f(3) \frac{(x-1)(x-5)}{-4} + f(5) \frac{(x-1)(x-3)}{8}.$$

Следовательно, верным является первый вариант.

Ответ: $P(x) = \dfrac{(x-3)(x-5)}{8} f(1) - \dfrac{(x-1)(x-5)}{4} f(3) + \dfrac{(x-1)(x-3)}{8} f(5)$.

Ниже приведены варианты подобных тестов для самостоятельной проверки знаний.

Вариант № 1

Задание №1. Если $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$, тогда матрица $C=A\cdot B$ имеет вид…

Варианты ответов: 1) $\begin{pmatrix}-5 & 1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-5\\ 1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-4\\ -2\\ 2\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}-4\\ 1\end{pmatrix}$.

Задание №2. Ранг матрицы $\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -3 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ равен…

Варианты ответов: 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

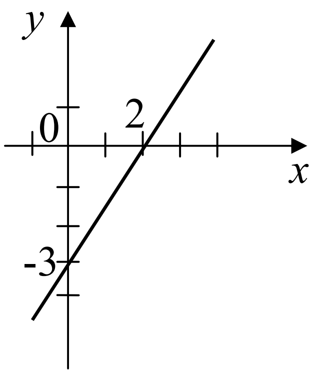
Задание №3. Если (x_0, y_0, z_0) – решение системы линейных уравнений $\begin{cases}-3x-y+4z=0,\\ x+2y+3z=1,\\ 2x+y-3z=-1,\end{cases}$ тогда $-x_0+z_0$ равно…

Варианты ответов: 1) –2; 2) –1; 3) 1; 4) 2.

Задание №4. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. Тогда матрицей A^{-1}, обратной A, является…

Варианты ответов: 1) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$; 2) $-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$; 3) $-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$; 4) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$.

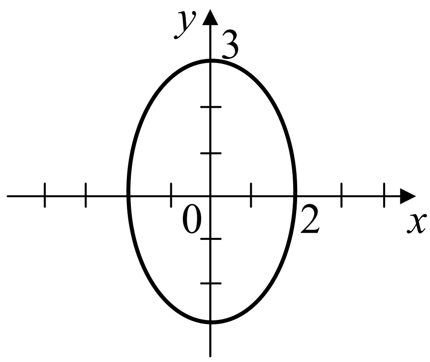
Задание №5. Уравнение прямой, изображённой на рисунке,



имеет вид…

Варианты ответов: 1) $2x-3y=6$; 2) $2x-3y=1$; 3) $3x-2y=6$; 4) $3x-2y=1$.

Задание №6. Уравнение кривой, изображённой на рисунке,



имеет вид…

Варианты ответов: 1) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$; 2) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$; 3) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$; 4) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$.

Задание №7. Уравнение прямой, проходящей через точку $M(3;-1;1)$ с направляющим вектором $\vec{S}=\{-1,2,3\}$, имеет вид…

Варианты ответов: 1) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$; 2) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+3}{1}$; 3) $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{3}$; 4) $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{3}$.

Задание №8. Даны точки $A(5;3)$ и $B(2;0)$, где B – середина отрезка AC.

Тогда точка C имеет координаты…

Варианты ответов: 1) $(-1;-3)$; 2) $\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right)$; 3) $(1;3)$; 4) $(-1;-2)$.

Задание №9. Производная функции $y = \operatorname{arctg}(x - \cos 2x)$ имеет вид…

Варианты ответов: 1) $\dfrac{2(1+\sin 2x)}{1+(x-\cos x)^2}$; 2) $\dfrac{1+2\sin 2x}{1+(x-\cos x)^2}$; 3) $\dfrac{1+2\sin 2x}{1-(x-\cos x)^2}$; 4) $\dfrac{2(1-\sin 2x)}{1-(x-\cos x)^2}$.

Задание №10. Значение интеграла $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{x} \sin y dy$ равно…

Варианты ответов: 1) $-\dfrac{\pi}{2}$; 2) $\dfrac{\pi}{2}-1$; 3) $1-\dfrac{\pi}{2}$; 4) $\dfrac{\pi}{2}$.

Задание №11. Закон движения материальной точки имеет вид $x(t) = 7 - 2t + t^3 + e^{10-5t}$, где $x(t)$ – координата точки в момент времени t. Тогда скорость точки при $t = 2$ равна…

Варианты ответов: 1) 3; 2) 5; 3) 10; 4) 15.

Задание №12. Множество первообразных функции $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}$ имеет вид…

Варианты ответов: 1) $-\dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}+C$; 2) $\dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}+C$; 3) $-\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$; 4) $\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$.

Задание №13. Если $\vec{R}(t) = \sin 3t \cdot \vec{i} + 2\vec{j} - \cos 3t \cdot \vec{k}$ – векторная функция скалярного аргумента t, тогда её производная $\dfrac{d\vec{R}}{dt}$ при $t = \dfrac{\pi}{2}$ равна…

Варианты ответов: 1) $-3\vec{k}$; 2) $-\vec{k}$; 3) $\vec{k}$; 4) $3\vec{k}$.

Задание №14. Градиент скалярного поля $u = e^{xy} + x^2 - yz$ в произвольной точке имеет вид…

Варианты ответов: 1) $ye^{xy}\vec{i} - y\vec{k}$; 2) $(ye^{xy} + 2x)\vec{i} + (xe^{xy} - z)\vec{j} - y\vec{k}$; 3) $e^{xy}\vec{i} + x^2\vec{j} - yz\vec{k}$; 4) $ye^{xy} + 2x + xe^{xy} - z - y$.

Задание №15. Дивергенция векторного поля $\vec{F} = \frac{x}{z}\vec{i} - \frac{xz}{y}\vec{j} + y^2\vec{k}$ в произвольной точке равна…

Варианты ответов: 1) $\left(2y + \frac{x}{z}\right)\vec{i} + \frac{x}{z^2}\vec{j} - \frac{z}{y}\vec{k}$; 2) $\frac{1}{z}\vec{i} + \frac{xz}{y^2}\vec{j}$; 3) $\frac{1}{z} - \frac{z}{y}$; 4) $\frac{1}{z} + \frac{xz}{y^2}$.

Задание №16. Норма вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{k}$ в пространстве R^3 равна…

Варианты ответов: 1) –3; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{29}$; 4) 29.

Задание №17. Модуль комплексного числа $-4 - 2i$ равен …

Варианты ответов: 1) $\sqrt{6}$; 2) 6; 3) $\sqrt{20}$; 4) 20.

Задание №18. Образом точки $z_0 = 1 + 3i$ при отображении $W = (z - 2i)^2$ является…

Варианты ответов: 1) $-2i$; 2) $2i$; 3) $2 + 2i$; 4) $-2 + 2i$.

Задание №19. Значение $\underset{z=-1}{Выч} \frac{\sin z}{z+1}$ равно…

Варианты ответов: 1) $\cos 1$; 2) $-\cos 1$; 3) $\sin 1$; 4) $-\sin 1$.

Задание №20. Пусть $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -2 + i$, тогда $\frac{z_1}{z_2}$ равно…

Варианты ответов: 1) $-\frac{8}{5}+\frac{1}{5}i$; 2) $-\frac{4}{5}+\frac{1}{5}i$; 3) $8-i$; 4) $\frac{4}{5}-\frac{1}{5}i$.

Задание №21. Укажите правильное утверждение относительно сходимости числовых рядов $A)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$ и $B)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$.

Варианты ответов: 1) A и B сходятся; 2) A и B расходятся; 3) A сходится, B расходится; 4) A расходится, B сходится.

Задание №22. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n (x-1)^n$ равен…

Варианты ответов: 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 1; 4) ∞.

Задание №23. Дана функция $f(x)=\cos\frac{x}{2}$, тогда первые три (отличные от нуля) члена разложения этой функции в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=0$ имеют вид…

Варианты ответов: 1) $1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{16}$; 2) $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$; 3) $1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$; 4) $1-\frac{x^2}{8}+\frac{x^4}{384}$.

Задание №24. Общий член последовательности $-1,-\frac{1}{4},\frac{3}{7},-\frac{5}{10},\ldots$ имеет вид…

Варианты ответов: 1) $a_n=(-1)^n\cdot\frac{2n+3}{3n-2}$; 2) $a_n=(-1)^n\cdot\frac{2n-3}{3n-2}$; 3) $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n-3}{3n-2}$; 4) $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n-3}{3n+2}$.

Задание №25. Дифференциальное уравнение $y' - 2y + xy^2 = 0$ является…

Варианты ответов: 1) уравнением Бернулли; 2) линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка; 3) однородным дифференциальным уравнением первого порядка; 4) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Задание №26. Дано дифференциальное уравнение $xy' - 2 = 0$ при $y(-1) = 1$. Тогда его решением является функция…

Варианты ответов: 1) $y = x^2 + 1$; 2) $y = x^2 - 1$; 3) $y = 2\ln|x| + 1$; 4) $y = 2\ln|x| - 1$.

Задание №27. Дано дифференциальное уравнение в частных производных $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + k\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 3$. Тогда функция $z = 3y^2 - 2x$ является его решением при k равном…

Варианты ответов: 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

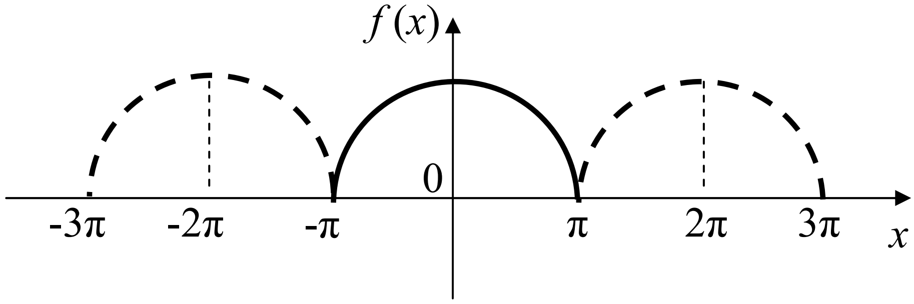
Задание №28. Частному решению дифференциального уравнения $y'' - 9y = x^3$ по виду его правой части соответствует функция…

Варианты ответов: 1) $y = e^{3x}$; 2) $y = e^{3x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$; 3) $y = e^{9x}$; 4) $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

Задание №29. Гармонические колебания с амплитудой 5, частотой 10 и начальной фазой 2 определяются уравнением…

Варианты ответов: 1) $f(x) = 5\cos(10x - 2)$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{10}\cos(5x + 2)$; 3) $f(x) = \dfrac{1}{10\cos(5x - 2)}$; 4) $f(x) = 5\cos(10x + 2)$.

Задание №30. График функции $f(x)$ при $x \in [-\pi; \pi]$ и его периодическое продолжение заданы на рисунке. Тогда ряд Фурье для этой функции имеет вид…



Варианты ответов: 1) $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$;

3) $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$; 4) $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$.

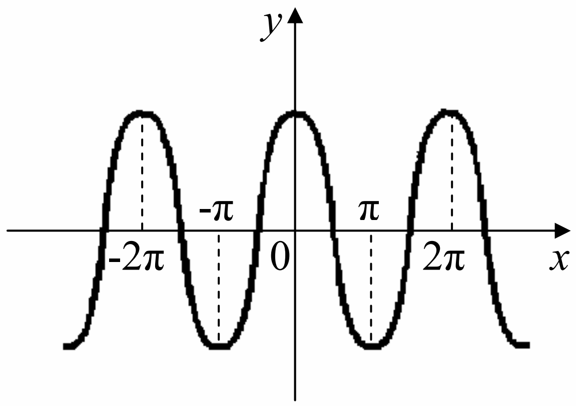
Задание №31. Коэффициент $\boldsymbol{b_2}$ разложения функции $f(x)=-x$ при $x \in [-\pi; \pi]$ в ряд Фурье равен…

Варианты ответов: 1) 0; 2) 1; 3) $\dfrac{2}{\pi}$; 4) $-\dfrac{2}{\pi}$.

Задание №32. Укажите график нечётной функции.

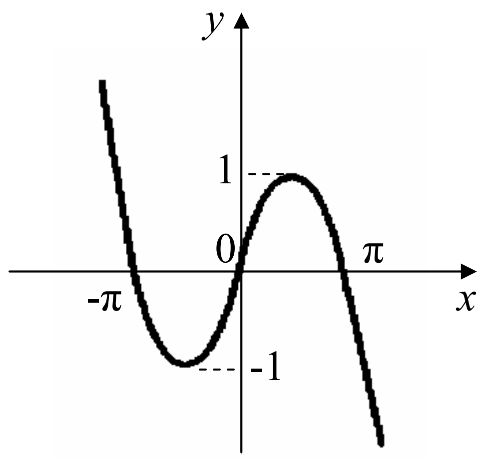
Варианты ответов:

1)

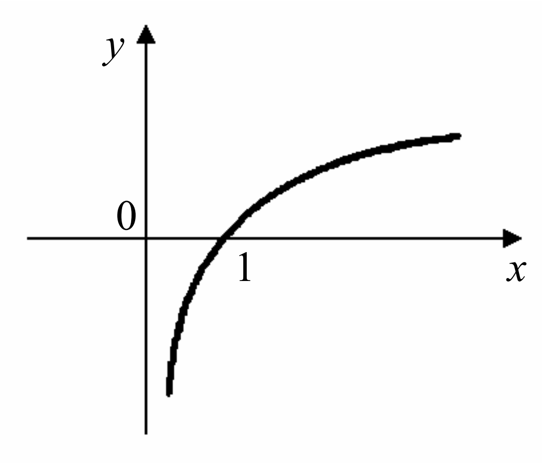
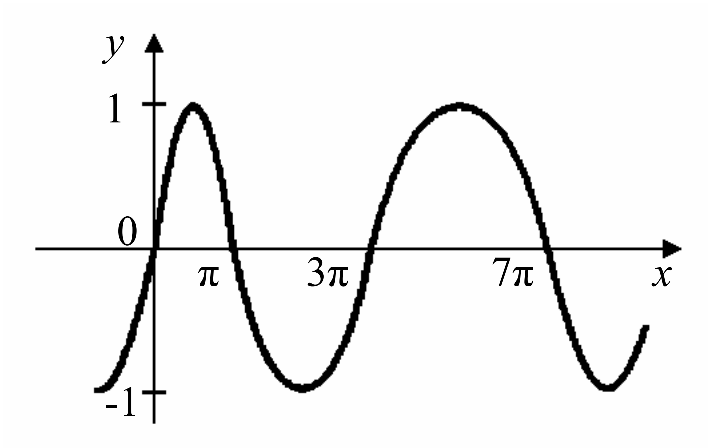


;

2)



;

3)  ; 4)  .

Задание №33. По оценкам экспертов вероятности банкротства для двух предприятий, производящих однотипную продукцию, равны 0,05 и 0,2. Тогда вероятность банкротства ***только одного*** предприятия равна…
Варианты ответов: 1) 0,25; 2) 0,23; 3) 0,1; 4) 0,01.

Задание №34. Пусть X – дискретная случайная величина, заданная законом распределения вероятностей:

X	–2	0	3
p	0,3	0,2	0,5

.

Тогда математическое ожидание случайной величины $4X$ равно…
Варианты ответов: 1) 0,2; 2) 0,9; 3) 1,5; 4) 3,6.

Задание №35. Монета брошена 3 раза. Тогда вероятность того, что «герб» выпадет ровно три раза, равна…
Варианты ответов: $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{3}$.

Задание №36. С первого станка на сборку поступает 60%, со второго – 40% всех деталей. Среди деталей, поступивших с первого станка, 2% бракованных, со второго – 3% бракованных. Тогда вероятность того, что поступившая на сборку деталь бракованная, равна…
Варианты ответов: 1) 0,003; 2) 0,024; 3) 0,018; 4) 0,06.

Задание №37. По результатам распределения 500 рабочих механического цеха по тарифным разрядам найдена эмпирическая функция распределения

$$F_{500}(x)=\begin{cases} 0; & \text{если} \quad x \le 1, \\ 0{,}18; & \text{если} \quad 1 < x \le 2, \\ 0{,}32; & \text{если} \quad 2 < x \le 3, \\ 0{,}44; & \text{если} \quad 3 < x \le 4, \\ 0{,}73; & \text{если} \quad 4 < x \le 5, \\ 0{,}91; & \text{если} \quad 5 < x \le 6, \\ 1; & \text{если} \quad x > 6. \end{cases}$$

Тогда количество рабочих цеха, имеющих 5-ый тарифный разряд, равно…

Варианты ответов: 1) 18; 2) 73; 3) 90; 4) 91.

Задание №38. Мода вариационного ряда 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5 равна…

Варианты ответов: 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 5.

Задание №39. Если основная гипотеза имеет вид $H_0 : a = 5{,}5$, то конкурирующей гипотезой может являться…

Варианты ответов: 1) $H_1 : a < 5$; 2) $H_1 : a \ne 5$; 3) $H_1 : a \ge 5{,}5$; 4) $H_1 : a < 5{,}5$.

Задание №40. В результате измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 7, 8, 12. Тогда несмещённая оценка дисперсии равна…

Варианты ответов: 1) 7; 2) 8; 3) 9; 4) 14.

Задание №41. Действительный корень уравнения $2x^3 + 3x - 1 = 0$ принадлежит интервалу…

Варианты ответов: 1) $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$; 2) $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$; 3) $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$; 4) $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Задание №42. Действительный корень уравнения $2\ln x + x = 0$ принадлежит интервалу…
Варианты ответов: 1) $(0;1)$; 2) $(3;4)$; 3) $(1;2)$; 4) $(2;3)$.

Задание №43. Дано дифференциальное уравнение $2y' = y^2 + 3x$ при $y(0) = -1$. Тогда первые три члена разложения его решения в степенной ряд имеют вид…

Варианты ответов: 1) $-1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2}$; 2) $-1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{2}$; 3) $-1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{3x^2}{4}$;
4) $-1+x+\dfrac{x^2}{2}$.

Задание №44. Интерполяционный многочлен Лагранжа второго порядка для функции $y = f(x)$, график которого проходит через точки с абсциссами $x=-3$, $x=-1$, $x=1$, имеет вид…
Варианты ответов:

1) $P(x)=\dfrac{(x+1)(x-1)}{-1}f(-3)-\dfrac{(x+3)(x-1)}{-3}f(-1)+\dfrac{(x+3)(x+1)}{3}f(1)$;

2) $P(x)=(x+1)(x-1)f(-3)+(x+3)(x-1)f(-1)+(x+3)(x+1)f(1)$;

3) $P(x)=\dfrac{(x+1)(x-1)}{8}f(-3)-\dfrac{(x+3)(x-1)}{4}f(-1)+\dfrac{(x+3)(x+1)}{8}f(1)$;

4) $P(x)=\dfrac{(x+1)(x-1)}{8}f(-3)+\dfrac{(x+3)(x-1)}{4}f(-1)+\dfrac{(x+3)(x+1)}{8}f(1)$.

Вариант № 2

Задание №1. Если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$, тогда матрица $C=A\cdot B$ имеет вид…

Варианты ответов: 1) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 6\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\\ 6 & 1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}4\\ 0\\ 3\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}4\\ -1\\ 7\end{pmatrix}$.

Задание №2. Ранг матрицы $\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ -2 & 6 & -4\\ 3 & -9 & 6\end{pmatrix}$ равен…

Варианты ответов: 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

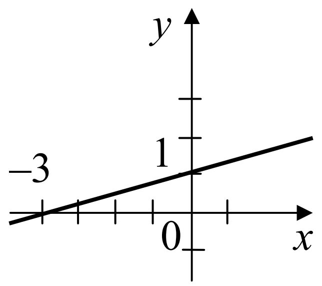
Задание №3. Если (x_0, y_0, z_0) – решение системы линейных уравнений $\begin{cases}2x-y+z=0,\\ -x+2y+2z=3,\\ x-3z=1,\end{cases}$ тогда $x_0+y_0+3z_0$ равно…

Варианты ответов: 1) –2; 2) 2; 3) –3; 4) 3.

Задание №4. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. Тогда матрицей A^{-1}, обратной A, является…

Варианты ответов: 1) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; 2) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$; 3) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; 4) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

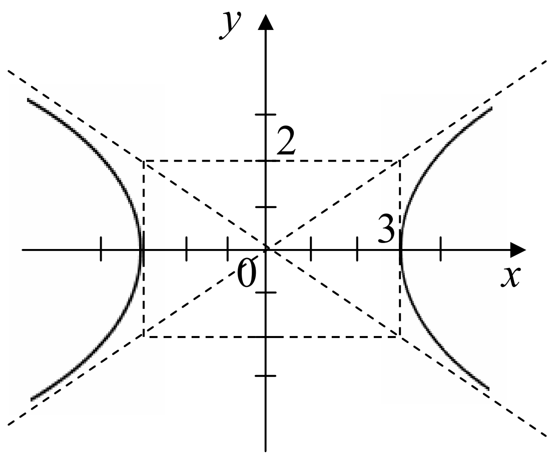
Задание №5. Уравнение прямой, изображённой на рисунке,



имеет вид…

Варианты ответов: 1) $x-3y+3=0$; 2) $3x-y+1=0$; 3) $x+3y-3=0$; 4) $3x+y-1=0$.

Задание №6. Уравнение кривой, изображённой на рисунке,



имеет вид…

Варианты ответов: 1) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$; 3) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$; 4) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=1$.

Задание №7. Уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;2;-2)$ с направляющим вектором $\vec{S}=\{-2,3,1\}$, имеет вид…

Варианты ответов: 1) $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-2}{1}$; 2) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{-1}$; 3) $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+2}{1}$; 4) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+1}{-2}$.

Задание №8. Даны точки $A(-2;3)$ и $B(1;1)$, где B – середина отрезка AC. Тогда точка C имеет координаты…

Варианты ответов: 1) $(4;-1)$; 2) $\left(-\frac{1}{2};2\right)$; 3) $\left(-\frac{3}{2};1\right)$; 4) $(4;1)$.

Задание №9. Производная функции $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ имеет вид…

Варианты ответов: 1) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; 2) $\frac{1}{\cos x}$; 3) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; 4) $\frac{1}{\sin x}$.

Задание №10. Значение интеграла $\int\limits_1^3 dx\int\limits_1^{e^x}\frac{dy}{y}$ равно…

Варианты ответов: 1) 8; 2) 4; 3) 2; 4) –4.

Задание №11. Закон движения материальной точки имеет вид $x(t)=2t^2-5t+12-e^{3-t}$, где $x(t)$ – координата точки в момент времени t. Тогда скорость точки при $t=3$ равна…

Варианты ответов: 1) 8; 2) 6; 3) 20; 4) 18.

Задание №12. Множество первообразных функции $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ имеет вид…

Варианты ответов: 1) $\operatorname{arctg}x+C$; 2) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$, 3) $\ln(x^2+1)+C$, 4) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.

Задание №13. Если $\vec{R}(t)=\vec{i}-\vec{j}\cos t+\vec{k}\sin t$ – векторная функция скалярного аргумента t, тогда её производная $\frac{d\vec{R}}{dt}$ при $t=\pi$ равна…

Варианты ответов: 1) $-\vec{k}$; 2) $\vec{k}$; 3) $-\vec{j}$; 4) $\vec{k}-\vec{j}$.

Задание №14. Градиент скалярного поля $u = 3x^2z + y^3z^2 - 2xz$ в произвольной точке имеет вид…

Варианты ответов: 1) $6xz + 3y^2z^2 - 2x$; 2) $6xz\vec{i} + 3y^2z^2\vec{j} - 2x\vec{k}$; 3) $(6xz - 2z)\vec{i} + 3y^2z^2\vec{j} + (3x^2 + 2y^3z - 2x)\vec{k}$; 4) $x^3z\vec{i} + \frac{y^4}{4}z^2\vec{j} - xz^2\vec{k}$.

Задание №15. Дивергенция векторного поля $\vec{F} = xz^2\vec{i} - \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z^2}{x}\vec{k}$ в произвольной точке равна…

Варианты ответов: 1) $z^2 - \frac{z^2}{x^2} - \frac{1}{z} + 2xz + \frac{y}{z^2} + \frac{2z}{x}$; 2) $z^2\vec{i} - \frac{1}{z}\vec{j} + \frac{2z}{x}\vec{k}$; 3) $z^2 - \frac{1}{z} + \frac{2z}{x}$; 4) $\frac{y}{z^2}\vec{i} + \left(\frac{z^2}{x^2} + 2xz\right)\vec{j}$.

Задание №16. Норма вектора $\vec{a} = -4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$ в пространстве R^3 равна…

Варианты ответов: 1) –8; 2) 8; 3) $\sqrt{26}$; 4) 26.

Задание №17. Модуль комплексного числа $3 + 4i$ равен…

Варианты ответов: 1) 7; 2) 5; 3) $\sqrt{7}$; 4) 25.

Задание №18. Образом точки $z_0 = \frac{2 - i}{3}$ при отображении $W = (i - 3z)^2$ является…

Варианты ответов: 1) 4; 2) –4; 3) $8 - 8i$; 4) $-8i$.

Задание №19. Значение $\underset{z=2}{Выч}\frac{z}{z^2 - z - 2}$ равно…

Варианты ответов: 1) 0; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 1; 4) ∞.

Задание №20. Пусть $z_1 = 2+i$, $z_2 = -3-i$, тогда $\dfrac{z_1}{z_2}$ равно…

Варианты ответов: 1) $-\dfrac{2}{3}-i$; 2) $-\dfrac{7}{10}-\dfrac{i}{10}$; 3) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{10}$; 4) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{4}$.

Задание №21. Укажите правильное утверждение относительно сходимости числовых рядов $A)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{0{,}1^n}$ и $B)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1}$.

Варианты ответов: 1) A сходится, B расходится; 2) A расходится, B сходится; 3) A и B сходятся; 4) A и B расходятся.

Задание №22. Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

Варианты ответов: 1) ∞; 2) e; 3) 1; 4) 0.

Задание №23. Дана функция $f(x) = \sin 2x$, тогда первые три (отличные от нуля) члена разложения этой функции в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ имеют вид…

Варианты ответов: 1) $2x - \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{4}{15}x^5$; 2) $2x + \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{4}{15}x^5$; 3) $2x - \dfrac{8}{3}x^3 + \dfrac{32}{5}x^5$; 4) $2x - 2x^2 + \dfrac{4}{3}x^3$.

Задание №24. Общий член последовательности $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{3}, -\dfrac{7}{4}, \dfrac{10}{5}, \ldots$ имеет вид…

Варианты ответов: 1) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1+3n}{n+1}$; 2) $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1+3n}{n+1}$; 3) $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{3n-2}{n+1}$; 4) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{3n-2}{n+1}$.

Задание №25. Дифференциальное уравнение $\left(\frac{x}{y}+1\right)y'-2=0$ является…

Варианты ответов: 1) уравнением Бернулли; 2) однородным дифференциальным уравнением первого порядка; 3) линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка; 4) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Задание №26. Дано дифференциальное уравнение $y'+xy=0$ при $y(0)=3$. Тогда его решением является функция…

Варианты ответов: 1) $y=e^{-x}+3$; 2) $y=-\frac{1}{x}+3$; 3) $y=3e^{-x^2/2}$; 4) $y=-\frac{3}{x}$.

Задание №27. Дано дифференциальное уравнение в частных производных $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-k\frac{\partial z}{\partial x}=2y$. Тогда функция $z=xy$ является его решением при k равном…

Варианты ответов: 1) –2; 2) –1; 3) 1; 4) 2.

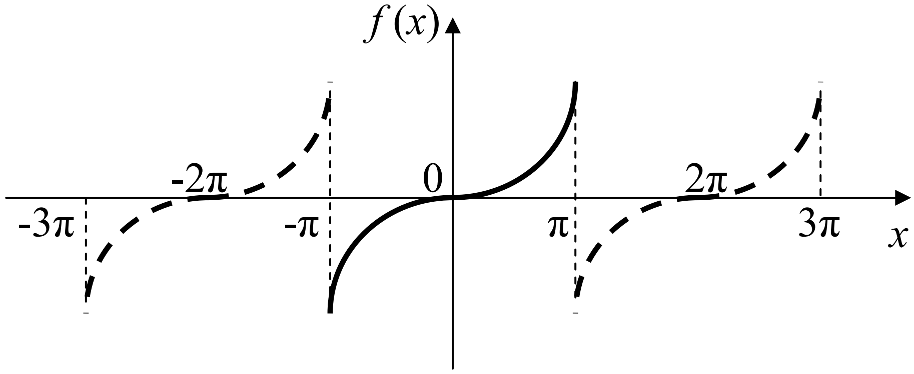
Задание №28. Частному решению дифференциального уравнения $y''-4y=xe^{2x}$ по виду его правой части соответствует функция…

Варианты ответов: 1) $y=Axe^{2x}$; 2) $y=e^{2x}(Ax^2+Bx+C)$; 3) $y=e^{2x}(Ax+B)$; 4) $y=e^{2x}(Ax^2+Bx)$.

Задание №29. Гармонические колебания с амплитудой 4, частотой 20 и начальной фазой $1/4$ определяются уравнением…

Варианты ответов: 1) $f(x)=4\left(20x+\frac{1}{4}\right)^2$; 2) $f(x)=4\cos\left(20x-\frac{1}{4}\right)$; 3) $f(x)=4\sin\left(20x+\frac{1}{4}\right)$; 4) $f(x)=\frac{1}{4}\cos(20x+4)$.

Задание №30. График функции $f(x)$ при $x \in [-\pi;\pi]$ и его периодическое продолжение заданы на рисунке. Тогда ряд Фурье для этой функции имеет вид…



Варианты ответов: 1) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$;

3) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$; 4) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$.

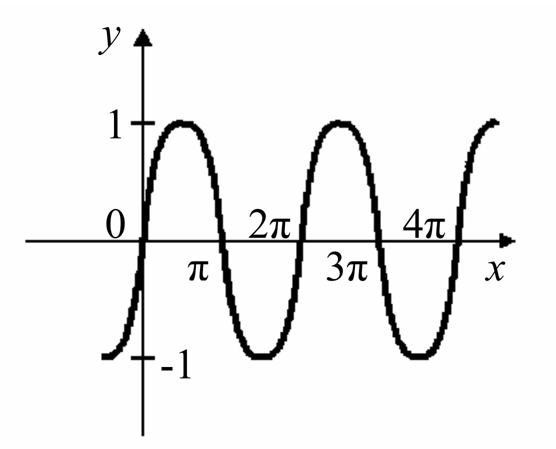
Задание №31. Коэффициент $\boldsymbol{b_3}$ разложения функции $f(x) = x^2$ при $x \in [-\pi;\pi]$ в ряд Фурье равен…

Варианты ответов: 1) 0; 2) 1; 3) $\frac{2}{\pi}$; 4) $-\frac{2}{\pi}$.

Задание №32. Укажите график монотонной функции.

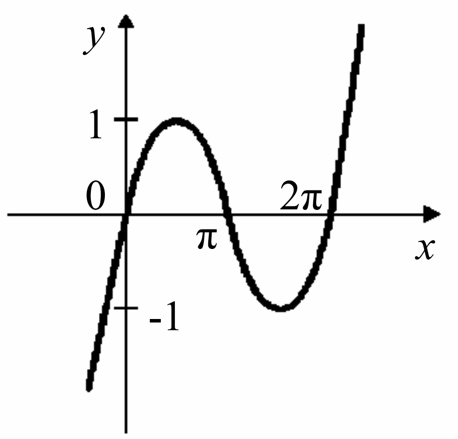
Варианты ответов:

1)

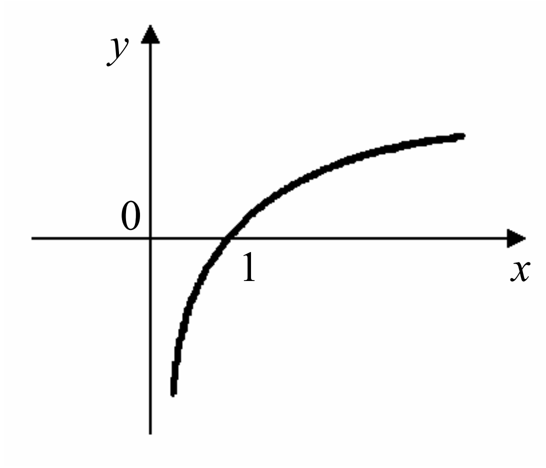


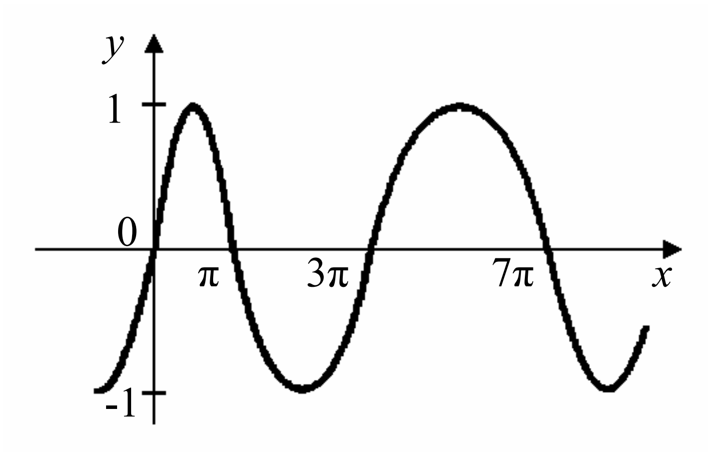
;

2)



;

3)  ;

4)  .

Задание №33. По оценкам экспертов вероятности банкротства для двух предприятий, производящих однотипную продукцию, равны 0,2 и 0,15. Тогда вероятность банкротства ***только одного*** предприятия равна…
Варианты ответов: 1) 0,29; 2) 0,35; 3) 0,03; 4) 0,17.

Задание №34. Пусть X – дискретная случайная величина, заданная законом распределения вероятностей:

X	–2	–1	1
p	0,2	0,1	0,7

.

Тогда математическое ожидание случайной величины $3X$ равно…
Варианты ответов: 1) 0,6; 2) –6; 3) 3; 4) 0,2.

Задание №35. Монета брошена 3 раза. Тогда вероятность того, что «герб» выпадет ровно один раз, равна…
Варианты ответов: 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{2}{3}$.

Задание №36. С первого станка на сборку поступает 30%, со второго – 70% всех деталей. Среди деталей, поступивших с первого станка, 1% бракованных, со второго – 3% бракованных. Тогда вероятность того, что поступившая на сборку деталь бракованная, равна…
Варианты ответов: 1) 0,04; 2) 0,021; 3) 0,03; 4) 0,024.

Задание №37. По результатам распределения 200 рабочих механического цеха по тарифным разрядам найдена эмпирическая функция распределения

$$F_{200}(x) = \begin{cases} 0; & \text{если} \quad x \le 1, \\ 0{,}06; & \text{если} \quad 1 < x \le 2, \\ 0{,}21; & \text{если} \quad 2 < x \le 3, \\ 0{,}37; & \text{если} \quad 3 < x \le 4, \\ 0{,}56; & \text{если} \quad 4 < x \le 5, \\ 0{,}83; & \text{если} \quad 5 < x \le 6, \\ 1; & \text{если} \quad x > 6. \end{cases}$$

Тогда количество рабочих цеха, имеющих 4-ый тарифный разряд, равно…

Варианты ответов: 1) 21; 2) 35; 3) 38; 4) 42.

Задание №38. Мода вариационного ряда 1, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 7, 9 равна…

Варианты ответов: 1) 1; 2) 4; 3) 5; 4) 9.

Задание №39. Если основная гипотеза имеет вид $H_0 : a = 3$, то конкурирующей гипотезой может являться…

Варианты ответов: 1) $H_1 : a \ge 3$; 2) $H_1 : a \ne 3$; 3) $H_1 : a \le 4$; 4) $H_1 : a > 4$.

Задание №40. В результате измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 4, 6, 14. Тогда несмещённая оценка дисперсии равна…

Варианты ответов: 1) 2; 2) 8; 3) 24; 4) 28.

Задание №41. Действительный корень уравнения $x^3 - x - 1 = 0$ принадлежит интервалу…

Варианты ответов: 1) $\left(1; \frac{3}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$; 3) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; 4) $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Задание №42. Действительный корень уравнения $x^2 \ln x - 3 = 0$ принадлежит интервалу…

Варианты ответов: 1) $(0;1)$; 2) $(3;4)$; 3) $(1;2)$; 4) $(2;3)$.

Задание №43. Дано дифференциальное уравнение $y' = 2x - y^2$ при $y(0) = 1$. Тогда первые три члена разложения его решения в степенной ряд имеют вид…

Варианты ответов: 1) $1 + x + 2x^2$; 2) $1 - x + 2x^2$; 3) $1 + x + x^2$; 4) $1 - x + x^2$.

Задание №44. Интерполяционный многочлен Лагранжа второго порядка для функции $y = f(x)$, график которого проходит через точки с абсциссами $x = -1$, $x = 2$, $x = 6$, имеет вид…

Варианты ответов:

1) $P(x) = \dfrac{(x-2)(x-6)}{21} f(-1) - \dfrac{(x+1)(x-6)}{12} f(2) + \dfrac{(x+1)(x-2)}{28} f(6)$;

2) $P(x) = \dfrac{(x-2)(x-6)}{21} f(-1) + \dfrac{(x+1)(x-6)}{12} f(2) + \dfrac{(x+1)(x-2)}{28} f(6)$;

3) $P(x) = \dfrac{(x-2)(x-6)}{12} f(-1) - \dfrac{(x+1)(x-6)}{6} f(2) - \dfrac{(x+1)(x-2)}{2} f(6)$;

4) $P(x) = (x-2)(x-6) f(-1) + (x+1)(x-6) f(2) + (x+1)(x-2) f(6)$.

Задание	Вариант №1	Вариант №2
1	2	4
2	4	2
3	2	4
4	1	2
5	3	1
6	3	2
7	4	3
8	1	1
9	2	4
10	2	2
11	2	1
12	4	4
13	1	1
14	2	3
15	4	3
16	3	3
17	3	2
18	2	4
19	4	2
20	1	2
21	1	4
22	2	1
23	4	1
24	3	3
25	1	2
26	3	3
27	1	1
28	4	4
29	4	3
30	3	2

31	2	1
32	2	3
33	2	1
34	4	1
35	1	3
36	2	4
37	3	3
38	3	3
39	4	2
40	1	4
41	3	1
42	1	4
43	1	2
44	3	1

Содержание

Подписано в печать 24.07.2009.
Форм. 60 х 84 1/16. Гарнитура «Таймс». Печать ризографическая.
Печ.л. 3,5. Тираж 120. Заказ 250.

Лаборатория оперативной полиграфии Издательства КГУ
420045, Казань, Кр.Позиция, 2а
Тел. 231-52-12